Qualitative Analysis to Solutions for Equations via Fixed Point Theorems III - Quasilinear Difference Equations and the Modified Nicholson-Bailey Model-

Seiji Saito*

(Received April 13, 2023)

In this article we give sufficient conditions of stability and boundedness for quasilinear difference equations and the existence of asymptotic stability of periodic solutions for the modified Nicholson-Bailey model by applying fixed point theorems.

Key words : fixed point theorem, quasilinear difference equation, stability, modified Nicholson-Bailey model.

キーワード : 不動点定理，準線形差分方程式，安定性，修正ニコルソン・ベイリーモデル.

不動点定理による方程式の定性解析 III - 準線形差分方程式と修正ニコルソン・ベイリーモデル -

齋藤誠慈

1. はじめに

ベクトル空間 V 上の写像 $F : V \to V$ の不動点 $x_e \in V$ とは，$F(x_e) = x_e$ を満たす点をいう.

次の定理は，Brouwer（ブラウァー）の不動点定理における変数 1 元の場合である.

定理 1.1 関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$（区間 $I \subset \boldsymbol{R}$）は，条件 (1) - (4) を満たすとする.

(1) 集合 I は閉集合.

(2) I は凸集合，すなわち，任意の点 $a, b \in I$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ につき，$(1-\lambda)a + \lambda b \in I$ が成り立つ.

(3) 関数 f は中への写像，すなわち，$f(I) \subset I$.

(4) 関数 f は，I 上で連続.

このとき，f は，閉区間 I の中に少なくとも 1 つの不動点を有する.

次の定理は有限次元ベクトル空間において成り立ち，Brouwer の不動点定理 [1) p.468] といわれる.

定理 1.2 集合 $B \subset \boldsymbol{R}^m$ とし，関数 $f : B \to \boldsymbol{R}^m$ は，条件 (1) - (4) を満たすとする.

(1) 集合 B は有界閉集合，すなわちコンパクト（本研究の 2「3」参照）.

(2) B は凸集合.

(3) 関数 f は中への写像，すなわち，$f(B) \subset B$.

(4) 関数 f は B 上で連続.

このとき，f は，集合 B の中に少なくとも 1 つの不

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6702, E-mail : ssaito@mail.doshisha.ac.jp

動点を有する．

不動点定理の応用によって，方程式の解の存在に関し，証明されることは周知である．例えば，区間 $\boldsymbol{R}_+ = [0,\infty)$，自然数 m，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$ として，常微分方程式

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

において，関数 $f : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は連続として，初期条件

$$x(\tau) = \xi \quad (\tau \in \boldsymbol{R}_+, \xi \in \boldsymbol{R}^m) \tag{1.2}$$

に対する初期値問題の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ の存在性について，ある同値性を示す次の定理は，周知である．

定理 1.3 関数 $x(t) : J \to \boldsymbol{R}^m$（区間 $J \subset \boldsymbol{R}_+$）が，初期値問題 ((1.1),(1.2)) の解であることは，$x(t)$ は，次の積分方程式の C^1 級の解であることと同値である．

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds \tag{IEq}$$

$(\tau, t \in J)$．

写像 $\mathcal{V} : C(J) \to C(J)$（ただし $C(J)$ は，J 上で連続関数 $f : J \to \boldsymbol{R}^m$ の全体）とし $x \in C(J)$ に関し，$[\mathcal{V}(x)](t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds$ と定める．このとき，$x = \mathcal{V}(x) \in C(J)$ が存在すれば，x は $\mathcal{V}$ の不動点であり，かつ x は，積分方程式 (IEq) の解である．このように，不動点の存在と解の存在は密接な関係がある．

筆者は，常微分方程式の解に関し，不動点定理を応用し定性解析を行ってきた [7, 8]．本研究では，差分方程式の解に関する定性解析のために，従前の研究 [9] に関連して，不動点定理を応用する．

2. 不動点定理等の準備

本研究において，差分方程式の解の漸近挙動解析につき，重要な役割を果たす不動点定理，コンパクト性の定義を述べる．

「1」Schauder（シャウダー）の不動点定理 [1)p.456 4)p.26 10)p.26] と Browder の不動点定理 [11)p.154]

定理 2.1 （Schauder）バナッハ空間 X の部分集合 B 上の写像 $\mathcal{V} : B \to X$ は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 集合 $B \subset X$ は，閉凸．

(2) $\mathcal{V}(B) \subset B$．

(3) 写像 $\mathcal{V} : B \to B$ は連続．

(4) 像 $\mathcal{V}(B) \subset X$ は相対コンパクト，すなわち，閉包 $\overline{\mathcal{V}(B)}$ はコンパクトである．

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は B 内に少なくとも 1 つの不動点を有する．

Schauder の不動点定理は，Brouwer（ブラウワー）の不動点定理の応用により証明できる．次の Browder（ブラウダー）の不動点定理 [11)p.154] では，写像 $\mathcal{U} : S \to X$（バナッハ空間 X，$S \subset X$）の合成写像 $\mathcal{U}^m$（$m \in \boldsymbol{Z}_+$）に対し，不動点が存在する十分条件を与えている．

定理 2.2 （Browder）バナッハ空間 X 内の集合 S_0, S_1, S に関し，次の条件 (1) - (4) が満たされているとする．

(1) $S_0 \subset S_1 \subset S \subset X$．

(2) S_0 は凸閉集合．

(3) S_1, S は凸開集合．

(4) 写像 $\mathcal{U} : S \to X$ は連続でコンパクト写像，またある整数 $m \geq 1$ が存在して合成写像 $\mathcal{U}^m$ は S_1 で定義され，$\cup_{j=0}^m \mathcal{U}^j(S_0) \subset S_1$，$\mathcal{U}^m(S_1) \subset S_0$．写像 $\mathcal{U} : S \to X$ がコンパクトであるとは，任意の有界集合 $B \subset S$ につき，像 $\mathcal{U}(B)$ は相対コンパクトであるときをいう．

このとき，写像 $\mathcal{U}$ は S_0 内に不動点をもつ．

「2」Ascoli-Arzelá（アスコリ・アルツェラ）の定理 [4)p.22 5)p.75] 記号 $||x||$ は，$x \in V$（線形空間）のノルムとする．

定理 2.3 関数集合 $S = \{f : I \to \boldsymbol{R}^m, f \text{ は連続}\}$（区間 $I = [a, b]$）は，次の条件 (1)，(2) を満たすとする．

