【紹 介】

オプションの経済的役割

伊多波 良雄
久 保 徳次郎
杉 本 篤 信
広 田 真 一

I はじめに

オプションとは，対象となる資産をあらかじめ決められた条件で将来売買いできる権利を保証する契約である．プット，コールなどがその代表的例で，さらにワラント債，優先株式，生命保険契約などもその一形態とみなすことができる[1]．

日本においても，オプションの存在が注目されるようになった現在，その経済的役割を正しく認識する必要があると思われる．そのような観点から，本稿は，オプションの経済的機能に関する最近の議論を紹介することを意図している．

本稿のアウトラインを簡単に述べると次のようになる．オプションは将来が不確実なときに威力を発揮するといわれている．Arrow〔1〕は，将来に不確実性が存在するとき，(財の数)×(状態の数) だけの条件つき市場が存在すれば，競争的市場がパレート最適な市場均衡をもたらすことを示している．しかし，実際にはそれだけの市場が存在することは考えられない．そこで，アローはパレート最適な市場均衡の経済主体による完全予見，すなわち，合理的期待の仮定と純粋証券 (pure security) の存在の仮定のもとで，競争的市場がパレート最適な市場均衡をもたらすことを示している．純粋証券とは，ある状態が起こったときに1単位の収益を生み，他の状態が起こったときには収益がゼロになる証券を示し，全ての状態の純粋証券が存在するとき，市場は完備であるといわれる．

現実の経済では，将来起こりうる状態の数は無数に近いほど多く，それは存在してい

1) オプションの初歩的説明については，Brealey and Myers〔3〕の20，21，22章，千保・清水・渡辺〔11〕を参照のこと．

る証券の数を上回っていると思われる．従って現実の市場は非完備であると解釈することが妥当であろう．では，市場が完備でないときはパレート最適な状態は達成されないのであろうか[2]．オプションの経済的役割との関連で言うなら，Ross〔9〕は非完備な市場を完備にするという点にオプションの経済的役割があると指摘している．

しかし，Black and Scholes〔2〕のオプションプライシングモデルでは，オプションの価格は裁定取引を通じて決定されている．これは，オプションの利得を既存の証券で複製できることを，すなわち，市場が完備であることを前提にしている．したがって，そのような世界ではオプションはすでにパレート最適性が達成されている完備な市場に導入されていることになり，オプションは余計な（redundant）な資産になる．オプションプライシングモデルにおいては，Ross〔9〕のオプションの経済的役割に関する議論は水泡に帰す．

では，そのばあいのオプションの経済的役割はどこに見出せるだろうか．本稿では，Ross〔10〕が証券のポジションになんらかの制約ある場合に，その経済的役割があることを可能な答えの一つとして呈示していることを紹介しよう．

次の構成に従って，順次説明しよう．第Ⅱ節では，Ross〔9〕を中心に完備な市場とオプションの関係を説明する．第Ⅲ節では，理解を深めるため例を示す．第Ⅳ節では，オプションの価格決定を見ると市場が完備であることを前提していることを，そして，市場が完備であっても証券に流動性制約などの制約があるとき，オプションの経済的機能が発揮されることを簡単なモデルを使って示す．第Ⅴ節で，コメントを述べ稿を閉じる．

Ⅱ　完備な市場とオプション

それでは最初に，Ross〔9〕の内容を中心にして，効率性の観点からみたオプションの役割を説明する．まず完備な市場の性質と機能について述べた後に，オプションの創出により市場を完備に近づけうる可能性とその方法について考えてみよう．

1　完備な市場

各経済主体が，将来のある時点の所得に関心をもっている状況を考える．その将来時

2)　非完備な市場と均衡のパレート最適については，Grossman〔5〕, Hart〔6〕を参照のこと．

点がどのような状況になるかは現時点では不確実であるが，起こりうる状況を有限個の状態（state）に分けることができるものとする．そこでまず，ある状態 i が起こったときに1単位の収益を生み，他の状態が起こったときには収益がゼロになるような証券を考えてみよう．こうした証券は，状態 i の純粋証券と呼ばれる．そして，起こりうる全ての状態の純粋証券が経済に依存する場合，市場は完備であると言う．市場が完備である場合には，純粋証券の組合せにより，状態ごとにいかなる収益のパターンをもつくりだすことが可能である．したがって，個々の経済主体は，自らの予算の範囲内で純粋証券の取引を行うことにより，将来のあらゆる状態に対する収益をその選好に応じて決定することができる．そして，経済全体としては，価格メカニズムを通じてパレート最適なリスクの配分が達成されるのである[3]．

