Qualitative Analysis to Solutions for Equations via Fixed Point Theorems II - Asymptotic Equivalence of Ordinary Differential Equations-

Seiji Saito*

(Received January 23, 2023)

In this article we deal with various of kinds of definitions of the asymptotic equivalence of ordinary differential equations and show and prove sufficient conditions for the asymptotic equivalence by applying fixed point theorems.

Key words : fixed point theorem, ordinary differential equation, stability, boundedness, asymptotic equivalence.

キーワード : 不動点定理，常微分方程式，安定性，有界性，漸近同値.

不動点定理による方程式の定性解析 II - 常微分方程式の漸近同値性 -

齋藤誠慈

1　はじめに

ベクトル空間 V 上の写像 $T: V \to V$ の不動点 $x_e \in V$ とは，$T(x_e) = x_e$ を満たす点をいう．

例 1.1 (1) 実数 $x \in \boldsymbol{R}$ として線形関数 $T_1(x) = x$ に関し，$x = T_1(x) = x$ を満たす点は，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ であるから，T_1 の不動点 x_e は任意の実数である．

(2) $x \in \boldsymbol{R}$ として 1 次関数 $T_2(x) = x + 1$ とする．不動点が存在すると仮定すると $x = x + 1$ が成り立つ．これは矛盾で，T_2 の不動点は存在しない．

(3) $x \in \boldsymbol{R}$ として 2 次関数 $T_3(x) = x^2$ とする．$x = x^2$ を仮定すると，T_3 の不動点は $x = 0, 1$ である．

(4)（常微分方程式と不動点）自然数 m，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$，区間 $\boldsymbol{R}_+ = [0, \infty)$ とし，関数 $f: \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は連続とする．次の常微分方程式

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

（$t \in \boldsymbol{R}_+$，$x(t) \in \boldsymbol{R}^m$）につき，初期条件

$$x(\tau) = \xi \tag{1.2}$$

を満たす解を $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ （$\tau \geq 0$ を初期時間，$\xi \in \boldsymbol{R}^m$ を初期値という）と表す．C^1 級の関数 $x(t)$（定義域 J）が常微分方程式の初期値問題 ((1.1),(1.2)) を満たすことは，次の積分方程式を満たすことと同値である．

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds \quad (t \in J) \tag{1.3}$$

ここで，写像 $\mathcal{V} : C(\boldsymbol{R}_+) \to C(\boldsymbol{R}_+)$ を，$[\mathcal{V}(x)](t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds$ と定義する．このとき，

「$\mathcal{V}$ の不動点 $x_e = \mathcal{V}(x_e)$」⇔「$x_e \in C(\boldsymbol{R}_+)$ は，初期値問題 ((1.1),(1.2)) の解」.

注意 1.2 初期値問題 ((1.1),(1.2)) の解 $x(t)$ の存在に関し，関数 $f(t, x)$ は連続であれば，局所的に存在する（Peano の定理，ペアノ）.

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6702, E-mail : ssaito@mail.doshisha.ac.jp

本研究では，2つの常微分方程式の解に関する漸近同値性の定義を複数述べ，不動点定理等を応用し，漸近同値性の十分条件を与える．

2 漸近同値性の定義

本節では，2つの常微分方程式に関し種々の漸近同値性に関する定義を述べる．2つの関数 $X, Y : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は連続とする．

2つの常微分方程式の漸近同値を議論するとき，解の有界性，あるいは安定性を仮定することがある．

$$x'(t) = X(t, x(t)) \tag{2.4}$$

$$y'(t) = Y(t, y(t)) \tag{2.5}$$

記号 $||x||$ は $x \in \boldsymbol{R}^m$ のユークリッド・ノルムとする．

定義 2.1 式 (2.4) は一様有界，あるいは式 (2.4) の解は一様有界（Uniformly Bounded [UB]）であるとは，すべての解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は，初期値 ξ の大きさ $||\xi||$ に応じて，解の有界性 $||x(t)||$ が決まることである．詳しくは，任意の $\alpha > 0$ に対し，ある正数 $\beta > \alpha$ が存在し，任意の初期時間 $\tau \geq 0$ と任意の初期値 ξ（$||\xi|| < \alpha$）につき，任意の解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は次式を満たすことである．