(1) S は一様有界，すなわち，ある $M > 0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\max_I ||f(t)|| \leq M \ (f \in S)$$

(2) S は同程度連続，すなわち，微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||f(t) - f(s)|| < \varepsilon \ (f \in S,\ t, s \in I,\ |t - s| < \delta)$$

このとき，集合 $S \subset X$ は相対コンパクトである．

「3」コンパクト集合

位相空間 V の集合 S がコンパクトであるという定義を述べ，それと同等あるいは，同種な定理を示す．$\boldsymbol{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．

定義 2.4 （有限開被覆 [5)p.53]，コンパクト性 [5)p.151]）集合 $S \subset V$ がコンパクトであるとは，任意の開被覆 $\{$ 開集合 $O_\lambda \subset V : \lambda \in \Lambda\}$（$\Lambda \subset \boldsymbol{R}$ は添数集合，$S \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$）につき，ある有限個の開集合 $\{O_k : 1 \leq k \leq n\} \subset \{O_\lambda\}$ は，$\cup_{1\leq k\leq n} O_k \supset S$ を満たすときをいう．O_k の添数 $k \in \boldsymbol{Z}_+$（非負整数の集合）は，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ から取り直している．

定理 2.5 （点列コンパクト [5)p.51]）バナッハ空間 V の集合 $S \subset V$ がコンパクトであるとは，任意の点列 $\{x_n : n \in \boldsymbol{Z}_+\} \subset S$ について，ある部分点列 $\{x_{n(k)} :$

$k \in \boldsymbol{Z}_+\} \subset \{x_n\}$ は収束して，$\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} \in S$ であることと，同値である．

定理 2.6 （全有界性 4)p.22 5)p.54，相対コンパクト性）集合 $S \subset V$ が全有界であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$ につき，集合

$N(\varepsilon) = \{y \in V$: 任意の y に対し，$||y - x|| < \varepsilon$ なる $x \in S$ が存在する $\}$

と定めると，有限個の $\{z_k \in S : 1 \le k \le n, z_k \in O_\lambda\}$ が存在し $S \subset \cup\{N_k(\varepsilon) : 1 \le k \le n, z_k \in N_k(\varepsilon)\}$ であるときをいう．このとき，$N(\varepsilon)$ を ε ネットという．バナッハ空間 V では，次の同値関係が成り立つ．

$S \subset V$ は相対コンパクト $\Leftrightarrow$ S は全有界である．

「４」差分方程式の解の漸近挙動性

差分方程式

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3}$$

と初期条件

$$x(n_0) = \xi \quad (n_0 \in \boldsymbol{Z}_+,\ \ \xi \in \boldsymbol{R}^m) \tag{2.4}$$

からなる初期値問題 ((2.3),(2.4)) を考える．関数 $f(n, x)$: $\boldsymbol{Z}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ は，$n \in \boldsymbol{Z}_+$ を固定するごとに，$x \in \boldsymbol{R}^m$ について連続とする．ここでは，差分方程式 (2.3) の解に関し，漸近挙動性の定義を述べる 6)p.133−169．

定義 2.7 （解の一様漸近安定性）式 (2.3) に関し，$f(n, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$（$\forall n \in \boldsymbol{Z}_+$）と仮定する．このとき，関数 $x = \boldsymbol{0}$ を，式 (2.3) のゼロ解という．

式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ が，一様漸近安定（[UAS], Uniformly Asymptotically Stable）であるとは，次の (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は一様安定（[US]，Uniformly Stable）であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta(\varepsilon) = \delta < \varepsilon$ をとれば，任意の初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \delta$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < \varepsilon \ (n \ge n_0)$$

なお，解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ とは，点 (n_0, ξ) から出る式 (2.3) の解を意味する．

(2) 式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は，一様吸収的（[UA], Uniformly Attractive）であるとは，微小な $\eta_0 > 0$ が存在し，任意の微小 $\varepsilon > 0$ （$\varepsilon < \eta_0$）に対し，ある十分大の整数 $T = T(\varepsilon) \in \boldsymbol{Z}_+$ をとれば，任意の初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \eta_0$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < \varepsilon \ (n \ge n_0 + T)$$

定義 2.8 （解の一様漸近有界性）　式 (2.3)（あるいは式 (2.3) の解）は一様漸近有界（[UAB], Uniformly Asymptotically Bounded）であるとは，次の (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.3) は一様有界（[UB]，Uniformly Bounded）であるとは，すなわち，任意の $\alpha > 0$ に対し，十分大の $\beta > \alpha$ をとれば，任意の初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \alpha$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < \beta \ (n \ge n_0)$$

(2) 式 (2.3) は終局有界（[UUltB]，Uniformly Ultimately Bounded）であるとは，ある $H_0 > 0$ が存在し，任意の $\alpha > 0$ に対し，ある十分大の整数 $T = T(\alpha) \in \boldsymbol{Z}_+$ をとれば，任意の初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \alpha$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < H_0 \ (n \ge n_0 + T)$$

次の定義では，式 (2.3) の解 $x(n; n_0, \xi)$ の漸近挙動性に関し，初期時間 n_0 と初期値 ξ の値の取り方が，$n \to \infty$ での $||x(n)||$ の影響し，$(n_0, \xi) \in \boldsymbol{Z}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ が漸近挙動性において一様性が保持されない性質を定義する．

定義 2.9 （解の漸近安定性）式 (2.3) に関し，$f(n, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$（$\forall n \in \boldsymbol{Z}_+$）と仮定する．

式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は，漸近安定（[AS], Asymptotically Stable）であるとは，次の (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は，安定（[S]，Stable）であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$ と初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ に対し，ある正数 $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) < \varepsilon$ をとれば，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \delta$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < \varepsilon \ (n \ge n_0)$$

(2) 式 (2.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は，吸収的（[A], Attractive）であるとは，微小な $\eta_0 > 0$ が存在し，任意の微小 $\varepsilon > 0$ （$\varepsilon < \eta_0$）に対し，任意の初期時間 $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ に対し，ある十分大の整数 $T = T(\varepsilon, n_0) \in \boldsymbol{Z}_+$ をとれば，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \eta_0$）に対する解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < \varepsilon \ (n \ge n_0 + T)$$

定義 2.10 式 (2.3) は，同程度終局有界（[EUltB], Equi-ultimately Bounded）であるとは，ある正数 $X_0 > 0$ が存在し，任意の初期時間 $n_0 > 0$ と任意の $\alpha > 0$ に対し，ある十分大の経緯時間 $T = T(n_0, \alpha) > \alpha$ を経れば，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ （$||\xi|| < \alpha$）に対し，解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$||x(n)|| < X_0 \ (n \ge n_0 + T)$$

