【論　説】

人的資本の最適生産*

西　村　　理

I　序　　論

Ben-Porath〔3〕は人的資本の生産函数という概念を導入して，人的資本理論を neo-classical の枠組みの中で展開していく分析手法を提供した．Ben-Porath の仮定は，基本的には以下にかかげる5つである[1]．

(i)　個人の選好計画は，ライフ・サイクルにおける消費の最適配分であり，レジャーの選択は無視する．

(ii)　個人は各時点で人的資本の生産活動 h_t と所得収入を得る労働活動 $(1-h_t)$ とに時間を配分する．

(iii)　人的資本ストック S は，すべての個人にとって同質財であり，一定率 δ で資本減価する．

(iv)　人的資本ストックそれ自体，個人の効用函数の変数ではない．

(v)　金融市場は完全競争市場で，利子率 r は一定である．

仮定（i），（ii），（iv）および（v）によってライフ・サイクルにおける個人の最適消費計画と人的資本の最適生産計画とは分離可能となる[2]．Ben-Porath は最適生産計画の問題を解くことにより，年齢プロフィールからくる所得収入

＊　本稿の作成にあたり，同志社大学近代経済学研究会のメンバーより多大のコメントをいただいた．ここに記して感謝する．もちろん，ありうべき誤りは，私自身に帰せられる．この研究に対して財団法人・京信育英会より研究奨励金をうけたことを記して感謝する．

1)　Ben-Porath〔3〕, p. 353.

2)　分離可能性については，O. Nishimura〔6〕, Ch. 3 で示してある．

3)　最適な所得流列が決定された後の最適消費計画については，Arrow & Kurz〔1〕, Yaari〔8〕, Nishimura〔6〕を参照せよ．

の形状を考察している[3].

本稿では次の2点を仮定する. (1) Ben-Porath が想定した Cobb-Douglas 型生産函数の替りに一般的な生産函数を想定する. (2) Ben-Porath モデルでは一定率で人的資本が減価していく. この仮定は, 従来の経済成長論で使われた減価償却と同次元の発想である. 人的資本ストックの増大は, 教育や訓練, さらには健康・栄養等の概念で人的資本を定義する限り, 量的な増加ではなく, むしろ質的向上・発展を意味すべきである[4]. この点で物的資本との差異があり, 人的資本の増加はその資質が自己内在化され, 質的転化をもたらすことになる. したがって人的資本ストックの減価は, 人的資本の増大につれて減少していくのが妥当だと思われる.

次節以後, 人的資本の生産函数を一般形へ拡張し, 同時に人的資本の減価函数を減少函数に変えて Ben-Porath モデルとの比較検討をすすめていく. 第II節ではライフ・サイクル モデルを提示し, 第III節で人的資本の最適生産径路を描きだす. Ben-Porath モデルの結果との比較を第IV節で検討し, 最後の節は補論として, 数学的証明が付記してある.

II ライフ・サイクル モデル

個人は計画決定時点 $t=0$ で労働市場に参入できる人的資本 S_0 ($S_0 \geqq \underline{S}$, $\underline{S}$ は労働市場へ参入可能なミニマム・レベルで $\underline{S}>0$) を保有し, $t=R$ で退職すると仮定する. このR期間中に個人は労働活動ならびに人的資本の生産活動の一方にあるいは両方に従事する.

<u>労働活動</u>

労働市場では, 個人は人的資本から生じるサーヴィスを供給し, その対価に人的資本ストック 1単位当り w (賃金率で所与と仮定) の価値額が支払われる. 人的資本 S_t を備えた個人の最大所得収入額は wS_t であるが, 人的資本の一部のみが労働活動に振り向けられたときの賃金粗収入 $\hat{E}_t$ は

4) 人的資本生産函数の詳細については, Ben-Porath [3], p. 359 をみよ.

（1）　$\hat{E}_t = w(1-h_t)S_t$

となり，最大所得収入額より少なくなる[5]．

生産活動

人的資本の生産には，インプットとして人的資本ストックそれ自身と購入しうる物的財 D_t（例えば，教授サーヴィス，書籍，研究施設，食料等）とが必要とされる．人的資本の生産函数 Q_t とその仮定が（2）である．

（2）　$Q_t = f(h_t S_t, D_t)$

$f(\cdot)$ は強い凹函数で h, S, D に関して2回連続微分可能[6]．

$f(0, D) = f(hS, 0) = 0$,　$f_{KD} > 0$,

$f_K(0, D) < +\infty$,　$f_D(hS, 0) < +\infty$

ただし，$K = hS$

人的資本の減価函数 δ_t は

（3）　$\delta_t = \delta(S_t)$

$\delta' < 0$, $\delta'' > 0$, $\delta'(\underline{S}) = -\infty$, $\delta'(\infty) = 0$

となる．それゆえ，人的資本の変動は次の動学方程式で与えられる．

（4）　$\dot{S} = Q_t - \delta(S_t)$

消費ならびに生産計画の分離可能性により，個人の生産計画はR期間にわたって実現する賃金純収入 $E_t = \hat{E}_t - p_d D_t$ の総額を利子率 r で割引いた現在価値を最大にすることである[7]．ここで p_d は物的財 D_t 1単位を購入する価格で，所与と仮定する．この個人の最適生産計画は，数学的に公式化すれば，初期条件 S_0, 期末条件 $S_T \geqq \underline{S}$ および $0 \leqq h_t \leqq 1$ の制約下で（4）にしたがって

$$W = \int_0^R \{w(1-h_t)S_t - p_d D_t\} e^{-rt} dt$$

を最大にする人的資本ストックのプログラムを見出すことにある．そこで，この問題を「最大値原理」で解くためにハミルトン函数 H を

5) Ben-Porath は最大所得収入額を earning capacity, 賃金粗収入を observed earnings と呼称している．

6) 補論1で $f(\cdot)$ が強い凹函数となる条件が示してある．

7) 賃金純収入を Ben-Porath は disposable earnings と呼称している．

$$H=\{w(1-h)S-p_dD\}e^{-rt}+\lambda\{f(hS,\ D)-\delta(S)\}$$

と定義する．ただし，λ は補助変数とする．h に関する制約条件を考慮すれば，ラグランジュ函数 L を

$$L=H(S,\ h,\ D,\ \lambda)+\pi_1 h+\pi_2(1-h)$$

(π_1, π_2 はラグランジュ乗数)