このように，経済に全ての状態の純粋証券が存在すること，すなわち市場が完備であることは，効率性の観点から望ましいといえる．一方，現実の証券市場においては，われわれは上記のような純粋証券を観察することはできない．われわれが通常取引を行っているものは，株式や債券などの証券である．しかしそのことは，現実の証券市場が完備な市場とは異なるということを必ずしも意味するものではない．なぜなら，現実に存在する証券のポートフォリオを組むことにより，純粋証券を複製できる可能性があるからである．そしてその複製のための条件とは，状態の数に等しい数の1次独立な証券が存在することである．そのことを示してみよう．

経済の将来起こりうる状態の数を m とし，また m 個の1次独立な証券が存在するとしよう．x_{ij} は状態 i の証券 j の収益を表すものとする[4]．すると，証券 j の収益パターンは次のような列ベクトル X_j で表わされる．

$$X_j=\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mj} \end{bmatrix}$$

3)　経済主体の関心が将来時点の所得ではなく将来時点の財の消費量である場合には，純粋証券の市場に加えてそれぞれの財の市場が存在し，人々が合理的な期待をいだいているならば，パレート効率的な資源配分が達成される．この点に関しては，Arrow〔1〕を参照．

4)　ここでは，経済における生産面を無視し，各証券の収益は外生的に与えられているものと仮定する．

ここで個々の証券の収益が1次独立であるということは，m 個の列ベクトル Xj が互いに1次独立であることを意味する．したがって，こうした m 個の列ベクトルをまとめて各証券の状態ごとの収益を表す $m \times m$ の正方行列

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1m} \\ x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & \cdot & \cdot & x_{mm} \end{bmatrix}$$

をつくると，X のランクは m となる．よって X は非特異行列であり，逆行列をもつことになる．すなわち，I を単位行列とすると，

$$XA=I$$

を成立させるような行列 A が存在するのである．そこで，A と I をそれぞれ m 個の列ベクトルに分け，それを $A_1, A_2, \cdot\cdot\cdot, A_m, I_1, I_2, \cdot\cdot\cdot, I_m$ とすると，

$$XA_i=I_i, \quad i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, m$$

が成立する．ここでは，I_i は，i 番目の成分が1，それ以外の全ての成分が0となるベクトルであるが，これは状態 i の純粋証券の収益パターンを表している．そして，ベクトル A_i の各成分のように各証券を組み合わせることにより，状態 i の純粋証券の収益パターンを複製することができるのである．すなわち，状態の数と1次独立な証券の数が等しい場合には，各状態の純粋証券は既存の証券のポートフォリオで創出可能であり，市場の完備性は達成されるのである．

2　非完備な市場とオプションの役割

状態の数 m に等しい数の1次独立な証券が存在しない場合，既存の証券のポートフォリオでは全ての状態の純粋証券を複製することはできない．このとき市場は完備にならず，各経済主体は自らが好ましいと考える状態ごとの収益パターンを実現できない．そして，リスクのパレート最適な配分は達成されず，非効率が発生することになる．現実の経済では，将来起こりうる状態の数は無数に近いほど多く，それは存在している証券の数を上回っていると思われる．したがって現実の市場は非完備であると解釈することが妥当であろう．

こういった場合に市場を完備にするためには，個々の経済主体が利用可能な1次独立な金融資産を新たに創出する必要がある．このことを数式を用いて示すと次のようになる．

いま，経済に1次独立な証券が k 個（$k<m$）しか存在しないとしよう．この場合，前述の行列 X は特異行列となり，その逆行列は存在しない．このことは，既存の証券の組合せでは全ての状態の純粋証券を複製できないことを意味している．ここで，既存の証券に対してそして相互に1次独立な（$m-k$）個の新しい金融資産を創出することを考えよう．Y_{ij} を状態 i が起こったときの新金融資産 j の収益とすると，

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdot & \cdot & y_{1(m-k)} \\ y_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & \cdot & \cdot & y_{m(m-k)} \end{bmatrix}$$

は新金融資産の状態ごとの収益を表す行列ということになる．一方，既存の k 個の1次独立な証券の状態ごとの収益を表す行列を X' とすると，それは，

$$X'=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & \cdot & \cdot & x_{mk} \end{bmatrix}$$