「５」差分方程式と不動点定理

式 (2.3) の解を $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ を考える．$M > 0$，バナッハ空間 $\ell^\infty = \{x = (x(p)) : p \in \boldsymbol{Z}_+,$

$\sup_{p\geq 0}|x(p)| < \infty\}$，のノルム $||x|| = \sup_{p\geq 0}|x(p)|$，初期条件 (2.4) の初期時間を $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$，$\xi \in \boldsymbol{R}^m$ とし，問題 ((2.3),(2.4)) の解候補として，次の集合を定める．

$S_M(n_0) = \{x = (x(n_0), x(n_0+1), x(n_0+2), \cdots) \in \ell^\infty : x(n_0) = \xi,\ |x(k)| \leq M(k \geq n_0)\}$

また，写像 $\mathcal{V} : S_M(n_0) \to \ell^\infty$ は，次式で定める．

$\mathcal{V}(x) = (x(n_0), f(n_0, x(n_0)), f(n_0+1, x(n_0+1)), \cdots)$
$= (\xi, f(n_0, \xi), f(n_0+1, x(n_0+1)), \cdots)$

もし，(i) $\mathcal{V}(S_M(n_0)) \subset S_M(n_0)$；

(ii) 写像 $\mathcal{V}$ は $S_M(n_0)$ 上で連続，すなわち，$||y_n - y_0|| \to 0$（$y_n, y_0 \in S_M(n_0)$）のとき，$||\mathcal{V}(y_n) - \mathcal{V}(y_0)|| \to 0$ が成り立つ；

(iii) 集合 $S_M(n_0)$ は閉凸；

(iv) 集合 $S_M(n_0)$ はコンパクト

ならば，Schauder の不動点定理が応用され，不動点 $z \in S_M(n_0)$ が存在し，$z = \mathcal{V}(z)$
$\Leftrightarrow (\xi, z(n_0+1), z(n_0+2), \ldots)$
$= (z(n_0), f(n_0, z(n_0)), f(n_0+1, z(n_0+1)), \cdots)$
$\Leftrightarrow z$ は，問題 ((2.3),(2.4)) の解
を得る．

本研究において，周期的差分方程式は同程度終局有界性を満たせば，不動点定理の応用により周期解が存在することを議論する．この内容は常微分方程式と同様である [11) p.158]．また，修正ニコルソン・ベイリーモデルにつき，不動点定理の応用により周期解の一様漸近安定性の十分条件を与える．

3. 不動点定理による差分方程式の定性解析

例 3.1 では，ヒルベルト空間 ℓ^2 の解に関し，ノルムを

$||x||_2 = ||(x_k)||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$

として，予想 3.3 と例 3.4 ではバナッハ空間 ℓ^1 の解に関し，ノルムを

$||x||_1 = ||(x_k)||_1 = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$

として，漸近挙動性を議論する．予想 3.5 では，ノルム $||x||_\infty = ||(x_k)||_\infty = \sup_k |x_k|$ である．

例 3.1 1 元線形差分方程式の摂動系

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n, x(n)) \qquad (3.5)$$
$$(n \in \boldsymbol{Z}_+, x(n) \in \boldsymbol{R})$$

は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 正数 $r < 1$ が存在し，関数 $a : \boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{R}$ は次式を満たす．

$$|a(n)| \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}\ (n \in \boldsymbol{Z}_+)$$

(2) 集合 $J_1 = \{x \in \boldsymbol{R} : |x| \leq 1\}$ と $L > 0$ に対し，次式が成り立つ．

$$|f(n,x)| \leq L|x|\ (n \in \boldsymbol{Z}_+,\ x \in J_1)$$

(3) ある正数 L_1 につき，次式が成り立つ．

$|f(n, y_1) - f(n, y_2)| \leq L_1|y_1 - y_2|$
$(n \in \boldsymbol{Z}_+,\ y_i \in J_1,\ i = 1, 2)$

(4) 定数 $\rho_1 = r + L < 1$ と $\eta_0 < 1$ は，次式を満たす．

$\frac{\eta_0}{\sqrt{1-\rho_1^2}} < 1$

このとき，線形差分摂動系 (3.5) のゼロ解 $x = 0 \in \boldsymbol{R}$ は漸近安定 [AS] である．

証明 ヒルベルト空間 ℓ^2 内の $S_1 \subset \ell^2$ は，次式で定められる．

$S_1 = \{y = (y(k)) \in \ell^2 :$
$k \in \boldsymbol{Z}_+$，条件 (ア) - (エ) が満たされる $\}$.

(ア) $y(0) = \xi$，$y(k) \in \boldsymbol{R}$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）.

(イ) $(\sqrt{1-\rho_1^2})^{-1}|\xi| \leq \eta_0$.

(ウ) $|y(k+1)| \leq \rho_1^{k+1}|\xi|$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）.

(エ) $||y||_2 \leq \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\rho_1^2}}$.

閉集合 S_1 は ℓ^2 において，コンパクト集合である．実際，十分大の整数 $K_0 \in \boldsymbol{N}$ をとれば，$|y(k)| \leq \frac{1}{k}$（$k \geq K_0$）である．ヒルベルト立方体

$H_0 = \{x = (x(k)) \in \ell^2 : k \in \boldsymbol{Z}_+, |x(k)| \leq \frac{1}{k}\}$

と同様にして，$S_1 \subset \ell^2$ はコンパクトである．

閉集合 S_1 は，凸である．実際，$y, z \in S_1$，$0 \leq \lambda \leq 1$ のとき，$w = (1-\lambda)y + \lambda z \in S_1$ であるから．

任意の $\xi \in \boldsymbol{R}$（ただし $|\xi|\frac{1}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \leq \eta_0$）と任意の $y = (y(k)) \in S_1$（ただし $y(0) = \xi$）として，次の 1 元線形非斉次差分方程式

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n, y(n)) \qquad (3.6)$$

を考える．

写像 $\mathcal{V} : S_1 \to U(S_1)$ は，線形差分方程式 (3.6) の解 $x_y = (x_y(0), x_y(1), x_y(2), \cdots)$
$= (\xi, a(0)\xi + f(0,\xi), a(1)x_y(1) + f(1, x_y(1)), \cdots)$ と定め，$\mathcal{V}(y) = x_y$，$[\mathcal{V}(y)](k) = x_y(k)$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）とおく．

写像 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}(S_1) \subset S_1$ を満たす．実際，$x_y(0) = \xi$（なお $|\xi|/\sqrt{1-\rho_1^2} \leq \eta_0$）として，

$|x_y(1)| \leq |a(0)||\xi| + |f(0,\xi)| \leq (r+L)|\xi| \leq \rho$,
$|x_y(2)| \leq |a(1)||x_y(1)| + |f(1, y(1))|$
$\leq r|x_y(1)| + L|y(1)|$
$\leq r\rho_1|\xi| + L\rho_1|\xi| \leq \rho_1(r+L)|\xi| = \rho_1^2|\xi|$.