と定義すれば，必要条件は以下のようになる．

(5) $\pi_1\geq 0,\quad h\geq 0,\quad \pi_1 h=0$

(6) $\pi_2\geq 0,\quad 1\geq h,\quad \pi_2(1-h)=0$

(7) $\dfrac{\partial L}{\partial h}=-wSe^{-rt}+\lambda Sf_K+\pi_1-\pi_2=0$

(8) $\dfrac{\partial L}{\partial D}=-p_d e^{-rt}+\lambda f_D=0$

(9) $\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial L}{\partial S}=-w(1-h)e^{-rt}-\lambda(hf_K-\delta')$

(10) $\dot{S}=f(hS,\ D)-\delta(S)$

(11) 横断性の条件は

$\lambda(R)[S(R)-\underline{S}]=0$

ここで $q_t=\lambda_t e^{rt}$ とおけば，q_t は各時点での人的資本生産 Q_t 1単位の「影の価格」となり，人的資本投資に対する「需要価格」でもある．

生産函数 $f(\cdot)$ ならびに人的資本の減価函数 $\delta(\cdot)$ の仮定より，$H(\cdot)$ は S, h, D に関して凹函数となる．したがって，必要条件（5）～（11）は十分条件でもある[8]．この必要かつ十分条件は，t を所与とすれば制御変数 h, D は，状態変数 S と補助変数 q との函数になるから，3つの Phase に分類することができる．

Phase I (full-time schooling)

$\pi_1=0,\quad \pi_2>0 \longrightarrow h=1$ のケース

$S(w-qf_K(S,\ D))<0,\quad p_d-qf_D(S,\ D)=0$

8) 補論2参照．

<u>Phase II</u>　(part-time schooling, part-time job)

$$\pi_1=0,\quad \pi_2=0 \longrightarrow 0\leqq h\leqq 1 \text{ のケース}$$

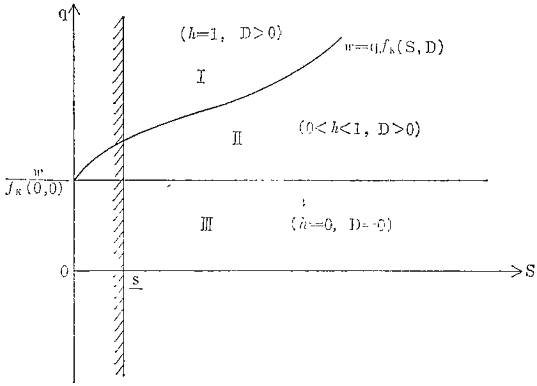
$$S(w-qf_K(hS,\ D))=0,\quad p_d-qf_D(hS,\ D)=0$$

<u>Phase III</u>　(full-time job)

$$\pi_1>0,\quad \pi_2=0 \longrightarrow h=0 \text{ のケース}$$

$$S(w-qf_K(0,\ 0))>0,\quad p_d-qf_D(0,\ 0)\geqq 0^{9)}$$

これら３つの Phase を (S, q) 平面に描いたのが第１図である[10]．



第　1　図

9)　人的資本の生産にはＳとＤのインプットが同時に必要とされるゆえ，S=0 の場合には最適なＤのインプットは零となる．数学的には D≧0 の制約条件が付随しているので $\frac{\partial L}{\partial D}\leqq 0$, $D\cdot\frac{\partial L}{\partial D}=0$ が必要条件となり，Phase I, II では $D>0$, $\frac{\partial L}{\partial D}=0$；Phase III で $D=0$, $\frac{\partial L}{\partial D}\leqq 0$ となる．

10)　Phase I と II とは，$w=qf_K(S,\ D)$ ならびに $p_d=qf_D(S,\ D)$ の境界線によって分断される．第２式を S, q に関して偏微分すれば

$$0=qf_{KD}+qf_{DD}\frac{\partial D}{\partial S} \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial S}=-\frac{f_{DK}}{f_{DD}}>0$$

$$0=f_D+qf_{DD}\frac{\partial D}{\partial q} \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial q}=-\frac{f_D}{qf_{DD}}>0$$

第１式を全微分して上式の不等式を代入すれば，右上りの境界線の傾きを得る．

$$0=f_K dq+qf_{KK}dS+qf_{KD}\left(\frac{\partial D}{\partial S}dS+\frac{\partial D}{\partial q}dq\right)$$

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_B=\frac{-q(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}^2)}{f_K f_{DD}-f_D f_{KD}}>0 \quad \text{（補論１の (A-2) より）}$$

次に t を動かせば，各 Phase での必要十分条件は

Phase I

(12) $\dot{S}=f(S, D)-\delta(S)$

(13) $\dot{q}=-q(f_K(S, D)-\delta'(S)-r)$

Phase II

(14) $\dot{S}=f(hS, D)-\delta(S)$

(15) $\dot{q}=-w(1-h)-q(hf_K(hS, D)-\delta'(S)-r)$

$=-w+q(\delta'(S)+r)$

ただし，$w=qf_K(hS, D)$

Phase III

(16) $\dot{S}=-\delta(S)$

(17) $\dot{q}=-w+q(\delta'(S)+r)$

横断性の条件は

(11)′ $q(R)e^{-rR}[S(R)-\underline{S}]=0$

となる．

III 人的資本の最適生産径路

横断性の条件 (11)′ を満たす最適生産径路を導くために，まず最初に $\dot{S}=0$ ならびに $\dot{q}=0$ の曲線を求めてみる．

Phase I における $\dot{S}=0$ の曲線は，(12) より

$f(S, D)=\delta(S)$ ただし，$p_d=qf_D(S, D)$

である．この曲線の傾きは

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{S}=0}<0 \qquad \text{(Phase I)}$$

となる[11]．

次に Phase II における $\dot{S}=0$ の曲線は，(14) より

$f(hS, D)=\delta(S)$

11) 補論3参照．

ただし，$w=\mathrm{q}f_{\mathrm{K}}(h\mathrm{S},\ \mathrm{D})$，　$\mathrm{p}_d=\mathrm{q}f_{\mathrm{D}}(h\mathrm{S},\ \mathrm{D})$

