# 混雑現象と経済成長率に関するノート*

槇　太一

## 1 序　論

Barro [1990] は，Rebelo [1991] -Ak 型の内生的成長モデルに，税徴収によってファイナンスされる生産要素としての（フローの）公共サービスを導入し，経済の成長過程における公共支出の役割を分析している．経済成長率と税率との関係について，Barro の得た結論は，税率が生産に占める公共サービスのシェアに等しく設定されるとき，成長率が最大化されるというものである．また，Barro モデルの公共サービスを，ストックの公共資本に置き換えて分析をおこなった Futagami *et al.* [1993] は，Barro の結論が，経済の定常状態において同じく成立することを証明している[1]．

ところで，これらのモデルにおける公共サービスないし公共資本は，いわゆるサミュエルソンの公共財，あるいは「公的に供給された私的財（publicly-supplied private goods）」[2] といわれるものであり，混雑現象と経済成長率との

* 本稿は，1995年度理論計量経済学会西部部会（福岡大学）報告論文「社会的共通資本と経済成長」を大幅に書き直したものである．討論者である京都大学の柴田章久先生のコメントに感謝する．旧稿および関連稿に対して，同志社大学の河合宣孝，篠原総一，西村理，森一夫，中尾武雄，東京大学の高木保興，大阪府立大学の金子邦彦，立命館大学の二神孝一，ならびに中央大学の宇沢弘文の諸先生からは多くの貴重な助言を頂いた．記して感謝する．また同志社大学，大阪大学におけるセミナーの参加者から頂いたコメントも有益であった．しかしながら，これらのコメントが十分に生かされていない箇所も多い．この意味も含め，本稿に関する一切の責任は筆者に帰す．

1) Futagami *et al.* モデルには蓄積される資本が二つ存在するため，定常状態に至る移行過程（transitional path）が存在する．したがって，Futagami *et al.* モデルでは，Barro モデルと違い，成長率を最大にする税率と経済厚生を最大にする税率とは異なる．

2) サミュエルソンの公共財とは，供給されたものすべてが各経済主体によって使用されるものを指す．これに対して，「公的に供給された私的財」とは，各経済主体に割り当てられた財を指す．Negishi [1973] は，各経済主体への配分比率が固定的であるならば，「公的に供給された私↗

関係については，あらかじめ分析の枠外におかれている．しかしながら，公共財，あるいは社会的共通資本にとって，混雑の発生は日常的なものであり，この意味で，混雑の発生からその成長率に与える影響までを明示的に扱った理論モデルを定式化する必要があろう．

内生的成長モデルにおいて，公共財に関わる混雑現象を考慮したものには，例えば，Barro and Sala-i-Martin [1992], Glomm and Ravikumar [1994], Futagami and Mino [1995]，および Turnovsky [1996] がある．これらのモデルに共通している点は，公共財の供給条件との関連に限って混雑現象を表現している点である．すなわち，これらのモデルにおける混雑は，生産量，あるいは私的生産要素量（私的資本のストック量，労働雇用量）と公共財の供給量との比率によって測られているのである．

これに対し，宇沢 [1972]，[1990] は，社会的共通資本の使用に関する経済主体の裁量を重視し，各人が，社会的共通資本から派生するサービスの使用量を主体的に選択するようなモデルを提示している．したがって，宇沢モデルにおける混雑は，社会的共通資本のストック量と，経済全体でのサービス使用量との比率によって測られることになる．つまり，各々の経済主体が，それら社会的な生産要素の使用に積極的に関わった結果として，混雑現象を説明しようとしているのである．上で挙げた諸モデルが，私的生産要素（もしくは生産物）と社会的生産要素（公共財）の供給のバランスによって混雑現象を捉えているのに対し，サービス使用量という変数を媒介させることにより，それらの相互連関として混雑を捉えているという点は，宇沢モデルの大きな特徴であろう．

本稿の目的は，混雑現象に対する宇沢モデルのこの特徴を用いて Barro-Futagami *et al.* モデルを再定式化し，得られた結果が Barro-Futagami *et al.* のそれをどのように変更するのか検討することを通じて，混雑現象と成長率，

---

↘的財」は分析の際には形式的にサミュエルソンの公共財と同じものと考えてよいことを示している．Barro-Futagami *et al.* モデルでは，経済主体数が1であるため，どちらの概念を適用しても分析結果に違いは生まれない．以下では，両者を特に区別せず扱う．

および所得税率の関係を考察していくことにある.