$$||x(t)|| < \beta \ (t \geq \tau).$$

定義 2.2 式 (2.4) に関し，等式 $X(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成立，すなわち式 (2.4) はゼロ解 $x = \mathbf{0}$ をもつとする．式 (2.4) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は一様安定（[US]，Uniformly Stable）であるとは，すべての解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は，初期値 ξ の大きさ $||\xi||$ に応じて，解の微小の程度 $||x(t)||$ が決まることである．詳しくは，任意の微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，任意の初期時間 $\tau \geq 0$ と任意の初期値 ξ（$||\xi|| < \delta$）につき，任意の解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は次式を満たすことである．

$$||x(t)|| < \varepsilon \ (t \geq \tau).$$

以下の定義では，参考文献の表現を引用する．

定義 2.3 （文献 2，$\Delta_S(\mathcal{I})$ 漸近同値）非減少の連続関数 $\mathcal{I} : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}_+$，$S \subset \boldsymbol{R}^m$ として，次の集合を定める．

$$\Delta_S(\mathcal{I}) = \{(t, x) : x \in S, t > \mathcal{I}(||x||)\}.$$

式 (2.4)，(2.5) は集合 $S_0 \subset S$ につき，漸近同値（本研究では，$\Delta_{S_0}(\mathcal{I})$ 漸近同値という）であるとは，次の条件 (1) - (3) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.4)，(2.5) につき，$\Delta_{S_0}(\mathcal{I})$ から出る解はすべて，$t \to \infty$ で存在する．

(2) 任意のコンパクト集合 $C \subset S_0$ に対し，実数 $T_C \geq 0$ が存在し，式 (2.4) の任意の $(\tau_1, \xi_1) \in \Delta_C(\mathcal{I})$ から出る解 $x(t) = x(t; \tau_1, \xi_1)$ と，任意の $\tau_2 > T_C$ に対し，ある $\xi_2 \in S$ が存在し，$(\tau_2, \xi_2) \in \Delta_S(\mathcal{I})$ なる解 $y(t) = y(t; \tau_2, \xi_2)$ が存在して，次式が成り立つ．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

(3) (2) の逆が成り立つ．すなわち，任意のコンパクト集合 $C \subset S_0$ に対し，式 (2.5) の任意の $(\tau_2, \xi_2) \in \Delta_C(\mathcal{I})$ から出る解 $y(t) = y(t; \tau_2, \xi_2)$ と，任意の $\tau_1 > T_C$ に対し，ある $\xi_1 \in S$ が存在し，$(\tau_1, \xi_1) \in \Delta_S(\mathcal{I})$ なる解 $x(t) = x(t; \tau_1, \xi_1)$ が存在して，次式が成り立つ．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

定義 2.4 （文献 8，p.173，ゼロ近傍漸近同値）式 (2.4)，(2.5) が漸近同値（本研究では，ゼロ近傍漸近同値という）であるとは，次の 2 条件 (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.4) に関し，微小な集合 $B_1 \subset \boldsymbol{R}^m$ が存在し，任意の $\tau_1 \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の $\xi_1 \in B_1$ に対する解 $x(t) = x(t; \tau_1, \xi_1)$ について，式 (2.5) のある解 $y(t)$ は，次式を満たす．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

(2) (1) の逆も成り立つ．すなわち，式 (2.5) に関し，微小な集合 $B_2 \subset \boldsymbol{R}^m$ が存在し，任意の $\tau_2 \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の $\xi_2 \in B_2$ に対する解 $y(t) = y(t; \tau_2, \xi_2)$ について，式 (2.4) のある解 $x(t)$ は，次式を満たす．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

定義 2.5 （文献 9，p.151，有界漸近同値）式 (2.4)，(2.5) が漸近同値（本研究では有界漸近同値という）であるとは，次の条件 (1) - (3) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.4) は，一様有界 [UB].