同様に，$|x_y(3)| \leq r|x_y(2)| + L\rho_1^2|\xi|$
$\leq (r+L)\rho_1^2|\xi| = \rho_1^3|\xi|$.

数学的帰納法より，$|x_y(k+1)| \leq \rho_1^{k+1}|\xi|$（$k \geq 0$）．よって，$||x_y||_2 = |\xi|(\sum_{k=0}^\infty \rho_1^{2k})^{1/2} = |\xi|/\sqrt{1-\rho_1^2} \leq \eta_0$.

写像 $\mathcal{V} : S_1 \to S_1$ は連続である．実際，$\lim_{p\to\infty} y_p = y_0 (\mathrm{in}\ \ell^2)$ として，

$\mathcal{V}(y_p) = v_p = (v_p(k))$，$\mathcal{V}(y_0) = v_0 = (v_0(k))$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）とおく．$v_p(k+1) = a(k)v_p(k) + f(k, y_p(k))$ であり，初期条件は $v_p(k) = y(k)$ とする（$k \in \boldsymbol{Z}_+$，$y(0) = \xi$）．$\{v_p(k+1) - v_0(k+1)\}^2$
$= \{a(k)(v_p(k) - v_0(k)) + f(k, y_p(k)) - f(k, y_0(k))\}^2$
$\leq a(k)^2\{v_p(k) - v_0(k)\}^2$

$+ 2|a(k)||v_p(k) - v_0(k)||f(k, y_p(k)) - f(k, y_0(k))|$
$+ \{f(k, y_p(k)) - f(k, y_0(k))\}^2$
$\leq r^2|v_p(k) - v_0(k)|^2 + 2rL_1|v_p(k) - v_0(k)||y_p(k) - y_0(k)| + L_1^2|y_p(k) - y_0(k)|^2$
$\leq 2r^2|v_p(k) - v_0(k)|^2 + 2L_1^2|y_p(k) - y_0(k)|^2$ で，
総和をとると，$||\mathcal{V}(y_p) - \mathcal{V}(y_0)||_2$
$\leq 2r^2||\mathcal{V}(y_p) - \mathcal{V}(y_0)||_2^2 + 2L_1^2||y_p - y_0||_2^2$ から，
$(1-2r^2)||\mathcal{V}(y_p) - \mathcal{V}(y_0)||_2^2 \leq 2L_1^2||y_p - y_0||_2^2$．よって，
$\lim_{y_p \to y_0} ||\mathcal{V}(y_p) - \mathcal{V}(y_0)||_2 = 0$ である．

したがって，Schauder の不動点定理により，
「ある $y \in S_1$ は $\mathcal{V}(y) = y$」
$\Leftrightarrow$「$[\mathcal{V}(y)](k) = y(k)$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）」$\Leftrightarrow$「$\mathcal{V}(y) = y_y$」
$(\xi, y_y(1), y_y(2), \cdots) = (y(0), y(1), y(2), \cdots)$」
$\Leftrightarrow (\xi, a(0)\xi + f(0,\xi), a(1)y(1) + f(1, y(1)), \cdots)$
$= (y(0), y(1), y(2), \cdots)$.
$y \in S_1$ は，式 (3.5) の解である．

不等式 $|y(n)| \leq \rho_1^n|\xi|$ より，ゼロ解は安定 [S]，かつ吸収的 [A] より，漸近安定 [AS] である．

注意 3.2 上記の $\mathcal{V}$ の定義域 $S_1 \subset \ell^2$ に関し，解（不動点）$y = \mathcal{V}(y)$ には，既に吸収的 [A] 等の漸近的性質が保証されている．距離空間 ℓ^2 の位相ではなく，バナッハ空間 ℓ^∞ の位相等で考察すると，解の一様有界性や，有界性などの新たな解析が可能であろう．

例 3.1 では．式 (3.5) のゼロ解に関する漸近安定性 [AS] を示しているが，一様漸近安定性 [UAS] が成り立つことも予想される．

予想 3.3 上記の例 3.1 に関し，同様な前提条件よりゼロ解 $x = 0$ は一様漸近安定 [UAS] であると，予想される．

証明方針 正数 $\eta_0 < 1$ とする．任意に $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ を固定する．集合
$S_2(n_0) = \{y = (y(n_0), y(n_0+1), \cdots) \in \ell^1$:
$k \geq n_0$ のとき $y(k) \in \boldsymbol{R}$, $|y(k)| \leq \eta_0$, $|y(k)| \leq \rho_1^k$,
$||y||_1 \leq \frac{\eta_0}{1-\rho_1}, y(n_0) = \xi\}$
とする．$y = (\xi, y(n_0+1), \cdots) \in S_2(n_0)$ に対し，非線形差分方程式

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n, y(n))$$

の解 $x_y(n) = x_y(n; n_0, \xi)$ を用いて，写像 $\mathcal{V} : S_2(n_0) \to \ell^1$ は $\mathcal{V}(y) = x_y$（$[\mathcal{V}(y)](n) = x_y(n)$，$n \geq n_0$）と定義する．次の結論 (I) - (IV) の成立が予想される．
(I) $|x_y(n)| \leq \rho_1^n$（$n \geq n_0 + 1$），$x_y(n_0) = \xi$（$(1-\rho_1)^{-1}|\xi| \leq \eta_0$）．
(II) $\mathcal{V}(S_2(n_0)) \subset S_2(n_0)$.
(III) $\mathcal{V}$ は $S_2(n_0)$ 上で連続.
(IV) ゼロ解は一様漸近安定 [UAS].
以上を証明すればよい．

例 3.1 の前提条件を替えて，関数列
$x = (x(0), x(1), \cdots)$ 　 $(x(k) \in \boldsymbol{R},\ k \in \boldsymbol{Z}_+)$
は，式 (3.5) の解であり，$x \in \ell^1$ で，次の例ではそのゼロ解は漸近安定 [AS] を得る．$n, k \in \boldsymbol{Z}_+$ は同じ役割を果たす．