以下，2節でモデルを定式化し，3節で私的主体による動学最適化問題を考察する．社会的共通資本サービスの総使用量，および社会的共通資本ストックの蓄積経路は，私的主体にとって所与とされる．前者は，宇沢 [1972]，[1990] の方法を踏襲するものであり，後者は，Futagami *et al.* [1993] の設定とパラレルである．4節では，サービス使用料金が，総サービス使用量の増加による社会的限界費用と等しい水準に設定されるとき，混雑の内部化，および短期成長率の最大化が達成されることを示す．5節では，経済の定常状態が，混雑の有無，およびサービス使用料金の使途の相違に関わらず一意的な鞍点になることを述べる（証明は数学補論でおこなう)．6節で，長期成長率を最大化する所得税率を導出する．徴収された使用料金の配分方法に依存して，長期成長率を最大化する税率は Barro-Futagami *et al.* のそれと異なりうる．7節は結論である.

## 2 モ デ ル

多数の無限期間生存する同質的な家計が，[0, 1] 区間に連続的に分布している経済を考える．家計 $i\in[0, 1]$ の目的は，次式で表される通時的効用の最大化である.

$$\int_0^\infty \frac{c_i^{1-\sigma}}{1-\sigma}\cdot e^{-\rho t}dt.$$

ただし，$c_i$ は家計 $i$ の時点 $t$ における消費，$\rho>0$, $\sigma>1$ はそれぞれ主観的割引率，異時点間の代替の弾力性の逆数である.

家計は消費者であると同時に生産者でもあるとしよう．生産技術を次の生産関数によって与える.

$$\begin{aligned} y_i &= f^i(k_i, x_i, V, X) \\ &= \theta\left(\frac{X}{V}\right)k_i^{1-\alpha}x_i^{\alpha}, \qquad \alpha\in(0, 1). \end{aligned}$$

ただし，$y_i$ は生産量，$k_i$ は私的資本のストック量，$x_i$ は社会的共通資本サービスの使用量である．$k_i$ と $x_i$ は個々の生産者が直接操作できる変数である．よって，これらをまとめて私的生産要素とよぶ．$V$ は社会的共通資本のストック量であり，経済の成員によって共同で蓄積されていく．$X$ は社会的共通資本の総使用量，すなわち，

$$X=\int_0^1 x_i di,$$

である．$V$ と $X$ をあわせて（あるいは，場合によってそれらを含む関数 $\theta$ を）社会的生産要素とよぶ．なぜなら，これらは個々の経済主体が直接操作できる変数ではなく，経済の成員すべての行動の結果，あるいは政策によって動く変数だからである．

関数 $\theta$ は次の形状を持つ．

$$\theta\left(\frac{X}{V}\right)=\left(1-\frac{X}{V}\right)^{\eta},\qquad \eta\in[0,\,1),$$

また，

$$\frac{d\theta}{d(X/V)}=-\eta\left(1-\frac{X}{V}\right)^{\eta-1}\leq 0,\qquad \frac{d^2\theta}{d(X/V)^2}=-\eta(1-\eta)\left(1-\frac{X}{V}\right)^{\eta-2}\leq 0,$$

である．ただし，$X/V\in[0,\,1]$ とする．つまり，$\theta$ の値は，社会的共通資本の使用率の上昇にともなって加速的に低下していくと仮定するのである[3]．

私的資本，および社会的共通資本の蓄積は次の方程式に従う．

$$\dot{k}_i=(1-\tau)y_i-c_i-px_i+\varphi_i,$$
$$\dot{V}=\tau Y+pX-\Phi.$$

ただし，$Y$ はすべての $y_i$ について集計したものである $(Y=\int_0^1 y_i di)$．$\tau\in[0,\,1]$ は所得税率，$p$ は社会的共通資本サービスの使用料金率を表す．$\varphi_i$ および $\Phi(=\int_0^1 \varphi_i di)$ は，徴収した使用料金の使途を決定する変数であり，$\varphi_i\in\{0,$

3)　この仮定は，宇沢［1972］，［1990］，Shinohara［1981］に依拠したものであるが，ここでの定式化は，それらよりも特定されている．$\theta$ の定式化に際する宇沢教授と篠原教授のご示唆に感謝する．

$px_i\}$, $\Phi\in\{0, pX\}$ という値をとる．$\varphi_i=\Phi=0$ のとき，徴収されたものはすべて社会的共通資本の蓄積に充てられ，$\varphi_i=px_i$, $\Phi=pX$ のときには，すべてが一括補助金として民間部門に返還される．第一式は私的経済主体の予算制約でもあり，消費，私的資本への投資，社会的共通資本サービス料金支払いといった支出が，税引後生産量に補助金を加えた収入によってファイナンスされることを表す．第二式は政府の予算制約をなし，フロー次元での均衡財政が仮定されている．二本の方程式は後の二つの項を除いては Futagami *et al.* モデルのそれと同じものと考えてよい．