(2) 式 (2.5) は，一様有界 [UB].

(3) 式 (2.4) の任意の解 $x(t)$ に対し，式 (2.5) のある解 $y(t)$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

(4) (3) の逆が成り立つ．すなわち，式 (2.5) の任意の解 $y(t)$ に対し，式 (2.4) のある解 $x(t)$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||x(t) - y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

多くの従来の定理において，解の有界性あるいはゼロ解 $x = \mathbf{0}$ の安定性を与える十分条件下で考察をしている．本研究報告では同様に，解は有界性あるいはゼロ解 $x = \mathbf{0}$ の安定性下で，2 式 (2.4)，(2.5) の漸近同値性を議論する．文献 9) と同様に安定漸近同値性を定義する．

定義 2.6 （安定漸近同値）2 式 (2.4)，(2.5) において，$X(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ かつ $Y(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を仮定する．2 式 (2.4)，(2.5) が安定漸近同値であるとは，次の (1) - (4) が成り立つときをいう．

(1) 式 (2.4) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は，一様安定 [US].

(2) 式 (2.5) のゼロ解 $y = \mathbf{0}$ は，一様安定 [US].

(3) 式 (2.4) に関し，微小な集合 $B_1 \subset \boldsymbol{R}^m$ が存在し，任意の $\tau_1 \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の $\xi_1 \in B_1$ に対する解 $x(t) =$

$x(t;\tau_1,\xi_1)$ について，式 (2.5) のある解 $y(t)$ は，次式を満たす．

$$||x(t)-y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

(4) (3) の逆も成り立つ．すなわち，式 (2.5) に関し，微小な集合 $B_2 \subset \boldsymbol{R}^m$ が存在し，任意の $\tau_2 \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の $\xi_2 \in B_2$ に対する解 $y(t) = y(t;\tau_2,\xi_2)$ について，式 (2.4) のある解 $x(t)$ は，次式を満たす．

$$||x(t)-y(t)|| \to 0 \ (t \to \infty).$$

定義 2.3 では，特定な関数 $\Delta_S(\mathcal{I})$ に関する 2 式の漸近同値性を定めている．定義 2.4 では，2 式の原点付近から出発する解についての漸近同値性，定義 2.5 では，2 式の解が一様有界の下での漸近同値性，定義 2.6 では，2 式の解が一様安定の下での漸近同値性に関する定義を与えている．本研究では，定義 2.5，定義 2.6 に関して議論する．

3　不動点定理等の準備

線形積分方程式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds \tag{3.6}$$

（$t \geq t_0 \geq 0$，行列 $A: m\times m$ は $\boldsymbol{R}_+$ 上で連続，$x(t), x_0 \in \boldsymbol{R}^m$）を考える．本節では，方程式の解の定性解析について考察するのに必要な不動点定理等を述べる．

「１」Gronwall（グロンウォール）の不等式 [10)]

定理 3.1　連続関数 $u, g: I \to \boldsymbol{R}_+$ と定数 $K \geq 0$ に関し，次式が成り立つ．

$$u(t) \leq K + \int_a^t g(s)u(s)ds \ (a, t \in I)$$

このとき，$u(t) \leq Ke^{\int_a^t g(s)ds}$ $(t \in I)$ が成り立つ．

上記の定理に関し，積分方程式 (3.6) に対し，$u(t) = ||x(t)||$，$I = [t_0, b]$（$b \geq t_0$）とおけば，

$$u(t) \leq ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^t ||A(s)||u(s)ds$$

から，$||x(t)|| \leq ||x(t_0)||e^{\int_{t_0}^t ||A(s)||ds}$ $(t \in I)$ を得る．

「２」Bihari（ビハリ）の不等式 [8)p.31]