である．この曲線の傾きは

$$\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\dot{\mathrm{S}}=0}<0 \qquad \text{(Phase II)}$$

となる[12]．Phase III では $\dot{\mathrm{S}}=-\delta(\mathrm{S})<0$ だから $\dot{\mathrm{S}}=0$ の曲線は存在しない．

Phase I, II の曲線 $\dot{\mathrm{S}}=0$ を q で偏微分すれば，補論 3 の (A-7) より

$$\frac{\partial\dot{\mathrm{S}}}{\partial\mathrm{q}}=f_{\mathrm{D}}\frac{\partial\mathrm{D}}{\partial\mathrm{q}}=-\frac{f_{\mathrm{D}}^2}{\mathrm{q}f_{\mathrm{DD}}}>0 \qquad \text{(Phase I)}$$

$$\frac{\partial\dot{\mathrm{S}}}{\partial\mathrm{q}}=\mathrm{S}f_{\mathrm{K}}\frac{\partial h}{\partial\mathrm{q}}+f_{\mathrm{D}}\frac{\partial\mathrm{D}}{\partial\mathrm{q}}=\frac{2f_{\mathrm{K}}f_{\mathrm{D}}f_{\mathrm{KD}}-f_{\mathrm{K}}^2f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{D}}^2f_{\mathrm{KK}}}{\mathrm{q}(f_{\mathrm{KK}}f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{KD}}^2)}>0 \qquad \text{(Phase II)}$$

となるから，曲線 $\dot{\mathrm{S}}=0$ の上側は $\dot{\mathrm{S}}>0$，下側は $\dot{\mathrm{S}}<0$ となる．

続いて曲線 $\dot{\mathrm{q}}=0$ の傾きを求める前に，$\tilde{\mathrm{S}}$ を $\delta'(\tilde{\mathrm{S}})=r$ と定義する．したがって，$\delta'(\mathrm{S})<0$ より

$$\delta'(\mathrm{S})+r<0 \qquad (\underline{\mathrm{S}}\leqq\mathrm{S}<\tilde{\mathrm{S}})$$

$$\delta'(\mathrm{S})+r\geqq0 \qquad (\tilde{\mathrm{S}}\leqq\mathrm{S})$$

となる．まず最初に Phase I における $\dot{\mathrm{q}}=0$ の曲線は，(13) より $\underline{\mathrm{S}}\leqq\mathrm{S}\leqq\tilde{\mathrm{S}}$ のとき $f_{\mathrm{K}}-\delta'(\mathrm{S})-r>0$ だから $\dot{\mathrm{q}}<0$ となり，存在しない．$\tilde{\mathrm{S}}<\mathrm{S}$ のときには

$$f_{\mathrm{K}}(\mathrm{S},\ \mathrm{D})=\delta'(\mathrm{S})+r \qquad \text{ただし，} \quad \mathrm{p}_d=\mathrm{q}f_{\mathrm{D}}(\mathrm{S},\ \mathrm{D})$$

となる．この曲線は正の傾きをもち，Phase I と II との境界線の傾きより大きくなる[13]．

$$\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\dot{\mathrm{q}}=0}>0\ ; \qquad \left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\dot{\mathrm{q}}=0}>\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\mathrm{B}} \qquad \text{(Phase I)}$$

12)　補論 3 参照．

13)　$\dot{\mathrm{q}}=0$ の傾きに関しては，補論 4 参照．補論 4 より，Phase I における $\dot{\mathrm{q}}=0$ の傾きは

$$\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\dot{\mathrm{q}}=0}=\frac{-\mathrm{q}}{f_{\mathrm{D}}f_{\mathrm{KD}}}\left[\delta''f_{\mathrm{DD}}-(f_{\mathrm{K}}f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{KD}}^2)\right]>0$$

だから，注 9) で求めた境界線の傾きと比較すれば

$$\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\dot{\mathrm{q}}=0}-\left.\frac{d\mathrm{q}}{d\mathrm{S}}\right|_{\mathrm{B}}$$

$$=\frac{-\mathrm{q}\delta''f_{\mathrm{DD}}}{f_{\mathrm{D}}f_{\mathrm{KD}}}+\frac{\mathrm{q}f_{\mathrm{K}}f_{\mathrm{DD}}(f_{\mathrm{KK}}f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{KD}}^2)}{f_{\mathrm{D}}f_{\mathrm{KD}}(f_{\mathrm{K}}f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{D}}f_{\mathrm{KD}})}>0$$

となる．

Phase II における $\dot{q}=0$ の曲線は，(15) より Phase I と同様に $\underset{\sim}{S}\leqq S\leqq\tilde{S}$ のとき $q>0$, $\delta'(S)+r\leqq 0$ だから $\dot{q}<0$ となり，存在しない．$\tilde{S}<S$ のときには

$$w=q(\delta'(S)+r)$$

ただし，$w=qf_K(hS,\ D)$，$p_d=qf_D(hS,\ D)$

となり，この曲線は負の傾きをもつ[14]．

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{q}=0}<0 \qquad \text{(Phase II)}$$

Phase III の $\dot{q}$ 曲線は (17) 式で表わされ，$q>0$ のときは Phase II の $\dot{q}$ 曲線と同一であるから，$\tilde{S}<S$ の領域では Phase II と同じ議論が成立する．S が大きくなれば

$$\lim_{S\to\infty} q=\lim_{S\to\infty}\frac{w}{\delta'(S)+r}=\frac{w}{r}$$

となり，$r>f_K(0,\ 0)$ ならば，曲線 $\dot{q}=0$ は Phase III の領域内で $q=w/r$ に収斂し，$r<f_K(0,\ 0)$ ならば，曲線 $\dot{q}=0$ は Phase II の領域内で $q=w/r$ に収斂していく．$q<0$ のときは $\underset{\sim}{S}\leqq S<\tilde{S}$ の領域でも曲線 $\dot{q}=0$ は存在し，その傾きは，$\tilde{S}<S$ の場合と同様に負となる[15]．