社会的共通資本の蓄積にとって $pX$ は必要ないようにみえるが，この項がなければサービス使用量は無限大に発散してしまう．以下では，$p$ の値は $X/V\in[0, 1]$ と整合的な水準に設定されると仮定する[4]．簡単化のために，人口成長，資本減耗は共に無いものとし，両資本への投資に調整費用はかからないものとする[5]．さらに，主体数を単に1とする．したがって，$X=x=x_i$, $Y=y=y_i$, および $\Phi=\varphi=\varphi_i$ である．以後，添字 $i$ を省略する．

## 3 動学最適化問題

短期に所与である $V$ に対して，総サービス使用量 $X$ の増加は，$\theta$ の値を引き下げ私的資本の生産性を低下させる．逆に，$X$ を一定とすると，$V$ の蓄積は混雑を緩和し私的資本の生産性を上昇させる．したがって，私的資本の生産性に依存する投資量の決定も，これら相反する二つの効果に大きく左右される．本節で考察するのは，このように投資量の選択に対して重要な役割を果たす社会的生産要素の値，およびその時間経路を所与として行動する私的主体の動学最適化問題である．このような状況では，私的な経済主体の選ぶ投資量は，一

4) 4節で導入される効率的使用料金はこの条件を満たす．

5) 以下の分析では，社会的共通資本の帰属価格をゼロと仮定しているため，政策変数 $\tau$ および $p$ が所与である限り，この仮定が結論に重要な変更を加えるものではないことを記しておく．社会的共通資本の帰属価格が正の場合には，投資に調整費用がかかる，もしくは投資が不可逆的であるというような追加的な仮定を設けないと，瞬時に正または負の無限大の投資が可能になり，初期時点に資本比率がジャンプする．したがって，その場合，移行過程は存在しない．

般に最適とはならず，成長率も最大化されない．

以下の分析では，社会的生産要素の時間経路に加えて，所得税率 $\tau$，サービス使用料金率 $p$，および一括補助金 $\varphi$ の時間経路も所与であるとする．しばらくは，これらの変数の時間経路は政府によって任意の水準に設定されると仮定しておこう[6]．

問題を定式化すると次のようになる．

$$\max.\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}\cdot e^{-\rho t}dt,$$

$$\text{subject to}\quad \dot{k}=(1-\tau)\theta k^{1-\alpha}x^{\alpha}-c-px+\varphi,$$

$$\{\theta_t\}_{t=0}^{\infty}\ \text{and}\ \{\tau_t,\ p_t,\ \Phi_t\}_{t=0}^{\infty}\ \text{given},$$

$$\text{where}\quad \dot{V}=\tau\theta k^{1-\alpha}x^{\alpha}+pX-\Phi.$$

この問題に対するハミルトン関数を次のように定義する．

$$H(c,\ x,\ k,\ \lambda)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\lambda[(1-\tau)\theta k^{1-\alpha}x^{\alpha}-c-px+\varphi].$$

ただし，$\lambda$ は私的資本の帰属価格である．最大化のための一階の条件から，

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\sigma}[(1-\tau)(1-\alpha)\theta k^{-\alpha}x^{\alpha}-\rho], \tag{1}$$

$$p=\alpha(1-\tau)\theta k^{1-\alpha}x^{\alpha-1}, \tag{2}$$

を得る．(1)式の消費の成長率は，$\rho$, $\sigma$ と私的資本の限界生産性に依存している．私的資本の限界生産性は，それと補完的に生産に投入されるサービス使用量に影響を受けるが，これは(2)式で決定される．(2)式は，私的主体のサービス使用量が，その限界生産性と私的限界費用 $p$ とが等しくなるところで決定されるということを意味する．(2)式を(1)式に代入して，

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\sigma}[(1-\alpha)[(1-\tau)\theta]^{1/(1-\alpha)}(\alpha/p)^{\alpha/(1-\alpha)}-\rho], \tag{3}$$

6)　次節以降で，分権的経済における成長率最大化のための政策変数の値を導出していく．このような，効率的な政策を導くための二段階の手続きは，内生的成長理論の諸モデルに多くみられるものである．この手順の利点は，効率的政策を任意の政策からの乖離によって表現できることにある．Barro [1990]，および Turnovsky [1996] をみよ．

を得る．$\theta$ を所与とする私的主体の最適化から得られる成長率は，政策変数 $\tau$，および $p$ の関数である．$\tau$ と $p$ の時間経路は，しかしながら，政府が任意に設定するものであった．よって，それらは，一般には(3)式で与えられる成長率を最大にしていない．特に，社会的共通資本の総使用量は，短期に所与の $k$, $V$ に対して，$p$ の値に大きく依存する．つまり，任意の $p$ のもとでは，社会的共通資本の総使用率は効率的な水準にないと考えられるのである．次節で，まず，混雑を内部化する使用料金率を求める．混雑の内部化は，生産において唯一のフロー変数である $x=X$ を効率的な水準に導くことを意味するので，それと補完的に生産に投入される私的資本の生産性を最大にする．つまり，混雑の内部化は，同時に，短期成長率の最大化でもある．