と表される．そして，X' と Y を合わせて新しい行列 Z を作る．

$$Z=[X'\ Y]$$

ここで Z は，$m\times m$ の非特異な行列となるので，その逆行列が存在する．このことは，既存の証券と新しく創出された金融資産を組み合わせることにより純粋証券を複製できることを意味しており，市場の完備性が達成されることを示している．

さて，上記のように市場を完備にするために新しい金融資産を創出する場合には，そのコストが小さい方が望ましいことは明かであろう．既存の証券に対するオプションをつくりだすことは，新しい証券をつくりだすことに比べてコストが小さくてすむと思われる．ここにオプションの1つの経済的機能がある．すなわち，オプション取引はより

安いコストで市場を完備に近づける役割を果たしていると考えられるのである．ただし，オプションの創出により市場を完備にするための必要にして十分な条件がある．その条件とは，既存の証券の収益だけを観察することにより各状態が識別できるということであり，これを識別性条件と呼ぶことにする．識別性条件は前述の行列 X' の行が全て異なっていることに相当している．X' に同じ行がある場合にオプションにより新金融資産を創出すると，Z にも同じ行ができ Z は特異行列となってしまうのである．つまり，オプションはその収益が既存の証券の収益により決定される派生的な金融資産であるため，既存証券の収益によって識別できない状態は，どのようなオプションを使っても識別することは不可能なのである．Ross〔9〕の定理1では，識別性条件が満たされている場合に，状況によって様々なオプションを導入することにより市場を完備にできることが証明されている[5]．

さらに，Ross〔9〕の定理2～5では，コールまたはプットで市場の完備性を達成できるような既存の証券のポートフォリオが少なくとも1つは存在することが示されている．そのポートフォリオは，効率的ポートフォリオ（efficient portfolio）と呼ばれ，収益が全ての状態で異なるという性質をもっているものである．このことを説明してみよう．

既存の証券の収益により各状態が識別できる場合には，状態ごとに収益の異なるポートフォリオを組むことが可能である．そうしたポートフォリオの状態ごとの収益を，

$$F=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m \end{bmatrix}$$

で表す．この収益の間には，$f_1<f_2<\cdots\cdots<f_m$ という関係があるものと仮定しよう[6]．そしてこのポートフォリオに対して，$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{m-1}$ のそれぞれを行使価格とする $m-1$ 個のコールオプションを創出する．すると，このポートフォリオとこれらのコールオプションの状態ごとの収益を表す行列は次のようになる．

5）ある状況では，1つの証券に対するコールやプットだけで市場の完備性が達成される．
6）この仮定は単に説明の簡単化のためであり，この仮定がなくても以後の結論には変わりがない．

$$V=\begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ f_2 & f_2-f_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ f_3 & f_3-f_1 & f_3-f_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_m & f_m-f_1 & f_m-f_2 & \cdot & \cdot & f_m-f_{m-1} \end{bmatrix}$$

この行列の第1列はポートフォリオの収益を，第2列から第 m 列までは $m-1$ 個のコールオプションの収益を表している．これらの列は互いに独立であるので，V には逆行列が存在し，市場の完備性が達成されることがわかる[7]．またオプションの導入によって市場が完備にならなくても，収益行列のランクを1つでもあげることができれば，それはパレートの意味で効率性をもたらすことができるのである．

以上のように，市場を完備にするためには複雑なオプションは必ずしも必要ではなく，ポートフォリオに対するコール，プットオプションだけで十分なのである．現実の市場においては，マーケットポートフォリオに対するコール，プットオプションが存在するが[8]，これらは市場の完備性の達成に寄与していると考えることができる．

Ⅲ　例による説明

この節では，前節で述べたことを簡単な例を使って説明する．まず，完備な市場について考えてみよう．

例1（完備な市場）

将来起こりうる状態が3状態で3証券が存在する市場を考える．証券 $i\,(i=1,2,3)$ の収益パターンを列ベクトル X_i で示すと次のようになる．

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad X_2=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \qquad X_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

このような市場が完備であるかどうか確かめてみよう．完備であるためには，3つの状態の純粋証券が複製できることが条件である．純粋証券の収益ベクトル I_1，I_2，I_3，は