例 3.4 線形差分方程式の摂動系 (3.5) では，次の条件 (1) - (5) を満たすとする．
(1) 関数 $a : \boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{R}$ は $|a(n)| \leq r < 1$（$n \in \boldsymbol{Z}_+$）．
(2) 関数 $f : \boldsymbol{Z}_+ \times J_1 \to \boldsymbol{R}$（$J_1 = \{x \in \boldsymbol{R} : |x| \leq 1\}$）に関し，定数 $L > 0$ が存在し，次式が成り立つ．
$$|f(n,x)| \leq L|x| \ (n \in \boldsymbol{Z}_+,\ x \in J_1).$$
(3) ある正数 L_1 が存在し，次式が成り立つ．
$$|f(n, y_1) - f(n, y_2)| \leq L_1|y_1 - y_2|$$
（$n \in \boldsymbol{Z}_+$，$y_i \in J_1$，$1 \leq i \leq 2$）．
(4) $\rho_1 = r + L < 1$.
(5) 正数 $\eta_0 < 1$ は $\frac{\eta_0}{1-\rho_1} < 1$ を満たす．
このとき，線形差分摂動系 (3.5) のゼロ解 $x = 0 \in \boldsymbol{R}$ は漸近安定 [AS] である．

証明 線形空間 ℓ^1 内の $S_1 \subset \ell^1$ は，次式で定められる．
$S_1 = \{y = (y(k)) \in \ell^1$:
$k \in \boldsymbol{Z}_+$ として，条件 (ア) - (エ) が満たされる $\}$.
$n \in \boldsymbol{Z}_+$ として，
(ア) $y(0) = \xi$, $y(k) \in \boldsymbol{R}$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$），
(イ) $(1-\rho_1)^{-1}|\xi| \leq \eta_0$,
(ウ) $|y(k+1)| \leq \rho_1^{k+1}|\xi|$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$），
(エ) $||y||_1 \leq \frac{\eta_0}{1-\rho_1}$.
十分大の整数 $N_1 \in \boldsymbol{Z}_+$ をとれば，ある正数 $a > 1$ に対し $\rho_1^k \leq \frac{1}{k^a}$（$k \geq N_1$）が成り立つ．実際，$g(k) = {\rho_1}^k k^a$ とおく．$\log g(k) = k \log \rho_1 + a \log k = k(\log \rho_1 + a\frac{\log k}{k}) \to -\infty$（$k \to \infty$）より，$\rho_1^k < \frac{1}{k^a}$（$k \geq N_1$）．
閉集合 $S_1 \subset \ell^1$ は，コンパクト集合である．閉集合 S_1 は凸である．任意の $\xi \in \boldsymbol{R}$（$|\xi|\frac{1}{1-\rho_1} \leq \eta_0$）と任意の $y = (y(n)) \in S_1$ （$y(0) = \xi$）として，次の線形非斉次式を考える．

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n, y(n)) \tag{3.7}$$

(I) 写像 $\mathcal{V} : S_1 \to \mathcal{V}(S_1)$ は，線形差分方程式 (3.6) の解 $x_y = (x_y(0), x_y(1), x_y(2), \cdots)$ として，$\mathcal{V}(y) = x_y$，ただし $[\mathcal{V}(y)](n) = x_y(n)$（$n \in \boldsymbol{Z}_+$）と表す．
(II) 写像 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}(S_1) \subset S_1$ を満たす．実際，$x_y(0) = \xi$（$(1-\rho_1)^{-1}|\xi| \leq \eta_0$）として，$|x_y(1)| \leq |a(0)||\xi| + |f(0,\xi)| \leq (r + L)|\xi| \leq \rho_1|\xi|$，数学的帰納法より，$|x_y(k+1)| \leq \rho_1^{k+1}|\xi|$（$n \geq 0$）．よって，$||x_y||_1 = |\xi|\sum_{k=0}^{\infty} \rho_1^k = |\xi|\frac{1}{1-\rho_1} \leq \eta_0$.
(III) 写像 $\mathcal{V} : S_1 \to S_1$ は連続である．実際，$\lim_{p \to \infty} y_p = y_0 (\in \ell^1)$ として，$\mathcal{V}(y_p) = v_p$，$\mathcal{V}(y_0) = v_0$ とおく．$v_p(k+1) = a(k)v_p(k) + f(k, y_p(k))$ であり，初期条件は $v_p(0) = \xi$ とする（$p \in \boldsymbol{Z}_+$）．$|v_p(k+1) - v_0(k+1)|$
$\leq |a(k)(v_p(k) - v_0(k))| + |f(k, y_p(k)) - f(k, y_0(k))|$
$\leq r|v_p(k) - v_0(k)| + L_1|y_p(k) - y_0(n)|$，総和をとると

$(1-r)||\mathcal{V}(v_p)-\mathcal{V}(v_0)||_1 \le L_1||y_p-y_0||_1$．よって，$\lim_{y_p\to y_0}||\mathcal{V}(y_p)-\mathcal{V}(y_0)||_1=0$．

(IV) Schauder の不動点定理の応用：上記 (I) - (III) から，Schauder の不動点定理により，ある $y \in S_1$ は $\mathcal{V}(y)=y \Leftrightarrow (\xi, a(0)\xi+f(0,\xi), a(1)y(1)+f(1,y(1)),\cdots)=(y(0),y(1),y(2),\cdots)$ から，$y \in S_1$ は，式 (3.5) の解である．

(V) 漸近安定性：(I) から，$|y(k)| \le \rho_1^k|\xi|$ よりゼロ解は安定 [S]，かつ吸収的 [A] より，漸近安定 [AS] である．

例 3.1 の証明と同様にして，m 元準線形系 (3.8) に関し，一様漸近有界 [UAB] が証明されることが予想される．解はバナッハ空間 ℓ^∞（ノルム $||x||_\infty$）において，考察する．

$$x(n+1)=A(n,x(n))x(n)+F(n,x(n)) \qquad (3.8)$$
$$(n\in \boldsymbol{Z}_+, x\in \boldsymbol{R}^m, F(n,x)\in \boldsymbol{R}^m, \text{行列 } A: m\times m)$$

予想 3.5 準線形系 (3.8) に関し条件 (1) - (4) が成り立つとき，ゼロ解は一様漸近有界 [UAB] であると，予想される．

(1) ある関数 $c: \boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ とある自然数 ν_0 に対し，任意の $r>0$ につき，次式 (1a), (1b) が成り立つ．$||y||$ は，$y\in \boldsymbol{R}^m$ のユークリッド・ノルムとする．