## 4 効率的使用料金，混雑，成長率

(1)式を，$x=X$ が $p$ の関数であることに注意しながら，$p$ に関して微分することで，成長率，サービス使用量，および使用料金率の関係が得られる．

$$\frac{d(\dot{c}/c)}{dp}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1-\alpha}{k}\left[\eta(1-\tau)\left(1-\frac{X}{V}\right)^{\eta-1}k^{1-\alpha}x^{\alpha}V^{-1}-\alpha(1-\tau)\left(1-\frac{X}{V}\right)^{\eta}k^{1-\alpha}x^{\alpha-1}\right]\left(-\frac{dx}{dp}\right).$$

ただし，$X=x$, また(2)式より $dx/dp<0$ である．$[\cdot]$ の中の第一項は，$MSC=-\partial(1-\tau)y/\partial X$ で定義される，総サービス使用量増加1単位あたりの社会的限界費用である．第二項はサービス使用の私的限界生産性 $(\partial(1-\tau)y/\partial x)$ であり，これは，(2)式より，サービス使用料金 $p$ と等しい．よって，次の関係が得られる．

$$\frac{d(\dot{c}/c)}{dp}\gtreqless 0 \quad\Leftrightarrow\quad MSC\gtreqless p.$$

つまり，サービス使用料金 $p$ が社会的限界費用と等しい水準に設定されるとき，短期成長率は最大化されるのである．この料金付けの原理は，宇沢[1990]の「社会的費用による価格付けにかんする命題」と本質的に同じものである．

$p=MSC$ が成立しているとき，混雑度 $X/V$ は時間を通じて常に一定に保たれる．

$$\frac{X}{V}=\frac{\alpha}{\alpha+\eta}. \tag{4}$$

ただし，$\alpha/(\alpha+\eta)\in(0,1]$ は一定の効率的混雑度である．

（4）式を使うと条件 $p=MSC$ は次のように書くことができる．

$$\bar{p}=(1-\tau)(\alpha+\eta)A(V/k)^{-(1-\alpha)}, \tag{5}$$

$$\text{where } A=\alpha^{\alpha}\eta^{\eta}(\alpha+\eta)^{-(\alpha+\eta)}\in(0,1],$$

$$\text{with } A=1 \quad \text{when } \eta=0.$$

$\bar{p}$ を効率的使用料金率と呼ぼう．社会的限界費用は資本・資本比率 $V/k$ の単調減少関数である．したがって，効率的使用料金率 $\bar{p}$ も $V/k$ に関して単調減少である．すなわち，私的資本に対し，社会的共通資本が相対的に過剰ならば使用料金率は低下し，逆に過少ならば，上昇するのである．このことから，（5）式で定義される使用料金率は，社会的共通資本の相対的希少性を反映するものと考えることが出来る．

（4）式と（5）式を，消費，私的資本，および社会的共通資本の動学方程式に代入することにより，次の微分方程式群を得る．

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{V}{k}\right)^{\alpha}-\rho\right], \tag{6}$$

$$\frac{\dot{k}}{k}=(1-\tau)A\left(\frac{V}{k}\right)^{\alpha}-\frac{c}{k}-\left(\frac{\bar{p}x-\varphi}{k}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\dot{V}}{V}=\tau A\left(\frac{V}{k}\right)^{-(1-\alpha)}+\left(\frac{\bar{p}X-\Phi}{V}\right), \tag{8}$$

$$\text{where } \bar{p}x/k=(1-\tau)\alpha A(V/k)^{\alpha},\ \bar{p}X/V=(1-\tau)\alpha A(V/k)^{-(1-\alpha)}.$$

$\eta=0\,(A=1)$，かつ $\varphi=\bar{p}x=0$ のとき，この体系はコブ＝ダグラス型生産関数を用いた場合の Futagami *et al.* モデルのそれと等しい[7]．すなわち，その場合，

7)　$\eta=0$，かつ $\varphi=px=0$ のとき，生産関数は次のようになる．

$$y=(1-X/V)^{\eta}k^{1-\alpha}x^{\alpha}=[\eta/(\alpha+\eta)]^{\eta}[\alpha/(\alpha+\eta)]^{\alpha}k^{1-\alpha}V^{\alpha}$$
$$=Ak^{1-\alpha}V^{\alpha}$$