定理 3.2　区間 $[a,b]$ とし，関数 $u, g: [a,b] \to \boldsymbol{R}_+$ は非負で連続として，また関数 $h: [a,b] \to \boldsymbol{R}_+$ は $h(t) > 0$，連続で，広義単調増加関数と，定数 $K \geq 0$ に対し，次式が成り立つとする．

$$u(t) \leq K + \int_a^t g(s)h(u(s))ds \ (t \in [a,b]).$$

また関数 $H(t)$ を $h(t) > 0$ の原始関数とする．

このとき，次式を得る．

$$u(t) \leq H^{-1}\Big(H(K) + \int_a^t g(s)ds\Big) \ (t \in [a,b]).$$

「３」Schauder（シャウダー）の不動点定理 [1)p.26] [7)p.25]

定理 3.3　バナッハ空間 X の部分集合 B 上の写像 $\mathcal{V}: B \to X$ は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 集合 $B \subset X$ は，閉凸．

(2) 中への写像：$\mathcal{V}(B) \subset B$.

(3) 写像 $\mathcal{V}: B \to B$ は連続．

(4) 像 $\mathcal{V}(B)$ は相対コンパクト．

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は B 内に少なくとも 1 つの不動点を有する．

「４」Ascoli-Arzelá（アスコリ・アルツェラ）の定理 [1) p.22] [3)p.75]

定理 3.4　関数集合 $S = \{f: I \to \boldsymbol{R}^m, f \text{ は連続}\}$（区間 $I = [a,b]$）は，次の 2 条件を満たすとする．

(1) S は一様有界，すなわち，ある $M > 0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\max_{t\in I} ||f(t)|| \leq M \ (f \in S).$$

(2) S は同程度連続，すなわち，微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||f(t) - f(s)|| < \varepsilon \ (f \in S,\ t, s \in I,\ |t-s| < \delta).$$

このとき，集合 $S \subset X$ は相対コンパクトである．

4　漸近同値に関する定理

次の非斉次線形系 (4.7) と摂動系 (4.8) を考える．

$$x'(t) = Ax(t) + p(t) \tag{4.7}$$

$$y'(t) = Ay(t) + p(t) + f(t, y(t)) \tag{4.8}$$

定行列 $A: m \times m$ と，関数 $p: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$，$f: \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は連続とする．

次の定理は，文献 9)p. 152 による．

定理 4.1 次の条件 (1),(2) を仮定する．

(1) 非斉次線形系 (4.7) は，一様有界．

(2) 次の 3 条件を満たす連続関数 $\lambda, \varphi: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が存在する．

$$||f(t,x)|| \leq \lambda(t)\varphi(||x||) \ (t \geq 0,\ x \in \boldsymbol{R}^m),$$

$$\int_0^\infty \lambda(s)ds < \infty,\ \int_0^\infty \frac{1}{\varphi(r)}dr = \infty.$$

このとき，2 式 (4.7)，(4.8) は有界漸近同値である．

上記の定理の 1 つの拡張として，次の例 4.2 を得る．

例 4.2 2 つの方程式

$$x'(t) = A(t)x(t) + p(t) \tag{4.9}$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + p(t) + f(t, y(t)) \tag{4.10}$$

は，次の条件 (1) - (3) を満たすとする．

(1) 連続行列 A からなる線形系 (4.9) の解は，一様有

界．

(2) 連続関数 $\lambda : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ と $\mu : \boldsymbol{R}_+ \to (0,\infty)$ が存在し，

$||f(t,y)|| \le \lambda(t)\mu(||y||)$ を満たし，次の (2a), (2b) が成り立つ．

(2a) $\mu : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ は連続で，$\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)ds < \infty$.

(2b) $\displaystyle\int_0^\infty \lambda(s)ds < \infty$.

(3) 線形非斉次式 (4.9) の基本行列 X（$X(0)=I$，単位行列）に関し，正数 K に対し，次式が成り立つ．

$||X(t)X^{-1}(s)|| < K$（$t \ge s \ge 0$）．

このとき，次の結論 (I)，(II) を得る．

(I) 非線形系 (4.10) の解は，一様有界である．

(II) 線形系 (4.9)，非線形系 (4.10) は，有界漸近同値である．

証明　(I) 条件 (1) から，線形非斉次式 (4.9) の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は基本行列 X により，$x(t) = X(t)X^{-1}(\tau)\xi + \int_\tau^t X(t)X^{-1}(s)p(s)ds$ である．一様有界性から，任意の $\alpha > 0$ に対し十分大の $\beta > \alpha$ をとれば，任意の初期条件 $x(\tau) = \xi$（$\tau \ge 0$，$||\xi|| < \alpha$）につき，解は $||x(t)|| < \beta$（$t \ge \tau$）．