(1a) $y^T A(k,y)^T A(k,y)y \le c(k)^2||y||^2$（$k\ge\nu_0$，$||y||\le r$）；

(1b) $||A(k,y)F(k,y)|| \le c(k)||y||$（$k\ge\nu_0$，$||y||\le r$）．

記号 T は転置を意味する．

(2) ある関数 $\varphi: \boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ は，次式を満たす．

$||F(k,y)|| \le \varphi(k)||y||$（$k\in \boldsymbol{Z}_+$）

(3) ある定数 $M_1>0$ は，次式を満たす．

$\Pi_{k=0}^n(c(k)+\varphi(k)) \le M_1$（$n\in \boldsymbol{Z}_+$）

(4) ある定数 $M_2>0$ と自然数 $T_0\in \boldsymbol{N}$ が存在し，任意の $n, n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$（$n\ge n_0+T_0\ge 0$）について，次式が成り立つ．

$\Pi_{k=n_0}^n(c(k)+\varphi(k)) \le M_2$

このとき，準線形系 (3.8) は一様漸近有界 [UAB] である．

証明方針 任意の $\alpha>0$ に対し，十分大の $\beta>\alpha$ とし，初期時間 $n_0\in \boldsymbol{Z}_+$ と初期値 $\xi\in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi||<\alpha$）を任意に固定し，次の集合

$S_3=\{y=(y(n_0),y(n_0+1),\cdots): y(n_0)=\xi, \sup_{k\ge n_0}|y(k)|\le\beta\} \subset \ell^\infty$

は ℓ^∞ においてコンパクトである（定義 2.4 や，定理 2.5，定理 2.6 を用いる）．$y\in S_3$ に対し，非斉次線形差分方程式

$$x(k+1)=A(k,y(k))x(k)+F(k,y(k))$$

（$k\ge n_0$）．を考える．写像 $\mathcal{V}: S_3\to\ell^\infty$ は $\mathcal{V}(y)=x_y\in\ell^\infty$ かつ $x_y(k+1)=A(k,y(k))x_y(k)+F(k,y(k))$（$k\ge n_0$）と定義し，$\mathcal{V}$ は中への写像を示す．$\mathcal{V}$ の連続性，S_3 は凸集合を示し，Schauder の不動点定理を用いる．

条件 (3) から，一様有界性 [UB] を示す．条件 (4) から，一様終局有界性 [UUltB] を示す．

上記 3.5 の応用の 1 つは，自然数 $Q\ge2$ として，Q 周期的な非線形差分方程式

$$x(n+1)=F(n,x(n)) \qquad (3.9)$$

の周期解の存在を与えていることである [2)p.232]．

定理 3.6 式 (3.9) は，次の条件 (1)，(2) を満たすとする．

(1) 自然数 $Q\ge2$ として，式 (3.9) は Q 周期的，すなわち，

$F(n+Q,x)=F(n,x)$

（任意の $n\in \boldsymbol{Z}_+$，$x\in \boldsymbol{R}^m$）．仮に $Q=1$ のとき，式 (3.9) は自励系という．

(2) Q 周期系 (3.9) は，同程度終局有界 [EUltB].

このとき，結論 (I)，(II) を得る．

(I) Q 周期系 (3.9) は，一様終局有界 [UUltB].

(II) Q 周期解（集合）$\mathcal{S}_Q$，すなわち

$$\mathcal{S}_Q=\{x_k\in \boldsymbol{R}^m: 0\le k\le Q-1, \; x_k=F(n+Q,x_k),\ n\in \boldsymbol{Z}_+\}$$

が存在する．

注意 3.7 (i) 自励系 (Au)：$x(n+1)=F(x(n))$ は，任意の $Q\in \boldsymbol{N}$ につき．Q 周期系といえる．

(ii) 自励系 (Au) は同程度終局有界 [EUltB]（終局有界 [UltB][6)p136] でも可）ならば，一様終局有界 [UUltB] である．

4. 不動点定理による平衡点と周期解の定性解析

次の修正 NB モデル（modified Nichlson-Bailey Model）の差分方程式を考える（$n\in \boldsymbol{Z}_+$）．

$$\begin{aligned} N(n+1) &= N(n)e^{r\{1-\frac{N(n)}{K}\}}e^{-aP(n)} \\ P(n+1) &= N(n)\{1-e^{-aP(n)}\} \end{aligned} \qquad (4.10)$$

上記の式は，世代 $n=0,1,2,\cdots$ の，2 種個体群の昆虫（この場合，蛾）の個体数の推移モデルを表し，$N(n)$ は宿主（擬寄生虫に卵を産み付けられて食される意味，host）の，$P(n)$ は擬寄生（寄生ではない捕食寄生虫の意味，parasitoid）の個体数である．出生率 $r>0$，2 種個体群の遭遇する経験値 $a>0$，環境定数 $K>0$ を表し，文献 3)[p.83] では，2 種個体群の遭遇に関し Possion 分布を仮定している．

注意 4.1 修正 NB モデル (4.10) は自励系で，関係

$N(n+1)<N(n)e^{r(1-\frac{N(n)}{K})}$，$P(n+1)<N(n)$

があり，$H(x)=xe^{r(1-\frac{x}{K})}$（$x>0$）の増減を調べると，

$H(x) \le \max_{x>0} H(x) = \frac{Ke^{r-1}}{r}$

より，式 (4.10) は終局有界 [UltB]，よって同程度終局有界 [EUltB]，さらに一様終局有界 [UUltB] である．

式 (4.10) の平衡点 $x_e = (N_e, P_e) \in \boldsymbol{R}_+^2 (= \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+)$ が存在することが示される．また，

$f(N,P) = Ne^{r\{1-\frac{N}{K}\}}e^{-aP}$,

$g(N,P) = N\{1-e^{-aP}\}$

とおいて，平衡点は

$(N_e, P_e) = (f(N_e,P_e), g(N_e,P_e))$

を満たす．平衡点 x_e は写像

$U(N,P) = (f(N,P), g(N,P)) : \boldsymbol{R}_+^2 \to \boldsymbol{R}_+^2$

の不動点といえる．

式 (4.10) の平衡点 x_e（周期 0 の解）の一様漸近安定性に関して述べる．$x_e = (N_e, P_e)$ は次式を満たす．

$1 = e^{r\{1-\frac{N_e}{K}\}}e^{-aP_e}$, $P_e = N_e\{1-e^{-aP_e}\}$.