↗

混雑現象は存在せず，$V$ はサミュエルソンの意味での公共資本，あるいは「公的に供給された私的財」と解釈することが出来る．

$\eta \in (0, 1)$，かつ $\varphi = \bar{p}x$ のとき，上の方程式群は，Futagami *et al.* 体系の右辺第1項に $A$ を掛け合わせたものになる．$\alpha$ と $\eta$ に関する仮定より，$A$ は1以下の値をとるので，このケースにおける消費，および両資本の成長率は Futagami *et al.* モデルのそれを上回ることはない．

$\eta \in (0, 1)$，かつ $\varphi = 0$ のときには，上のケースに比べ，私的資本の蓄積率はさらに低くなるが，社会的共通資本の蓄積率は幾分引き上げられる．混雑を効率的な水準に誘導するために導入された使用料金が，より多くの資源を社会的共通資本に振り分けるからである[8]．

## 5 定 常 状 態

消費・資本比率 $\omega = c/k$，および資本・資本比率 $\chi = V/k$ を定義し，(6)-(8)式を次のように書き換える．

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -\left[(1-\tau) - \frac{\tau}{\chi}\right]A\chi^{\alpha} + \omega + \underbrace{(1+\chi)(1-\tau)\alpha A\chi^{-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi = \bar{p}x},$$
$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{1}{\sigma}(1-\tau)(\sigma+\sigma-1)A\chi^{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} + \omega \underbrace{+(1-\tau)\alpha A}_{\text{disappears when } \varphi = \bar{p}x}\chi^{\alpha}. \qquad (9)$$

これらは，$\chi$, $\omega$ を変数とする連立微分方程式体系をなす．生産関数がすべての生産要素に関して収穫一定なので，定常状態において，すべての変数は同じ

---

$= k^{1-\alpha}V^{\alpha}, \qquad \text{where } \eta = 0.$

ただし，混雑度については，割当などによって，すでに効率的な水準に誘導されているとしている．これは，いまのモデルの極限のケースであると同時に，コブ＝ダグラス型生産関数を用いた場合の Futagami *et al.* モデルの生産関数でもある．

8) 各方程式の成長率は，社会的生産要素の生産に与える影響（$\eta$ の値）が大きいほど小さくなる．

$$\partial(\dot{c}/c)/\partial\eta = (\dot{c}/c + \rho/\sigma)\{\ln\eta - \ln(\alpha+\eta)\} < 0,$$
$$\partial(\dot{k}/k)/\partial\eta = (\dot{k}/k + c/k)\{\ln\eta - \ln(\alpha+\eta)\} < 0,$$
$$\partial(\dot{V}/V)/\partial\eta = (\dot{V}/V\{\ln\eta - \ln(\alpha+\eta)\} < 0.$$

この特徴は，$\varphi$ の値に関わらず認められる．つまり，徴収された料金の使途に関わらず，混雑現象の存在そのものが，成長率にとって負の効果をもたらすのである．

一定率で成長していく．なお，両式の右辺最終項は，$\varphi=\bar{p}x$ のときには現れない．

(9)式の右辺をゼロとおいて，

$$\omega^*=\left[(1-\tau)-\frac{\tau}{\chi^*}\right]A\chi^{*\alpha}-\underbrace{(1+\chi)(1-\tau)\alpha A\chi^{*-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x},$$

$$\omega^*=\frac{1}{\sigma}(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\chi^{*\alpha}+\frac{\rho}{\sigma}-\underbrace{(1-\tau)\alpha A\chi^{*\alpha}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}, \tag{10}$$

を得る．体系(9)の定常状態は(10)の両式の交点 $\chi^*>0$, $\omega^*>0$ で表される．証明は数学補論に譲るが，この体系の定常状態は，各々の $\eta$, $\varphi$ に対して一意かつ鞍点となる．

## 6　所得税率と長期成長率

本稿で，Futagami *et al.* の体系に新たに付け加えられた要素は，混雑を内部化するために導入されたサービス使用料金である．次に，この使用料金が課された場合の，長期成長率を最大にする所得税率を求め，これと Barro-Futagami *et al.* の結果とを比べてみよう．なお，Barro-Futagami *et al.* の結果とは，長期成長率を最大にするためには，所得税率を，公共サービス（公共資本）の生産に占めるシェアと等しい水準に設定しなければならないというものである．

所得税率の上昇は，三つの経路を通じて定常成長率に影響を与える．第一に，$\tau$ の上昇は，民間部門の可処分所得を減少させ，この結果，私的資本への投資を減退させる．第二に，$\tau$ の上昇は，公共部門の収入を増加させることを通じて，社会的共通資本への投資を増大させる．効率的混雑度は定数で表されるので，サービス使用量は上昇し，これと補完的に生産に投入される私的資本の生産性の上昇を促す．第三に，$\tau$ の上昇は，社会的限界費用，したがって効率的使用料金を低下させる．この経路は，両部門への資源配分を変更することによって，私的資本への投資を引き上げ，社会的共通資本へのそれを引き下げる．すなわち，この効果は，第一・第二の効果を緩和する方向に働く．