7）ここでは，ポートフォリオに対するコールが市場を完備にする例を示したが，プットを用いても全く同様の議論が可能である．

8）その代表的なものが，日本の日経平均オプション，アメリカのS＆P100オプションなどの株価指数オプションである．

次のように表せる．

$$I_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad I_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad I_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

まず3種類の純粋証券のうち，I_1 を複製できるかどうか見てみよう．次のようにポートフォリオを表すことにする．

a_{hj}：ポートフォリオ A_h に含まれる証券 j の数量

たとえば I_1 が複製できるポートフォリオ A_1 が存在するとして，そのポートフォリオをベクトルで表そう．

$$A_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{bmatrix}$$

すると A_1 に関して次のような関係が成り立つ．

$$XA_1=I_1$$

$$\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ここで，A_1 が一意に定まるためには，行列 X が非特異行列であること，つまり逆行列をもつことが必要である．この場合には $a_{11}=1/12$，$a_{12}=5/12$，$a_{13}=-1/3$ である．このことを他の純粋証券についても同様のことが言える．ここで，$A=[A_1\ A_2\ A_3]$，$I=[I_1\ I_2\ I_3]$ とすると次のような関係が成立する．

$$XA=I$$

同様に，行列 A が存在するためには行列 X が逆行列をもつことが条件である．この場合，このような条件を行列 X が満たせば，市場は完備となり，効率的になる．そして I は単位行列なのでポートフォリオの行列 A は次のようになる．

$$A=X^{-1}=\begin{bmatrix}1/12&-5/12&7/12\\5/12&-1/12&1/12\\-1/3&2/3&-1/3\end{bmatrix}$$

しかし別のケースでは，既存の証券だけでは市場は必ずしも完備になるとは限らない．そこでは，証券の収益に関連させたオプションが，重要な役割を果たすと考えられる．

次のような例を考えよう．

例2（市場が非完備の時のオプションの役割）

次のように3状態で，証券が1種類の市場を考える．

$$X'=X_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

この市場は明らかに非完備である．そこで，証券1に対するコールオプションを考えよう．この収益を次のように表そう．いま，$C_j(k)$ を証券 j に対する行使価格 k のコールオプションの収益パターンを表すベクトルとする．すなわち，

$$C_j(k)=\begin{bmatrix}\max(0,\ X_{1j}-k)\\\max(0,\ X_{2j}-k)\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\max(0,\ X_{mj}-k)\end{bmatrix}$$

である．すると，証券1に対する行使価格1，2のコールオプションの収益パターンは，

$$C_1(1)=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\qquad C_2(2)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

となる．この2つのベクトルを X_1 に付け加え，行列 Z をつくると

$$Z=[X_1\ \ C_1(1)\ \ C_2(2)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

のようになる．この行列 Z は非特異行列で逆行列をもつ．つまり，上のような2種類のオプションをつくることができれば市場は完備となる．

しかし，単独の証券に対するオプションを，新たな収益ベクトルを持つ証券として付け加えることができても，必ずしも市場は完備になるとは限らない．それを簡単な例でみてみよう．

例3（単独の証券に関するオプションだけでは市場が非完備の場合）

$$X'=[X_1 \quad X_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\\1 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

上のような，証券2種類，状態4のような証券を考える．証券 j に対する行使価格 k のプットオプションの収益ベクトルを $P_j(k)$ とすると，

$$P_j(k)=\begin{bmatrix}\max(0,\ k-x_{1j})\\\max(0,\ k-x_{2j})\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\max(0,\ k-x_{mj})\end{bmatrix}$$

となる．そこで，それぞれの証券に対して行使価格1のコールオプション，行使価格2のプットオプションを考えると，その収益ベクトルは以下のようになる．

$$C_1(1)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\quad C_2(1)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\quad P_1(2)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad P_2(2)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

この4つのベクトルを行列 X' に付け加えても，行列のランクは3になるが，状態の数4に足りない．1次独立のベクトルの数が3つ，つまり，どの証券も他の3つの証券で複製されうるのである．つまり，非特異行列を作れないのである．これは，他の行使価格をもつオプションを考えても同様のことが言える．このように，単独の証券に対するコール，プットオプションだけでは，必ずしも完備性は保証されない．そこで，既存の証券で組まれたポートフォリオに対するコール，プットオプションを考えてみる．先ほどの例3を使って考えてみよう．