平衡点 x_e のヤコビ行列は $x = (N,P)$ として，次式の通り：

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_e) = \begin{pmatrix} 1-\frac{rN_e}{K} & -aN_e \\ 1-e^{-aP_e} & aN_e e^{-aP_e} \end{pmatrix}.$$

また，$t = \mathrm{tr}(\frac{\partial U}{\partial x}(x_e))$（トレース，跡），$d = \det(\frac{\partial U}{\partial x}(x_e))$（行列式）とおく．

定義 4.2 式 (4.10) の平衡点 x_e は一様漸近安定 [UAS] であるとは，次の (1), (2) が成り立つときをいう．

(1) 平衡点 x_e が一様安定 [US] とは，定義 2.9(1) に類似して異なるが，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,\varepsilon)$，$\forall n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$，$\forall n(\ge n_0) \in \boldsymbol{Z}_+$，$\forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \delta$）に関し，解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は $||x(n) - x_e|| < \varepsilon$（$n \ge n_0$）を満たすことである．

(2) 平衡点 x_e が一様吸収的 [UA] とは，定義 2.9(2) に類似して異なるが，$\exists\eta_0 > 0$，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists T = T(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$，$\forall n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$，$\forall n(\ge n_0+T) \in \boldsymbol{Z}_+$，$\forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$||\xi|| < \eta_0$），解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は，$||x(n) - x_e|| < \varepsilon$（$n \ge T+n_0$）を満たすことである．

次の定理 [3)p.57] が，得られている．

定理 4.3 （平衡点 x_e の一様漸近安定性）修正 NB モデル (4.10) の平衡点 x_e に関し，次の結論 (I)，(II) が成り立つ．

(I) ヤコビ行列 $\frac{\partial U}{\partial x}(x_e)$ の固有値 λ_i が，$|\lambda_i| < 1$（$i = 1, 2$）を満たすことは，次の不等式が成り立つことと必要十分である．

$$|t| < d+1 < 2 \qquad (*)$$

(II) 不等式 $(*)$ が成り立つとき，平衡点 $x_e = (N_e, P_e)$ は，一様漸近安定 [UAS] である．

注意 4.4 (i) 定理 4.3 は平衡点 x_e の漸近安定性は，局所的（初期値 ξ は x_e の近傍に含まれる）であるが，特に $0 < r < 1$ の下，大域的吸収性も証明される [6)p.171]．

(ii) 式 (4.10) において，条件 $r > 1$ の下，平衡点 x_e は吸収性を示すシミュレーション結果もある [3)p.84]．

整数 $Q > 0$ として，周期解（集合）$\mathcal{S}_Q$ につき，次の関係が成り立つ．

$z \in \mathcal{S}_Q$

$\Leftrightarrow$ z は，Q 回合成写像 $U^Q : \boldsymbol{R}_+^2 \to \boldsymbol{R}_+^2$ の平衡点.

定義 4.5 集合の周期解 $\mathcal{S}_Q$ と点 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ との距離を次に定める．$||\xi||$ を $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ のユークリッド・ノルムとする．

$\rho(\mathcal{S}_Q, \xi) = \inf\{||z - \xi|| : z \in \mathcal{S}_Q\}$

定義 4.6 Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ が一様漸近安定 [UAS] であるとは，次の性質 (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ は一様安定 [US]，すなわち，任意の微小 $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta(\varepsilon) = \delta < \varepsilon$ が存在し，任意の $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\rho(\mathcal{S}_Q, \xi) < \delta$）につき，解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は次式を満たす．

$\rho(\mathcal{S}_Q, x(n)) < \varepsilon$（$n \ge n_0$）

(2) Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ は一様吸収的 [UA]，すなわち，ある微小な $\eta_0 > 0$ が存在し，任意の微小な正数 $\varepsilon < \eta_0$ に対し，ある大の時間経緯整数 $T = T(\varepsilon) \in \boldsymbol{Z}_+$ が存在し，任意の $n_0 \in \boldsymbol{Z}_+$ と任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\rho(\mathcal{S}_Q, \xi) < \eta_0$）につき，解 $x(n) = x(n; n_0, \xi)$ は次式を満たす．

$\rho(\mathcal{S}_Q, x(n)) < \varepsilon$（$n \ge n_0 + T$）

次の例 [6)p.175] では，Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ の存在とその一様漸近安定性 [UAS] を与えている．

例 4.7 （周期解 $\mathcal{S}_Q$ の存在と一様漸近安定性）修正 NB モデル (4.10) に関し，写像 $U : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ について Q 回合成写像 $U^Q = G$ とおく．ある正数 $r_1 < 1$ は，次の条件 (1) - (3) を満たすとする．また，$x \in \boldsymbol{R}^m$ のノルム $||x||$ に対し，行列ノルム $||\frac{\partial G}{\partial x}|| = \sup_{||x||=1} ||\frac{\partial G}{\partial x}x||$ とする．

(1) ある点 $x_0 \in \boldsymbol{R}_+^2$ のヤコビ行列に関し，$||\frac{\partial G}{\partial x}(x_0)|| < r_1 < 1$ とする．

(2) (1) の x_0 とある $d > 0$ に対し $B_d = \{x \in \boldsymbol{R}_+^2 : ||x - x_0|| \le d\}$ とおき，任意の点 $y \in B_d$ のヤコビ行列に関し，$||\dfrac{\partial G}{\partial x}(y)|| < r_1$ とする．

(3) $c = ||G(x_0) - x_0||$ は，$c \le d(1 - r_1)$ を満たす．

このとき，結論 (I)，(II) を得る．

(I) 唯一の点 $a \in B_d$ が存在し，次の Q 周期解が存在する．

$$\mathcal{S}_Q = \{U^j(a) \in \boldsymbol{R}_+^2 : 0 \le j \le Q-1\}.$$

(II) Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ は，漸近安定（[AS]）である．

証明方針 (I) $\mathcal{S}_Q$ の存在・一意性の証明には，写像 $G : B_d \to \boldsymbol{R}_+^2$ に対し，縮小写像の原理を用いる．$G(x) \in B_d$（$x \in B_d$）を示す．実際，テイラー展開から，$c = x_0 + t(x - x_0), 0 < t < 1$ として，