$\varphi = \bar{p}x$ のケースでは第三の効果は消失する．この場合，所得税率の変化が体系に与える影響は Futagami *et al.* モデルのそれと本質的に同じものになる．したがって，$\tau=\alpha$ が長期成長率最大化のための条件である．これに対して，$\varphi=0$ のケースでは第三の効果は依然として残っている．よって以下では，このケースを中心に，所得税率の変化が長期成長率に与える効果を検討していく．

$\varphi=0$ の場合，(8)式より，定常成長率 $\gamma$ は次のように表される．

$$\gamma=[\tau+(1-\tau)\alpha]A[\chi^*(\tau)]^{-(1-\alpha)}.$$

$\gamma$ は，定常状態で正の一定値をとり続ける．これを，$\tau$ で微分することにより次式を得る．

$$\frac{d\gamma}{d\tau}=\left[1-(1-\alpha)\frac{\tau}{\chi^*}\cdot\frac{d\chi^*}{d\tau}\right]A\chi^{*-(1-\alpha)} \\ \underbrace{-\left[\frac{\tau}{1-\tau}+(1-\alpha)\frac{\tau}{\chi^*}\cdot\frac{d\chi^*}{d\tau}\right]\frac{\alpha(1-\tau)}{\tau}A\chi^{*-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}. \qquad (11)$$

$\varphi=\bar{p}x$ の場合，右辺第二項は現れない．$A$ が定数なので，その場合，Futagami *et al.* と同様の結果が得られると推察できる．

長期成長率を最大化する税率を得るためには，$\chi^*$ の $\tau$ に関する弾力性の値を知る必要がある．このために，$\varphi=0$ のケースについて，体系(10)を $\chi^*$ と $\tau$ に関して微分し，

$$\frac{d\chi^*}{d\tau}=-\frac{\chi^*\omega^*}{\det. \mathrm{J}}\cdot\left[\frac{1}{\sigma}(1-\alpha)A\chi^{*\alpha}+A\chi^{*-(1-\alpha)}\underbrace{-\alpha A\chi^{*-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}\right],$$

を求める．det. J は，微分方程式体系(9)を，定常状態の近傍で線形化したときに得られる係数行列の行列式であり，

$$\det. \mathrm{J}=-\chi^*\omega^*(1-\alpha)A\left[\tau\chi^{*-(2-\alpha)}+(1/\sigma)\alpha(1-\tau)\chi^{*-(1-\alpha)}+\underbrace{\alpha(1-\tau)\chi^{*-(2-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}\right]<0,$$

で与えられる．$d\chi^*/d\tau$ を(11)式にすると，

$$\frac{d\chi^*}{d\tau}=\frac{(1/\sigma)A\chi^{*\alpha}[\alpha-\tau]+\overbrace{\alpha A\chi^{*-(1-\alpha)}}^{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}-\overbrace{\alpha\{(1/\sigma)(1-\tau)A\chi^{*\alpha}+A\chi^{*-(1-\alpha)}\}}^{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}}{\tau+(1/\sigma)\alpha(1-\tau)\chi^*+\underbrace{\alpha(1-\tau)}_{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}},$$

となる．これをゼロとおくと，$\tau(1-\alpha)=0$ となる．$\alpha\in(0,1)$ なので，等号が成立するためには,

$$\tau=0,$$

でなければならない．すなわち，サービス使用に対して効率的料金を課し，これを社会的共通資本の蓄積に充てるならば，長期成長率を最大化するために，所得税は不要なのである．換言すれば，各時点で所与の $k$, $V$ に対して設定された効率的使用料金率 $\bar{p}$ が，社会的共通資本の使用に対して課されるならば，長期成長率も最大化されているのである．したがって，政府のなすべきは，短期成長率の最大化，もしくは混雑度を(4)式で与えられる水準に誘導することになる．なお，$\varphi=\bar{p}x$ ならば，すなわち，使用料金を徴収と同時に一括補助金として私的主体に返還するならば，料金徴収の効果は消え去り，$\tau=\alpha$ が長期成長率最大化のための条件となることが確認できる．