各 Phase の曲線 $\dot{q}=0$ を S で偏微分すれば

$$\frac{\partial\dot{q}}{\partial S}=-q(f_{KK}-\delta'')>0 \qquad \text{(Phase I)}$$

$$\frac{\partial\dot{q}}{\partial S}=q\delta''>0 \qquad \text{(Phase II と } q>0 \text{ における Phase III)}$$

$$\frac{\partial\dot{q}}{\partial S}=q\delta''<0 \qquad \text{(} q<0 \text{ における Phase III)}$$

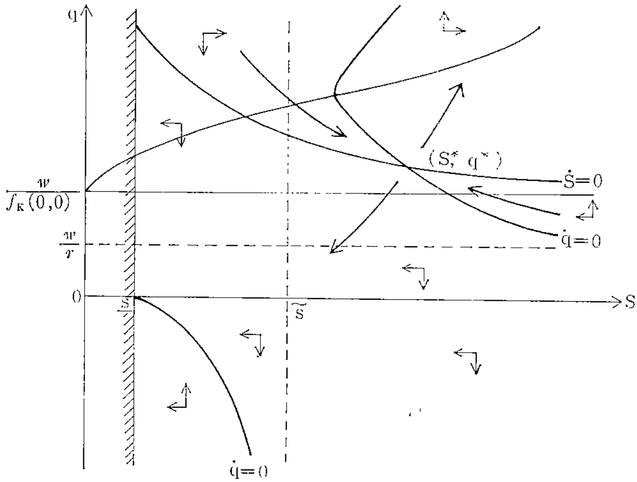
14) 補論4参照．

15) S が $\underset{\sim}{S}$ および $\tilde{S}$ に近づけば

$$\lim_{S\to\underset{\sim}{S}} q=\lim_{S\to\underset{\sim}{S}}\frac{w}{\delta'(S)+r}=0-$$

$$\lim_{S\to\tilde{S}} q=\lim_{S\to\tilde{S}}\frac{w}{\delta'(S)+r}=-\infty$$

となる．



第 2 図

となるので，$q>0$ のとき，曲線 $\dot{q}=0$ の右側は $\dot{q}>0$ となり，左側は $\dot{q}<0$ となる．$q<0$ のときは，$q>0$ のときと反対になる．以上の結果から，$\dot{S}=0$ および $\dot{q}=0$ の各曲線を (S, q) 平面に描くと第2図で示される曲線となる．

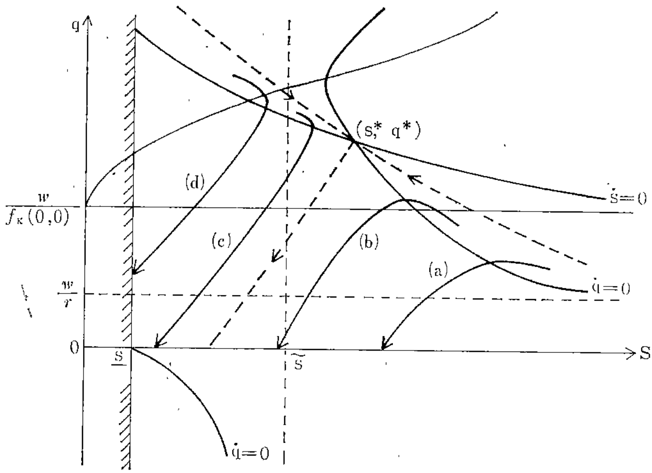
曲線 $\dot{S}=0$ と $\dot{q}=0$ との交点 (S^*, q^*) が存在するならば，$\tilde{S}<S$ の下で Phase I か II の領域内で交点が存在する．第2図では長期均衡点が Phase II の領域で存在する場合が描かれている．(S^*, q^*) は saddle point となり，この点に収束していく径路と発散していく径路が見出される[16]．

初期条件 S_0，期末条件 $S(R)\geqq\underline{S}$，計画期間Rが所与の下で，横断性の条件 (11)′ を満たす最適径路は，第2図で明らかなように，長期均衡点に収束する径路（第3図では破線で描いた径路）より下の領域で決定される．いくつかの想定しうる最適径路から次の命題が推論できる．

命題 1

初期の人的資本が高水準クラスにある個人 $(S_0\geqq S^*)$ は一般に Phase II⟶

16）補論5参照．



第 3 図

Phase III の最適径路をとる．S_0 がさらに高水準にある個人は，Phase III のみで終始するが，計画期間Rの状況によっては，Phase III——→Phase II——→Phase III の最適径路も存在しうる[17]．

右方から S^* に収束する径路と，q^* から下方に発散していく径路で規定される領域内では常に人的資本は単調減少（$\dot{S}<0$）する．

命題 2

初期の人的資本が中水準クラスにある個人は一般に Phase II——→Phase III の最適径路をとる．人的資本ストックは単調減少するか，あるいは初期段階で増加し，その後単調減少していくかのいずれかである．

17) 初期の人的資本が高水準で存在するか，否かは相対的な概念で，絶対水準を意味していない．$\tilde{S}$ は r と $\delta'(S)$ とに依存しているゆえ，長期均衡点 S^* も同様である．ここでは，便宜上のため $S_0 \geqq S^*$ なる初期人的資本を高水準と呼んだ．このクラスの代表的な最適径路は，第3図の (a) と (b) で描かれている．

命題 3

初期の人的資本が低水準クラスにある個人は一般に Phase I ⟶ Phase II ⟶ Phase III の最適経路をとる．人的資本ストックの変化は増加から単調減少へと移行するが，転換時点は中水準クラスの個人よりも長くなる．

命題 4

人的資本の生産物に対する需要価格は，低・中水準クラスの最適経路においては単調減少（$\dot{q}<0$）していくが，高水準クラスでは初期段階で増加する可能性もある．

命題 5

労働可能期間Rが大きくなれば，それぞれの最適経路は長期均衡点に近づく．

Ⅳ 結　　論

この節では Ben-Porath モデルと我々のモデルとの結果を比較検討してみる．まず最初に，t が所与のときの静学的均衡を概観する．

(i) Ben-Porath モデルと同様に，より一般的な形で人的資本の生産要素 hS と物的財の生産要素Dとの限界代替率 f_K/f_D が要素価格比 w/p_d との関係において

$$h=1 \text{ のとき} \quad \frac{f_K}{f_D}>\frac{w}{p_d} \quad (\text{Phase I})$$

$$0<h<1 \text{ のとき} \quad \frac{f_K}{f_D}=\frac{w}{p_d} \quad (\text{Phase II})$$

$$h=0 \text{ のとき} \quad \frac{f_K}{f_D}<\frac{w}{p_d} \quad (\text{Phase III})$$

が成立する．

(ii) Phase I もしくは II を経過する個人の最適計画で，労働可能期間Rが長くなれば人的資本の生産期間が長くなるのは，Ben-Porath モデルと同じ結

果である.