式 (4.10) の解 $y(t) = y(t;\tau,\xi)$ は次式の通り．

$y(t) = X(t)X^{-1}(\tau)\xi$
$\quad + \int_\tau^t X(t)X^{-1}(s)\{p(s) + f(s,y(s))\}ds$
$= x(t;\tau,\xi) + \int_\tau^t X(t)X^{-1}(s)f(s,y(s))ds.$

よって，$||y(t)||$
$\le \beta + K\int_0^t ||f(s,y(s))||ds$
$\le \beta + K\int_0^t \lambda(s)\mu(||y(s)||)ds.$

Bihari の不等式から，$H(r) = \int_0^r \frac{ds}{\mu(s)}$ として，

$H(||y(t)||) \le H\beta + K\int_0^t \lambda(s)ds \le B_1$

なる正数 B_1 が存在する．ゆえに，$||y(t)|| \le H^{-1}(B_1)$ から，式 (4.10) は一様有界である．

(II) 任意の $\tau \ge 0$ と任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ に関し，線形非斉次式 (4.9) の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ を固定する．非線形系 (4.10) の解 $y(t) = y(t;\tau,\xi_1)$ は次式を満たす．

$y(t) = x(t;\tau,\xi) - X(t)\int_t^\infty X^{-1}(s)\{p(s) + f(s,y(s))\}ds,$

$y(\tau) = \xi_1$
$= \xi - X(\tau)\int_\tau^\infty X^{-1}(s)f(s,y(s))ds.$

τ は十分大であれば，$||\xi - \xi_1||$ は微小になり得る．実際，$||y(s)||$（$s \ge \tau$）は有界で，$||X(t)X^{-1}(s)|| \le K$（$t \ge s \ge 0$）より．また，$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - y(t)|| = 0$ が成り立つ．

逆に，式 (4.10) の解 $y(t) = y(t;\tau,\xi_1)$ を固定し，

$c = \xi_1 + X(\tau)\int_\tau^\infty X^{-1}(s)f(s,y(s))ds$

とおくと，次式を得る．

$y(t;\tau,\xi_1) = x(t;\tau,c)$
$\quad - X(t)\int_t^\infty X^{-1}(s)f(s,y(s))ds.$

また $x(t;\tau,c)$ は，線形系 (4.9) の解で，$\lim_{t\to\infty} ||y(t;\tau,\xi_1) - x(t;\tau,c)|| = 0$ が成り立つ．

次の定理は，文献 4)，8) による．本研究では，別証明を与える．

定理 4.3 次の線形系 (4.11)，(4.12)

$$x'(t) = Ax(t) \tag{4.11}$$
$$y'(t) = (A + B(t))y(t) \tag{4.12}$$

を考え，次の条件 (1)，(2) を仮定する．

(1) 定行列 $A : m \times m$ の固有値 λ はすべて，実部 $\mathrm{Re}(\lambda) \le 0$ とし，$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ ならば，$\lambda \in \boldsymbol{C}$ は単根である．

(2) 連続行列 $B(t)$ は，$\displaystyle\int_0^\infty ||B(t)||ds < \infty$.