## 7　結　　論

われわれは，混雑現象を明示的に導入した Barro-Futagami *et al.* 型の内生的成長モデルを定式化し，混雑と成長率の関係，および成長率を最大にするための政策について検討してきた．これまでの分析で得られた結論をまとめると次のようになる．第一の結論は，混雑の内部化と短期成長率の最大化に関するものである．両者を実現するためには，社会的共通資本サービスの使用料金率を，社会的限界費用と等しい水準に設定しなければならない．これは，宇沢[1972]，[1990] において得られた，混雑を内部化し，生産量を最大化するための条件と本質的に同じものである．第二の結論は，長期成長率を最大化するための所得税率の決定に関するものである．徴収されたサービス使用料金が,

一括補助金の形で民間部門に返還される場合，税率決定のルールは Barro-Futagami *et al.* のそれと同じものになる．これに対し，それが社会的共通資本の蓄積に充てられるなら，長期成長率を最大にする手段として，所得税は不要になる．

最後に，本稿の分析の問題点について触れたい．Barro-Futagami *et al.* モデル，とりわけ私的経済主体の最適化問題のみに関心が絞られている Futagami *et al.* モデルとの比較という分析の目的上，われわれのモデルでは，私的主体の最適化行動において，混雑と社会的共通資本の蓄積という二つの外部性が折り込まれていない．真に最適な混雑度と成長率を達成するための政策を導出するには，これらの外部性を最初から内部化することの出来る仮想的な計画者の存在を仮定し，そこで得られた結論と，上の分析の結論とを比較する必要がある．このことは，特に最適政策の導出という観点からは重大な問題であり，この点で，本稿の分析は不完全なものといわざるを得ない．

数学補論（定常状態の分析）

動学体系(9)を，次のように書き換える．

$$
\begin{aligned}
\dot{\chi} &= \Big[-[(1-\tau)-\tau/\chi]A\chi^{\alpha}+\underbrace{(1+\chi)(1-\tau)\alpha A\chi^{-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}+\omega\Big]\chi, \\
\dot{\omega} &= \Big[-(1/\sigma)(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\chi^{\alpha}-\rho/\sigma+\underbrace{(1-\tau)\alpha A\chi^{\alpha}}_{\text{disappears when } \varphi=\bar{p}x}+\omega\Big]\omega.
\end{aligned}
\qquad \text{(a-1)}
$$

(a-1)式は，$\eta(A)$，$\varphi$ および $\tau$ に関して特に値を定めない一般的なケースである．各々の値を特定することで，以下の諸論は，上で考察してきた三つのケースすべてについて適用可能である．特に，6節で得られた，$\varphi=0$ のときの成長率最大化のための税率 $\tau=0$ については，単にその値を(a-1)式に代入すればよい．

(a-1)式の右辺をゼロとおいた次の体系のなかで，$\chi^*>0$，$\omega^*>0$ を満たす定常状態の存在を調べる．

$$\omega^*=\left[(1-\tau)-\frac{\tau}{\chi^*}\right]A\chi^{*\alpha}-\underbrace{(1+\chi^*)(1-\tau)\alpha A\chi^{*-(1-\alpha)}}_{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x},$$

$$\omega^*=\frac{1}{\sigma}(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\chi^{*\alpha}+\frac{\rho}{\sigma}-\underbrace{(1-\tau)\alpha A\chi^{*\alpha}}_{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}.^{9)} \tag{a-2}$$

第二式から第一式を引くことにより関数 $\Delta$：

$$\Delta(\chi^*)=\left[\frac{\tau+\overbrace{(1-\tau)\alpha}^{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}}{\chi^*}-\frac{(1-\tau)(1-\alpha)}{\sigma}\right]\cdot A\chi^{*\alpha}+\frac{\rho}{\sigma}, \tag{a-3}$$

を定義する．$\Delta(x^*)=0$ が定常状態である．この式は $\chi^*\to 0$ のとき無限大に近づき，$\chi^*\to\infty$ のとき負の無限大に近づく．したがって，$\chi^*>0$ を満たす均衡は存在する．(a-3) を $\chi^*$ で微分すると，

$$-\tau(1-\alpha)A\chi^{*-(2-\alpha)}-\frac{1}{\sigma}\alpha(1-\tau)(1-\alpha)A\chi^{*-(1-\alpha)}$$
$$\underbrace{-\alpha(1-\tau)(1-\alpha)A\chi^{*-(2-\alpha)}}_{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}x}<0, \tag{a-4}$$

となり，$\Delta$ が $\chi^*$ に関して単調減少であることが分かる．したがって，$\chi^*>0$ を満たす均衡は一意である．これらの結果は，$\eta$ および $\varphi$ の値に依存しない．

(a-4) 式が負なので，(a-2) の第一式がゼロの時，(a-3) 式が正の値をとるなら，$\omega^*>0$ となる唯一の均衡が存在する．つまり，$\varphi=0$ のときには，

$$\Delta\left(\frac{\tau+(1-\tau)\alpha}{(1-\tau)(1-\alpha)}\right)=\frac{1}{\sigma}(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\bar{\chi}^{*\alpha}+\frac{\rho}{\sigma}-(1-\tau)\alpha A\bar{\chi}^{*\alpha}$$