(iii) Phase II では

$$\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}<0,\quad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}=0; \qquad \frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}>0,\quad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}>0$$ [18]

さらに, ω を生産要素価格比 w/p_d と定義すれば

$$\frac{\partial h}{\partial \omega}<0,\quad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \omega}>0$$ [19]

が成立する.

次に S_t, q_t が変化した場合の動学的均衡を概観する.

(iv) Ben-Porath モデルでは労働可能期間にわたって人的資本の生産を続ける生涯教育・訓練が最適計画となる. すなわち, full-time job である Phase III は退職時点 $t=\mathrm{R}$ だけでしか実現されない. ところが, 我々のモデルでは労働可能期間の最終段階で, ある期間にわたって必ず, すべての個人によって full-time job は経験される. この差異が生じるのは, Ben-Porath モデルでは人的資本生産の長期限界費用曲線が零を起点としているのに対して, 我々のモデルではそれが $w/f_{\mathrm{K}}(0, 0)$ を起点としているからである[20].

(v) Phase II の場合, Ben-Porath モデルでは人的生産物に対する需要価格は単調減少 ($\dot{\mathrm{q}}<0$) していくが, 我々のモデルでは初期の人的資本が高水準クラスに属する個人の最適径路では, その需要価格が増加 ($\dot{\mathrm{q}}>0$) するケースも存在する. この需要価格の動きと関連して人的資本の生産変化 $\dot{\mathrm{Q}}$ も Ben-Porath モデルとは異なった様相を示す. 人的資本の生産函数 $\mathrm{Q}=f(h\mathrm{S}, \mathrm{D})$ を t で微分して, 補論3の (A-6), (A-7) を代入すれば

18) 補論3, 4参照.

19) Phase II では, $h\mathrm{S}$ と D との限界代替率が ω に等しいから

$$\omega f_{\mathrm{D}}(h\mathrm{S}, \mathrm{D})=f_{\mathrm{K}}(h\mathrm{S}, \mathrm{D})$$

を ω で微分すれば

$$f_{\mathrm{D}}+\omega \mathrm{S} f_{\mathrm{KD}}\frac{\partial h}{\partial \omega}=\mathrm{S} f_{\mathrm{KK}}\frac{\partial h}{\partial \omega} \longrightarrow \frac{\partial h}{\partial \omega}=\frac{f_{\mathrm{D}}}{\mathrm{S}(f_{\mathrm{KK}}-\omega f_{\mathrm{KD}})}<0$$

$$f_{\mathrm{D}}+\omega f_{\mathrm{DD}}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \omega}=f_{\mathrm{KD}}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \omega} \longrightarrow \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \omega}=\frac{f_{\mathrm{D}}}{f_{\mathrm{KD}}-\omega f_{\mathrm{DD}}}>0$$

20) 補論6参照.

$$\dot{\mathrm{Q}}=f_{\mathrm{K}}\left[h\dot{\mathrm{S}}+\mathrm{S}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)\right]+f_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)$$
$$=\left(f_{\mathrm{K}}\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}+f_{\mathrm{D}}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\right)\dot{\mathrm{q}}\gtreqless 0 \quad (\dot{\mathrm{q}}\lesseqgtr 0)$$

となる．したがって，初期の人的資本が低・中水準クラスに属する個人の最適生産の径路 $\dot{\mathrm{Q}}<0$ は，Ben-Porath モデルと同一結果であるが，高水準クラスでは同じ結果にはならない．

(vi) 人的資本の投資コストに関する時間変化率 $\dot{\mathrm{I}}_t$ も（5）と同じ結果が引きだされる．すなわち，

$$\dot{\mathrm{I}}_t=wh\dot{\mathrm{S}}+w\mathrm{S}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)+\mathrm{p}_d\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)$$
$$=\left(w\mathrm{S}\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}+\mathrm{p}_d\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\right)\dot{\mathrm{q}}\gtreqless 0 \quad (\dot{\mathrm{q}}\gtreqless 0)$$

となるから．

(vii) 初期の人的資本が低・中水準に属する個人は，時間の経過と共に人的資本の生産を減少させていくが，高水準に属する個人の最適径路の中には Phase III から Phase II へ移行するケースがある．この現象は我々の想定した減少的な人的資本の減価函数に依存している．Ben-Porath が想定した線型の減価函数では，人的資本が大きくなればなる程，その減価も大きくなるので，その減価分を常に人的資本の生産で補充しなければならない．ところが，我々のモデルでは人的資本が大きくなればなる程，その減価は小さくなるために人的資本の生産で補充しなければならない必要性は少なくなる．そのため，ある水準にまで人的資本が減価したときに，part-time schooling (training) の形で人的資本の減価を補充することになる．したがって，Phase III⟶Phase II⟶Phase III の可能性が生じてくる．

(viii) 我々のモデルでは Phase II において

$$\dot{\mathrm{E}}>\dot{\hat{\mathrm{E}}}>w\dot{\mathrm{S}} \qquad (\dot{\mathrm{q}}<0 \text{ のとき})$$
$$\dot{\mathrm{E}}<\dot{\hat{\mathrm{E}}}<w\dot{\mathrm{S}} \qquad (\dot{\mathrm{q}}>0 \text{ のとき})$$

が成立する[21]．

V　補　　論

1　強い凹函数になる必要十分条件

$f(x_1, x_2, x_3)=0$ が強い凹函数になるための必要十分条件は

$$f_{ii}<0,\quad \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}<0 \quad (i, j=1, 2, 3)$$

である．$x_1=\mathrm{S}$, $x_2=h$, $x_3=\mathrm{D}$ とおけば

(i)　$f_{ii}<0$　より　$f_{KK}<0, f_{DD}<0$　　　(A–1)