例4（効率的なポートフォリオ）

例3では，単独の証券に対するコール，プットオプションだけの導入だけでは完備にすることはできなかった．そこで，証券1を1単位，証券2を2単位でポートフォリオを組む．すると，その収益ベクトル F は，

$$F=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$$

となる．このポートフォリオに対して，行使価格3，4，5のコールオプションを考える．そのオプションの収益ベクトルは次のように表すことができる．

$$C_f(3)=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix},\quad C_f(4)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix},\quad C_f(5)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

これらの収益ベクトルを合わせた行列 V は次のようになる．

$$V=[F\ \ C_f(3)\ \ C_f(4)\ \ C_f(5)]=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\4&1&0&0\\5&2&1&0\\6&3&2&1\end{bmatrix}$$

この行列 V は非特異行列で，逆行列が存在する．つまり，純粋証券が複製可能になり，市場は完備になる．

このように，既存の証券で適当なポートフォリオを組み，それに対するコール，プットオプションによって，市場の完備性は達成される．すなわち，例4のポートフォリオは効率的ポートフォリオの一例である．そして，証券の収益だけで状態が識別可能であれば効率的ポートフォリオは必ず存在するので，複雑なオプションは必ずしも必要でなく，基本的なコール，プットオプションだけで市場の完備性は保証されるのである．すなわち，オプションは，既存の証券だけでは完備ではない市場を，より容易に完備性をもたらすという意味で重要な証券であると考えられる．

Ⅳ　証券のポジション制約とオプション

すでに指摘したように，Ross〔9〕は，オプション取引導入の経済的役割として，非完備な市場を完備な市場にする，あるいはそれに近づけるという点を強調した．一方で，Black and Scholes〔2〕に代表されるオプション価格決定モデルでは，オプションのプライシングは裁定を通じて行われる．このことは，オプションを既存の証券で複

製可能な資産，すなわち完備な市場に新たに追加された余分な資産とみなしていることを意味している．そのため，オプション価格決定モデルの世界におけるオプションは，Ross〔9〕の意味での経済的役割をもっていないとの批判がなされてきた．そこでこの節では，Ross〔10〕に従って，完備な市場に追加されたオプションにも，経済的な機能があるようなケースを示す．結論を先取りして言えば，それは，証券のポジションに何らかの制約をもつ経済主体の効用が，もしその制約がなければ得られるであろう効用よりも低い場合には，オプションの導入はその経済主体の効用を高める可能性がある，ということである．

まずそのことを示す前に，オプション価格決定モデルにおける裁定によるオプションプライシングについて，簡単なモデルで概観することにしよう．いま状態および独立な証券の数がそれぞれ m である完備な市場で議論をすすめることにする．このような市場に，コールオプションが導入された場合を考えてみよう[9]．ある証券 j に対する行使価格 k のコールオプションの将来の収益パターンは，前節でみたように，

$$C_j(k)=\begin{bmatrix} \max(0,\ x_{1j}-k) \\ \max(0,\ x_{2j}-k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \max(0,\ x_{mj}-k) \end{bmatrix}$$

で表される．このコールの収益パターンを，既存証券のポートフォリオを組むことにより複製することを考える．すなわち，

$$C_j(k)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j X_j \tag{1}$$

が成立するように，$\alpha_j(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,m)$ の値を決定するのである．このようにコールと複製ポートフォリオの将来の収益パターンがまったく同じ場合には，それぞれの現時点での両者の価格は等しくなるはずである．つまり，$c_j(k)$ をこのコールの価格，x_j を証券 j の価格とすると，

$$c_j(k)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j \tag{2}$$

9） もちろん以下の点に関しては，プットオプションであっても同様である．

が成立する．なぜなら，もし両者の価格が等しくなければ裁定による利益機会が生じてしまうからである．例えば，(1)式が成立している下で(2)式の左辺が右辺より大きくなっていれば，複製ポートフォリオを購入しコールを売却することによってリスクなしに利益が得られるため，直ちに裁定行動が起こる[10]．その結果価格が調整され，(2)式の等式が成立することになるのである．これがオプション価格決定モデルが別名「裁定に基づくモデル」(arbitrage-based model) とも呼ばれるゆえんである．

以上のように，オプション価格決定モデルは，完備な市場に追加的に導入されたオプションの裁定による価格付けを論じている．よってそこでは，オプションは，非完備な市場を完備にするという経済的役割を担わされておらず，完備な市場における「余分」な金融商品として取り扱われているのである．しかしながら，このような完備な市場においても，オプションの導入には重要な経済的含意をもつケースがある．このことを以下に示してみよう．