$||G(x) - G(x_0)||^2 = ||\frac{\partial G}{\partial x}(c)(x - x_0)||^2 \le \max\{||\frac{\partial G}{\partial x}(y)(x - y)||^2 : x, y \in B_d\} \le (dr_1)^2$. また，$||G(x) - x_0|| \le ||G(x) - G(x_0)|| + ||G(x_0) - x_0|| \le$

$dr_1 + c \leq d$ から，$G(x) \in B_d$ より，写像 G は中への写像となる．

次に $G : B_d \to B_d$ は縮小写像であることを示す．$x, y \in B_d$ のとき，$c_1 = y + t_1(x - y) \in B_d$（$0 < t < 1$）として，$||G(x) - G(y)|| = ||\frac{\partial G}{\partial x}(c_1)(x-y)|| = r_1||x-y||$ を得る．よって，B_d において，G の不動点 $a \in B_d$: $a = G(a)$ は唯一に存在する．

(II) G の不動点 a のヤコビ行列 $A = \frac{\partial G}{\partial x}(a)$ の固有値 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ に関し，$||\frac{\partial G}{\partial x}(a)|| < r_1$ から，その $|\lambda| \leq ||\frac{\partial G}{\partial x}(a)|| < r_1 < 1$．実際，任意の固有値 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ とその固有ベクトル $x_\lambda \in \boldsymbol{C}^2$ につき，$||Ax_\lambda||^2 = ||\lambda x_\lambda||^2 = |\lambda|^2||x_\lambda||^2$．また任意の $x \in \boldsymbol{C}^2$ につき，$||Ax||^2 \leq ||A||^2||x||^2$ より，$|\lambda| \leq ||A||$．従って，$|\lambda| \leq r_1 < 1$．定理 4.3 から，$|\mathrm{tr}(A)| < \det(A) + 1 < 2$ が成り立つ．よって，Q 周期解 $\mathcal{S}_Q$ は，[AS] となる．実際，整数 $0 \leq q \leq Q - 1$ に対し，$L = \max_q ||\frac{\partial U^q}{\partial x}(B_d)||$ とし，次のように示される．

安定性 ([S]) : 写像 G の任意の固有値 $\lambda : |\lambda| < r_1 < 1$ から，任意の正数 $\varepsilon < d$ に対し，正数 $L < \varepsilon/\delta$ とする．初期値 $\xi \in \mathcal{S}_Q : \rho(\xi, \mathcal{S}_Q) < \delta$ をとれば，ある点 $a_1 \in B_d$ と整数 $j(\xi) : 0 \leq j(\xi) \leq Q - 1$ が存在し，$a_1 = U^j(a)$，かつ $d(\xi, \mathcal{S}_Q) = ||\xi - a_1|| < \delta$ が成り立つ．このとき，$n = Qk + q$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$，$0 \leq q \leq Q - 1$）より，$||U^n(\xi) - U^q(a_1)|| = ||U^{Qk}(U^q(\xi)) - U^{Qk}((U^q(a_1)))|| \leq ||G^k||||\frac{\partial U^q}{\partial x}(x_1)(\xi - a_1)||$（ここで $x_1 = a_1 + t(\xi - a_1) \in B_d, 0 < t < 1$）$\leq r_1^k L\delta < L\delta < \varepsilon$（$n \geq 0$）より，$\rho(U^n(\xi), \mathcal{S}_Q) < \varepsilon$（$n \geq 0$）を得る．

吸収性 ([A]) : $0 < \eta_0 = d$ として，$\xi \in B_d$ のとき $a_2 = U^j(a) \in B_d : \rho(\xi, \mathcal{S}_Q) = ||\xi - a_2||$，かつ $j \in \boldsymbol{Z}_+ : 0 \leq j \leq Q - 1$ とする．$T_1 = Qk \in \boldsymbol{N}$（$k \in \boldsymbol{N}$）とおき，$n = Qk + q$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$，$0 \leq q \leq Q - 1$）として，$||U^n(\xi) - U^n(a_2)|| = ||U^{Qk}(U^q(\xi)) - U^{Qk}((U^q(a_2)))|| \leq r_1^k L||\xi - a_2|| \leq r_1^k L2d < \varepsilon$（正数 $\varepsilon < 1$，$\varepsilon/(2Ld) < 1$）とする．整数 $k \geq \frac{\log(\frac{\varepsilon}{2Ld})}{\log(r_1)}$ であれば，[A] が成り立つ．

5. おわりに

本研究では $n = 0, 1, 2, \cdots$ として，1 元線形差分摂動系

$$x(n+1) = a(n)x(n) + f(n, x(n))$$

（$f(n, 0) = 0 \in \boldsymbol{R}$）のゼロ解の漸近安定性 [AS] に関し，ヒルベルト空間 ℓ^2，バナッハ空間 ℓ^1 における十分条件を吟味した．次に，m 元準線形差分摂動系

$$x(n+1) = A(n, x(n))x(n) + F(n, x(n))$$

（行列 $A(n, x) : m \times m$）の解の一様漸近有界性 [UAB] に関し，バナッハ空間 ℓ^∞ における十分条件について議論した．最後に，修正ニコルソン・ベイリーモデル

$$N(n+1) = N(n)e^{r\{1 - \frac{N(n)}{K}\}}e^{-aP(n)}$$
$$P(n+1) = N(n)\{1 - e^{-aP(n)}\}$$

$((N, P)) \in \boldsymbol{R}_+^2$ について，周期解の集合が存在し，かつ漸近安定 [AS] であるための十分条件を与えた．

参考文献

1) N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I*, (Wiley-Interscience Publ., New York, 1964), pp.456, 468.
2) S.N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations 3rd ed.*, (Springer, New York, 2000), p. 232.
3) L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, (Random House, New York, 1988), pp. 57, 83.
4) A. G. Kartsatos, *Advanced Ordinary Differential Equations*, (Mariner Publ. Comp., Florida, 1980), pp. 22, 26.
5) 河田敬義，三村征雄，現代数学序説 II（岩波書店，東京，1965），pp. 51, 53, 54, 75, 151.
6) 齋藤誠慈，数理モデル入門（裳華房，東京，2020），p. 133 - 169, 171, 175.
7) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 I -常微分方程式の境界値問題と準線形常微分方程式の安定性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，64[1]，34 - 40（2023）.
8) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 II -常微分方程式の漸近同値性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，64[1]，41- 49（2023）.
9) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の安定性解析（森北出版，東京，2023 年出版予定）,8 章.
10) D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, (Cambridge Univ. Press, London, 1974), p. 26.
11) T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, (Math, Soc., Tokyo, 1966), p.154.