(ii)　$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=-f_K(f_K+2h\mathrm{S}f_{KK})>0$

$f_{11}f_{33}-f_{13}^2=h^2(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}^2)>0$

$f_{22}f_{33}-f_{23}^2=\mathrm{S}^2(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}^2)>0$

より　$\mathrm{F}_1=f_K+2h\mathrm{S}f_{KK}<0$,　$\mathrm{F}_2=f_{KK}f_{DD}-f_{KD}^2>0$　　　(A–2)

(iii)　$f_{11}(f_{22}f_{33}-f_{23}^2)-f_{21}(f_{12}f_{33}-f_{13}f_{32})+f_{31}(f_{12}f_{23}-f_{13}f_{22})$

$=-f_K(f_Kf_{DD}+2h\mathrm{SF}_2)<0$

より　$f_Kf_{DD}+2h\mathrm{SF}_2>0$　　　(A–3)

すなわち，(A–1), (A–2), (A–3) が必要十分条件となる．

2　十分性の証明

Cass〔4〕に従って，$(\mathrm{S}^*, h^*, \mathrm{D}^*, \lambda^*, \pi_1^*, \pi_2^*)$ は必要条件（5）～(11)

21)　賃金粗収入 $\hat{\mathrm{E}}$ の定義より

$$\dot{\hat{\mathrm{E}}}=w(1-h)\dot{\mathrm{S}}-w\mathrm{S}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)$$

$$=w\dot{\mathrm{S}}-w\mathrm{S}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\right)\dot{\mathrm{q}}\qquad（補論3より）$$

賃金純収入 E の定義より

$$\dot{\mathrm{E}}=w(1-h)\dot{\mathrm{S}}-w\dot{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)-\mathrm{p}_d\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}\dot{\mathrm{S}}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\dot{\mathrm{q}}\right)$$

$$=w\dot{\mathrm{S}}-\left[w\dot{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{q}}\right)+\mathrm{p}_d\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{q}}\right)\right]\dot{\mathrm{q}}\qquad（補論3より）$$

$\partial h/\partial \mathrm{q}>0$, $\partial \mathrm{D}/\partial \mathrm{q}>0$ だから，次の関係が成立する．

$\dot{\mathrm{E}}\gtreqless\dot{\hat{\mathrm{E}}}$　　$(\dot{\mathrm{q}}\lesseqgtr 0)$

$\dot{\hat{\mathrm{E}}}\gtreqless w\dot{\mathrm{S}}$　　$(\dot{\mathrm{q}}\lesseqgtr 0)$

を満たし，(S, h, D λ, π_1, π_2) は制約条件（4），S_0, $S(R) \geqq \underline{S}$, $0 \leqq h \leqq 1$ を満たすと仮定する．

$$J = \int_0^R \{w(1-h)S - p_d D\} e^{-rt} dt$$

と定義すれば，$J^* \geqq J$ を示せばよい．$(w(1-h)S - p_d D)$ は凹函数だから

$$J^* - J \geqq \int_0^R \{w(1-h^*)(S^* - S) - wS^*(h^* - h) - p_d(D^* - D)\} e^{-rt} dt$$

$$\geqq \int_0^R [\{w(1-h^*)(S^* - S) - wS^*(h^* - h) - p_d(D^* - D)\} e^{-rt}$$

$$+ \lambda^*(f(h^*S^*, D^*) - \delta(S^*) - \dot{S}^*) - \lambda^*(f(hS, D) - \delta(S) - \dot{S})$$

$$+ \pi_1^* h^* - \pi_1^* h + \pi_2^*(1-h^*) - \pi_2^*(1-h)] dt$$

（(5)，(6)，(10) より）

$$= \int_0^R \{w(1-h^*)(S^* - S)e^{-rt} - (wS^* e^{-rt} - \pi_1^* + \pi_2^*)(h^* - h)$$

$$- p_d e^{-rt}(D^* - D) + \lambda^*(f(h^*S^*, D^*) - f(hS, D))$$

$$- \lambda^*(\delta(S^*) - \delta(S)) - \lambda^*(\dot{S}^* - \dot{S})\} dt$$

$f(\cdot)$ は S, h, D に関して強い凹函数だから

$$f(h^*S^*, D^*) - f(hS, D) > h^* f_K^*(S^* - S) + S^* f_K(h^* - h)$$

$$+ f_D^*(D^* - D)$$

$\delta(\cdot)$ は S に関して強い凸函数だから

$$\delta(S^*) - \delta(S) < \delta'(S^*)(S^* - S)$$

さらに

$$\int_0^R \lambda^*(\dot{S}^* - \dot{S}) dt = [\lambda^*(S^* - S)]_0^R - \int_0^R \dot{\lambda}^*(S^* - S) dt$$

$$= \lambda^*(R)[S^*(R) - S(R)] - \int_0^R \dot{\lambda}^*(S^* - S) dt$$

ただし，$S^*(0) = S(0) = S_0$．この3つの関係式を使うと

$$J^* - J > \int_0^R [\{w(1-h^*)e^{-rt} + \lambda^* h^* f_K^* - \lambda^* \delta'(S^*) + \dot{\lambda}^*\}(S^* - S)$$

$$+ (-wS^* e^{-rt} + \lambda^* S^* f_K^* + \pi_1^* - \pi_2^*)(h^* - h)$$

$$+(-p_d e^{-rt}+\lambda^* f_D{}^*)(D^*-D)-\lambda^*(R)(S^*(R)-S(R))]dt$$
$$=-\lambda^*(R)(S^*(R)-S(R))$$

((7), (8), (9) より)

横断性の条件 (11) より

$\lambda^*(R)>0$ のとき　$S^*(R)=\underline{S}$

$S(R)\geqq\underline{S}$ だから　$\lambda^*(R)(S^*(R)-S(R))\leqq 0$

$\lambda^*(R)=0$ のとき　$\lambda^*(R)(S^*(R)-S(R))=0$

となるので

$$J^*-J>0 \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

3　曲線 $\dot{S}=0$ の傾き

最初に Phase I における $\dot{S}=0$ の傾きを検討する. 条件 $p_d=qf_D(S, D)$ をSおよびqに関して偏微分すれば

$$0=q\left(f_{KD}+f_{DD}\frac{\partial D}{\partial S}\right) \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial S}=-\frac{f_{KD}}{f_{DD}}>0 \qquad \text{(A-4)}$$

$$0=f_D+qf_{DD}\frac{\partial D}{\partial q} \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial q}=-\frac{f_D}{qf_{DD}}>0 \qquad \text{(A-5)}$$