分析の単純化のために，各経済主体は将来の所得に関心をもっており，上記の市場でポートフォリオを組み，将来その収益を受け取るものとする．このポートフォリオの収益ベクトルは次のように表される．

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}, & \cdot, & x_{1j}, & \cdot, & x_{1m} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_{i1}, & \cdot, & x_{ij}, & \cdot, & x_{im} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_{m1}, & \cdot, & x_{mj}, & \cdot, & x_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし，λ_j は証券 j のポジションである．さらに，状態 i の起こる主観的確率を π_i とし，経済主体の最適化問題を以下のように考えることにしよう．

$$\max_{\lambda_1,\cdot\cdot\cdot,\lambda_m} \quad EU=\sum_{i=1}^{m}\pi_i u(v_i)$$

$$\text{st.} \quad \sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j = y$$

10) 不等号の向きが逆の場合は，コールを購入して複製ポートフォリオを売却する．

ただし，$u(v_i)$ は効用関数，y は賦与された初期所得である．状態 i の純粋証券の価格を ϕ_i とすれば，x_j は次のように表すことができる．

$$x_j=\sum_{i=1}^{m}\phi_i x_{ij} \tag{4}$$

ここで，経済主体は，上記の最適化問題を解くことによって，期待効用 EU を最大化できるものとしよう．しかしこのような場合であっても，ある経済主体の証券ポジションに何らかの制約が課せられている場合には，その主体は制約がない場合と比べてより低い期待効用しか実現できないかもしれない．このことをみるために，いまある経済主体が流動性制約を受けているとしよう．その極端なケースとして，各証券についてショート・ポジションがとれない，すなわち，$\lambda_j \geqq 0$ というポジション制約を受けている場合を考える．説明を簡単化するために，独立な証券の数と状態の数が2である場合で議論を進める．すると，上記の最適化問題は次のように表される．

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2} EU=\pi_1 u(v_1)+\pi_2 u(v_2)$$

$$\text{st. } \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=y \tag{5}$$

$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0 \tag{6}$$

ただし，(3)および(4)は次のようになる．

$$v_i=\lambda_1 x_{i1}+\lambda_2 x_{i2}, \qquad i=1,2 \tag{7}$$

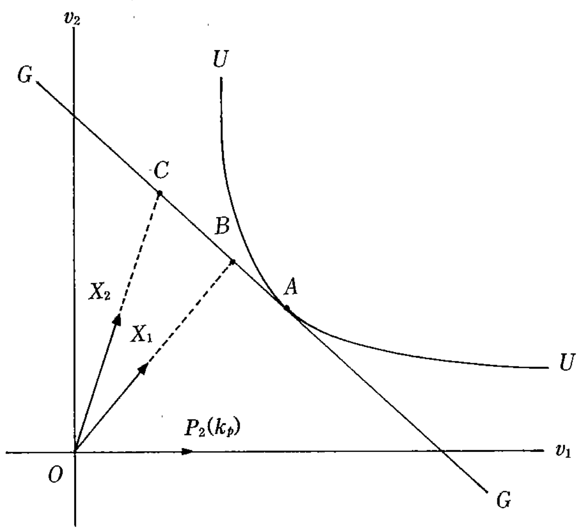
$$x_j=\phi_1 x_{1j}+\phi_2 x_{2j}, \qquad j=1,2 \tag{8}$$

上記の問題を図を用いて説明してみると，以下のようになる．

UU 曲線は無差別曲線を，GG 線は予算制約線をそれぞれ表している[11]．A は流動性制約がない場合に達成される最適点である．いま，二つの証券の収益ベクトル X_1, X_2 が図示されているようなものであったとしよう．するとこの場合，経済主体がショート・ポジションをとれないとすれば，A ではなく，OBC のような領域内でしかポートフォリオの選択が出来なくなってしまう．この領域は明らかに A よりも期待効用水準が低くなっている．ところが，いまこのような状況の下で，証券2に対するプットオプションが発行されたとしよう．このプットオプションの実行価格を k_p とすると，その

11）図中の予算制約線は本文の（5），（7），（8）より，次のように表される．

$$v_2=-\frac{\phi_1}{\phi_2}v_1+\frac{y}{\phi_2}$$



収益ベクトル $P_2(k_p)$ は次のようになる.

$$P_2(k_p)=\begin{bmatrix} k_p-x_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし，ここでは $x_{12}<k_p<x_{22}$ と仮定する．このプットの収益ベクトルは，図示されているように，横軸上に描写される．図より，この経済主体はポートフォリオの一部を売却してこのプットを購入すれば，A で示される最適な収益パターンを選択することが可能となることがわかる.