が，$\varphi=\bar{p}x$ のときには，

---

9) 混雑の存在する二つのケースについて，それぞれの定常状態の体系を書くと，

$$\begin{cases}\omega^*=[(1-\tau)-\tau/\chi^*]A\chi^{*\alpha},\\ \omega^*=(1/\sigma)(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\chi^{*\alpha}+\rho/\sigma,\end{cases}\quad(\varphi=\bar{p}x,\ \tau=\alpha),$$

$$\begin{cases}\omega^*=[(1-\alpha)-\alpha/\chi^*]A\chi^{*\alpha},\\ \omega^*=(1/\sigma)(1-\alpha)(\sigma-1)A\chi^{*\alpha}+\rho/\sigma,\end{cases}\quad(\varphi=0,\ \tau=0).$$

となる．政府が成長率の最大化を目的とする場合，税率は $\varphi=\bar{p}x$ のとき $\tau=\alpha$ に設定されるので，両体系の違いは $\dot{\omega}/\omega=0$（第二式）の位置だけである．$\alpha>0$ なので，前者の第二式は後者のそれの上方に位置する．すなわち，以下で与えられる (a-3) 式の性質より，両式の交点で表される定常状態では，前者の $\chi^*$, $\omega^*$ が後者のそれらを必ず上回る．

$$\Delta\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)=\frac{1}{\sigma}(1-\tau)(\sigma+\alpha-1)A\tilde{\chi}^{*\alpha}+\frac{\rho}{\sigma}$$

が正であるなら，$\chi^*>0$, $\omega^*>0$ となる唯一の均衡が存在する．ただし，$\bar{\chi}^*$, $\tilde{\chi}^*$ はそれぞれ，$\chi^*=[\tau+(1-\tau)\alpha]/(1-\tau)(1-\alpha)$, $\chi^*=\tau/(1-\tau)$ に対応する．$\sigma>1$ を仮定したので，どちらのケースについても，均衡が存在するための条件は満たされている．また，後者のケースで $\eta=0\,(A=1)$ とおいたものはサミュエルソンのケースに対応するが，以上の結果に $A$ の値が本質的な役割を果たしていないことが確認できる．

次に，動学体系(9)の安定性を調べる．(a-1)式を，定常状態の近傍で線形化すると，その係数行列は，

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix}(1-\alpha)\omega^*-(1-\alpha)(1-\tau)A\chi^{*\alpha} & \chi^* \\ -\alpha(\omega^*/\chi^*)(\omega^*-\rho/\sigma) & \omega^*\end{bmatrix},$$

となる．この行列式は次のような値をとる．

$$\det.\ \mathrm{J}=-\chi^*\omega^*(1-\alpha)A\left[\tau\chi^{*-(2-\alpha)}+(1/\sigma)\alpha(1-\tau)\chi^{*-(1-\alpha)}+\underbrace{\alpha(1-\tau)\chi^{*-(2-\alpha)}}_{\text{disappears when }\varphi=\bar{p}\,x}\right]<0.$$

したがって，定常状態は鞍点である．行列式の符号条件は，$\eta$ および $\varphi$ の値に依存しない．

## 参考文献


Barro, R. J. [1990], Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy*, 98, 103-125

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin [1992], Public Finance in Models of Economic Growth, *Review of Economic Studies*, 59, 645-661

Futagami, K. and K. Mino [1995], Public Capital and Patterns of Growth in the Presence of Threshold Externalities, *Journal of Economics*, 61, 123-146

Futagami, K., Y. Morita and A. Shibata [1993], Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital, *Scandinavian Journal of Economics*, 95, 607-625

Glomm, G. and B. Ravikumar [1994], Public Investment in Infrastructure in a Simple Growth Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 1173-1187

Negishi, T. [1973], The Excess of Public Expenditure on Industries, *Journal of Public Economics*, 2, 231-240

Rebelo, S. [1991], Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, 99, 500-521

Shinohara, S. [1981], Money and Growth with Public Capital, *The Doshisha University Economic Review*, 30, 1-20

Turnovsky, S. J. [1996], Optimal Tax, Debt, and Expenditure Policies in a Growing Economy, *Journal of Public Economics*, 60, 21-44

宇沢弘文 [1972],「社会共通資本の理論的分析(1), (2)」,『経済学論集』(東京大学), 第38巻第1号, 2-16ページ；同第3号, 14-27ページ

宇沢弘文 [1990],「社会的共通資本の理論」, 宇沢弘文著『経済解析』岩波書店, 第34章, 561-599ページ