$\dot{S}=0$, すなわち, $f(S, D)=\delta(S)$ を全微分すると

$$f_K dS+f_D\left(\frac{\partial D}{\partial S}dS+\frac{\partial D}{\partial q}dq\right)=\delta' dS$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{S}=0}=-\frac{qf_{KD}}{f_D}+\frac{(f_K-\delta')f_D{}^2}{qf_{DD}}<0 \qquad \text{(Phase I)}$$

Phase II では, 条件 $w=qf_K(hS, D)$ と $p_d=qf_D(hS, D)$ をSおよびqに関してそれぞれ偏微分すれば

$$0=q\left[hf_{KK}+Sf_{KK}\frac{\partial h}{\partial S}+f_{KD}\frac{\partial D}{\partial S}\right]$$

$$0=q\left[hf_{KD}+Sf_{KD}\frac{\partial h}{\partial S}+f_{DD}\frac{\partial D}{\partial S}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial h}{\partial S}=-\frac{h}{S}<0\,; \qquad \frac{\partial D}{\partial S}=0 \qquad \text{(A-6)}$$

ならびに

$$0=f_K+q\left[Sf_{KK}\frac{\partial h}{\partial q}+f_{KD}\frac{\partial D}{\partial q}\right]$$

$$0=f_D+q\left[Sf_{KD}\frac{\partial h}{\partial q}+f_{DD}\frac{\partial D}{\partial q}\right]$$

$$\therefore\quad \frac{\partial h}{\partial q}=\frac{f_D f_{KD}-f_K f_{DD}}{qS(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2)}>0\;;\quad \frac{\partial D}{\partial q}=\frac{f_K f_{KD}-f_D f_{KD}{}^2}{q(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2)}>0 \tag{A-7}$$

（補論1の（A-2）と仮定 $f_{KD}>0$ より）

となる．$\dot{S}=0$, すなわち，$f(hS, D)=\delta(S)$ を全微分すれば，(A-6), (A-7) より

$$\left[Sf_K\frac{\partial h}{\partial q}+f_D\frac{\partial D}{\partial q}\right]\frac{dq}{dS}=\delta'-f_K\left(h+S\frac{\partial h}{\partial S}\right)-f_D\frac{\partial D}{\partial S}$$
$$=\delta'$$

$$\therefore\quad \left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{S}=0}=\frac{q\delta'(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2)}{2f_K f_D f_{KD}-f_K{}^2 f_{DD}-f_D{}^2 f_{KK}}<0 \qquad \text{(Phase II)}$$

4　曲線 $\dot{q}=0$ の傾き

Phase I における $\dot{q}=0$　$(\tilde{S}<S)$ は

$$f_K(S, D)=\delta'(S)+r$$

となるから，これを全微分すれば

$$f_{KK}dS+f_{KD}\left(\frac{\partial D}{\partial S}dS+\frac{\partial D}{\partial q}dq\right)=\delta'' dS$$

になる．条件 (A-4), (A-5) から

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{q}=0}=\frac{-q}{f_D f_{KD}}[\delta'' f_{DD}-(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2)]>0$$

で，$\dot{q}=0$ は正の傾きをもつ．

Phase II も同様に

$$w=q(\delta'(S)+r)$$

を全微分すれば，$\dot{q}=0$ の傾きは負となる．すなわち

$$0=(\delta'(S)+r)dq+q\delta''(S)dS$$

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{q}=0}=-\frac{q\delta''(S)}{\delta'(S)+r}<0$$

5　長期均衡点の saddle point

Phase II における (14) 式と (15) 式を点 (S^*, q^*) の近傍でテーラー展開して，線型微分方程式にあらわせば

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial \dot{S}}{\partial S}\right|_* & \left.\dfrac{\partial \dot{S}}{\partial q}\right|_* \\ \left.\dfrac{\partial \dot{q}}{\partial S}\right|_* & \left.\dfrac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right|_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S-S^* \\ q-q^* \end{bmatrix}$$

となる．ただし，$\dot{S}^*=\dot{q}^*=0$。特性方程式

$$x^2-\left(\left.\frac{\partial \dot{S}}{\partial S}\right|_*+\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right|_*\right)x+\left(\left.\frac{\partial \dot{S}}{\partial S}\right|_*\cdot\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right|_*-\left.\frac{\partial \dot{S}}{\partial q}\right|_*\cdot\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial S}\right|_*\right)=0$$

が正の実根と負の実根を有するとき，(S^*, q^*) は saddle point となる．そのためには特性方程式の定数項が負であることを示せばよい．条件 (A-6), (A-7) を代入すれば定数項は次のようになる．

$$\text{定数項}=\left[f_K\left(h+S\frac{\partial h}{\partial S}\right)+f_D\frac{\partial D}{\partial S}-\delta'\right](\delta'+r)$$

$$-\left(Sf_K\frac{\partial h}{\partial q}+f_D\frac{\partial D}{\partial q}\right)q\delta''$$

$$=-\delta'(\delta'+r)-\frac{\delta''(2f_Kf_Df_{KD}-f_K{}^2f_{DD}-f_D{}^2f_{KK})}{f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2}$$

ところで，長期均衡点が存在するためには，その近傍において曲線 $\dot{S}=0$ と $\dot{q}=0$ との傾きが

$$\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{q}=0}<\left.\frac{dq}{dS}\right|_{\dot{S}=0}$$

なる関係を必要とする．したがって，補論3，4から

$$\frac{-q\delta''}{\delta'+r}<\frac{q\delta'(f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2)}{2f_Kf_Df_{KD}-f_K{}^2f_{DD}-f_D{}^2f_{KK}}$$