また，最適点の A が予算制約上の C 点より左側にある場合には，証券 2 に対するコールオプション（ただし実行価格は k_c）が導入されることにより，先の例と同様に最適点を選択することが可能となる．このコールオプションの収益ベクトルは次のように表される.

$$C_2(k_c)=\begin{bmatrix} 0 \\ x_{22}-k_c \end{bmatrix}$$

ただし，$x_{22}>k_c>x_{12}$ である．(図示されてはいないが，このコールの収益ベクトル $C_2(k_c)$ は，縦軸上に描写することができる.)

このように，証券のポジションに流動性制約などの何らかの制約をうけている経済主

体が存在する場合には，完備な市場においてもオプションの導入は経済主体の期待効用を高める可能性がある．またこの場合，オプションの価格は証券ポジションに制約のない経済主体の裁定行動により決定されると考えることができる．よって，完備な市場において，オプションの価格が裁定によって決定されると同時に，オプションがパレートの意味で効率性を高めるケースがあることがわかる．つまり，オプション価格決定モデルが想定するような世界においても，オプションが経済的役割を果たす場合があるのである[12]．

V　おわりに

冒頭で述べたように，本稿は，オプションの経済的機能に関する最近の議論を紹介することを意図したものである．したがって，我々はいくつかの局面において論証が不十分であると認識しながらも，我々が考える趣旨をできるだけ正確に表明することに努めた．

本稿では，オプションの経済的機能の側面から議論を展開したが，オプションの経済分析への応用可能性について言及して稿を閉じよう．オプションの評価方法の適用可能性は，多くの可能性を秘めていると言ってよいだろう．特に，状況によって利得が変化する資産，あるいは，請求権などの評価に威力を発揮する．言い換えるなら，オプションの評価理論は条件付き請求権の評価の一般理論である，と言えよう．社債および転換社債の評価，ワラント債の評価，各種の保険契約の評価などを，さしあたり例として挙げておこう[13]．さらに，オプションの評価方法の適用可能性の一つとして，オプションプライシングによる証券の理論的な値と実際の値を比較検討することには，投資戦略の一つの指針となりうるであろう．

【参考文献】

〔1〕 Arrow, K. J., "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", *Review of Economic Studies,* Vol. 31, No. 2, April 1964, pp. 91-96.

12) しかし，オプション取引の手数料・取引単位などが，他の証券の取引のそれらに比べて大きければ，オプションの導入が経済主体の効用を高めるとは必ずしもいえない．

13) Itaba〔7〕は，Black and Scholes〔2〕の価格決定方式を援用して地方交付税制度の評価を試みている．

〔2〕 Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, May-June 1973, pp. 637-654.

〔3〕 Brealey, R. A. and S. C. Myers, *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill Book Company, Third Ed., 1988.

〔4〕 Cox J. C. and M., Rubinstein *Options Markets*, Prentice-Hall Inc., 1985. (仁科一彦監訳『オプションマーケット』HBJ 出版局, 1988年)

〔5〕 Grossman, S. J., "A Characterization of the Optimality of Equilibrium in Incomplete Markets", *Journal of Economic Theory*, Vol. 15. June 1977, pp. 1-15.

〔6〕 Hart, O. D., "On the Optimality of Equilibriun when the Market Structure is Incomplete", *Journal of Economic Theory*, Vol. 11, No. 3, December 1975, pp. 418-443.

〔7〕 Itaba, Y., "Actuarial Costs of Fiscal Equalizing Intergovernmental Grants", Discussion paper, 1990.

〔8〕 Ritchken, P., *Options: Theory, Strategy, and Applications*, Library of Cataloging-in-Publication Data, 1987.

〔9〕 Ross, S.T., "Options and Efficiency", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 90, No. 1, Feb. 1976, pp. 75-89.

〔10〕 ________, "Institutional Markets, Financial Marketing, and Financial Innovation", *The Journal of Finance*, Vol. XLV, No. 3, July 1989, pp. 541-556.

〔11〕 千保, 清水, 渡辺『金融先物・オプション時代の幕開け』有斐閣, 1989.