$q>0$, $\delta'<0$, $\delta'+r>0$　($\tilde{S}<S$) だから

$$-\delta'(\delta'+r)-\frac{\delta''(2f_Kf_Df_{KD}-f_K{}^2f_{DD}-f_D{}^2f_{KK})}{f_{KK}f_{DD}-f_{KD}{}^2}<0$$

となり，定数項は負となる．

6　長期限界費用曲線

Phase II における人的資本の投資コスト I_t は，機会費用（foregone earnings）wh_tS_t と物的財生産要素の直接費用 p_dD_t との2項目から構成されている．

(i)　$I_t = wh_tS_t + p_dD_t$

Phase II では，各生産要素の限界代替率と生産要素価格比との均衡条件が成立している．

(ii)　$wf_D(hS, D) = p_d f_K(hS, D)$

この (ii) 式と人的資本の生産函数

(iii)　$Q = f(hS, D)$

から，最適な生産要素インプット h, D が，Q, S の函数として求められる．

(iv)　$h = h(Q, S)$;　$D = D(Q, S)$

(iv) を (i) に代入すれば，短期の費用函数が

(v)　$I_t = wS_t h(Q_t, S_t) + p_d D(Q_t, S_t)$

の形で得られる．したがって，短期限界費用曲線は，S_t を所与の下で (v) を Q で微分すれば導かれる．

$$\left.\frac{dI_t}{dQ_t}\right|_S = wS\frac{dh}{dQ} + p_d\frac{dD}{dQ}$$

一方，(ii)，(iii) を全微分すれば，S が所与だから

$$S(p_d f_{KK} - wf_{KD})dh = (wf_{DD} - p_d f_{KD})dD$$

$$dQ = Sf_K dh + f_D dD$$

となり，この関係から次式が得られる．

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{wf_{DD} - p_d f_{KD}}{SB}\,; \qquad \frac{dD}{dQ} = \frac{p_d f_{KK} - wf_{KD}}{B}$$

ただし，$B = f_D(p_d f_{KK} - wf_{KD}) + f_K(wf_{DD} - p_d f_{KD}) < 0$

それゆえ，短期限界費用界線は

$$\left.\frac{dI_t}{dQ_t}\right|_S = \frac{w}{f_K(hS, D)} = \frac{p_d}{f_D(hS, D)} \qquad \text{(A-8)}$$

となる．

長期費用曲線は，短期費用曲線の包絡線になるから，(v) をSで偏微分して零とおく．

$$\frac{\partial \mathrm{I}_t}{\partial \mathrm{S}_t}=w\left(h+\mathrm{S}\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\right)+\mathrm{p}_d\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}=0$$

上式から，SはQの函数として表わされるので，長期の最適な生産要素インプット h, D は，Qの函数になる．

(vi) $h=h(\mathrm{Q},\ \mathrm{S}(\mathrm{Q}))$; $\mathrm{D}=\mathrm{D}(\mathrm{Q},\ \mathrm{S}(\mathrm{Q}))$

(vi) を (i) に代入すれば長期の費用曲線となる．

(vii) $\mathrm{I}_t=wh(\mathrm{Q},\ \mathrm{S}(\mathrm{Q}))\mathrm{S}(\mathrm{Q})+\mathrm{p}_d\mathrm{D}(\mathrm{Q},\ \mathrm{S}(\mathrm{Q}))$

それゆえ，長期限界費用曲線は

$$\left.\frac{d\mathrm{I}_t}{d\mathrm{Q}_t}\right|_{\mathrm{L}}=w\mathrm{S}\left[\frac{dh}{d\mathrm{Q}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{S}}\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{Q}}\right]+wh\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{Q}}+\mathrm{p}_d\left[\frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{Q}}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}}\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{Q}}\right]$$

補論3の (A-6) を上式に代入すれば

$$\left.\frac{d\mathrm{I}_t}{d\mathrm{Q}_t}\right|_{\mathrm{L}}=w\mathrm{S}\frac{dh}{d\mathrm{Q}}+\mathrm{p}_d\frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{Q}} \qquad \text{(A-9)}$$

となって短期限界費用曲線と一致する．

限界費用曲線を，さらにQで微分すれば

$$\frac{d^2\mathrm{I}_t}{d\mathrm{Q}_t^2}=\frac{-w}{f_{\mathrm{K}}^2}\left(\mathrm{S}f_{\mathrm{KK}}\frac{dh}{d\mathrm{Q}}+f_{\mathrm{KD}}\frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{Q}}\right)$$

$$=\frac{-w^2}{f_{\mathrm{K}}^2\mathrm{B}}(f_{\mathrm{KK}}f_{\mathrm{DD}}-f_{\mathrm{KD}}^2)>0 \qquad (\mathrm{B}<0\ \text{より})$$

となり，長期の限界費用曲線は $w/f_{\mathrm{K}}(0,\ 0)$ を起点として，Qの増加と共に単調増加していく．

【参考文献】

〔1〕 Arrow, K. J., and M. Kurz, "Optimal Consumer Allocation over an Infinite Horizon," *Journal of Economic Theory*, Vol. 1, No. 1, June 1969.

〔2〕 Becker, G. S., "Investment in Human Capital: A Theoretic Analysis," *Journal of Political Economy*, Vol. 70, No. 5, Part 2, Oct. 1962.

〔3〕 Ben-Porath, Y., "The Production of Human Capital and the Life-Cycle of Earnings," *Journal of Political Economy*, Vol. 75, No. 4, Part 1, August 1967.

〔4〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *The Review of Economic Studies*, Vol. 32, No. 3, July 1965.

〔5〕 Heckman, J. J., "A Life-Cycle Model of Earnings, Learning, and Consumption," *Journal of Political Economics*, Vol. 84, No. 4, Part2 , August 1976.

〔6〕 Nishimura, O., '*A Dynamic Theory of Income Distribution over the Life-Cycle*,' Ph. D. dissertation presented to University of Pennsylvania, December 1976.

〔7〕 Wallace, T. D. & L. A. Ihnen, "Full-Time Schooling in Life-Cycle Models of Human Capital Accumulation," *Journal of Political Economics*, Vol. 83, No. 1, February 1975.

〔8〕 Yaari, M. E., "On the Consumer's Lifetime Allocation Process," *International Economic Review*, Vol. 5, No. 3, September 1964.