このとき，式 (4.11)，(4.12) は有界漸近同値，かつ安定漸近同値である．

注意 4.4 (i) 行列 $A : m \times m$ の固有値 $\lambda_k \in \boldsymbol{C}$（$1 \le k \le m$）が単根であるとは，$A$ の特性多項式 $P(t) = \det(tI - A)$ の因数分解において，因子 $t - \lambda_k$ はちょうど 1 度現れることである．そのとき，基本行列 $X(t)$（$X(0) = I$）につき，ある正数 $M, c > 0$ が存在し，次式が成り立つ．

$||X(t)X^{-1}(s)|| \le M(e^{-c(t-s)}$
$\quad + |\cos c(t-s)| + |\sin c(t-s)|)$（$t \ge s$）

(ii) 線形系 $x'(t) = A(t)x(t)$ について，一様有界であることと，ゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ が一様安定であることは同値となる．[8)p.140]

別証明　有界漸近同値について．条件 (1) から，式 (L) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は一様安定（かつ式 (4.11) は一様有界）である．また線形系 (4.11) の基本行列を $X(t)$（$X(0) = I$）とすると，線形摂動系 (4.12) の解 $y(t) = y(t;\tau_2,\xi_2)$ は次式の通り．

$$\begin{aligned} y(t) &= X(t)X^{-1}(\tau_2)\xi_2 \\ &+ X(t)\int_{\tau_2}^t X^{-1}(s)B(s)y(s)ds \end{aligned} \tag{4.13}$$

（$t \ge \tau_2$）．ある定数 $M > 0$ が存在し，$||X(t)X^{-1}(s)|| \le M$（$t \ge s \ge 0$）が成り立つ．よって，Gronwall の不等式から，

$||y(t)|| \le M||\xi_2||e^{M\int_{\tau_2}^t ||B(s)||ds}$

（$t \ge \tau_2$）．条件 (2) から，式 (4.12) のゼロ解は一様安定（かつ式 (4.12) は一様有界）である．式 (4.13) において，$x(t;\tau_2,\xi_2) = X(t)X^{-1}(\tau_2)\xi_2$ は式 (4.11) の解であるから

$||x(t;\tau_2,\xi_2) - y(t;\tau_2,\xi_2)||$
$= ||X(t)\int_{\tau_2}^t X^{-1}(s)B(s)y(s)ds||.$

また，条件 (1) からある定数 $c > 0$ が存在して，

$||X(t)X^{-1}(s)|| \le M(e^{-c(t-s)}$
$\quad + |\cos c(t-s)| + |\sin c(t-s)|),$

より，

$||x(t;\tau_2,\xi_2)-y(t;\tau_2,\xi_2)|| \to 0$（$t\to\infty$）.
ゆえに，安定漸近同値，かつ有界漸近同値がいえる．

また文献 5)，6) では，次の定理 4.5 が証明されている．準線形系

$$x'(t)=A(t,x(t))x(t)+F(t,x(t)) \tag{4.14}$$

と線形系

$$y'(t)=B(t)y(t) \tag{4.15}$$

を考える．行列 $A:m\times m$ は $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^m$ 上で連続，関数 $F:\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ は連続，行列 $B:m\times m$ は $\boldsymbol{R}_+$ 上で連続とする．

線形系 (4.15) のゼロ解が一様安定であるとき，X_B（$X_B(0)=I$）をその線形系の基本行列とすると，次式が成り立つ [8]．

$\exists K>1:\forall t\geq\forall s\geq 0$，$||X_B(t)X_B^{-1}(s)||\leq K$.

次の集合を定める．$r>0$ とする．

$S^r=\{y\in C(\boldsymbol{R}_+):||y||_\infty\leq r\}$.

定理 4.3 の拡張が，得られている．[5) 6)]

定理 4.5 準線形系 (4.14) と線形系 (4.15) に関し，次の条件 (1) - (5) が成り立つとする．

(1) 線形系 (4.15) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は一様安定 [US].

(2) ある定数 $\delta_1>0$ が存在し，任意の微小 $r\geq 0$ につき，次式が成り立つ．

$$\int_0^\infty \sup_{||x||\leq r}||A(s,x)-B(s)||ds\leq\delta_1.$$

(3) 準線形系 (4.14) の初期値問題の解は，一意的である．

(4) 定数 $C>0$ は，$C<1/(Ke^{K\delta_1})$ を満たす．

(5) 準線形系 (4.14) の摂動項 F は，条件 $F(t,\mathbf{0})\equiv\mathbf{0}$ と，次式を満たす．

$$\liminf_{p\to+0}\frac{1}{p}\int_0^\infty\sup_{||x||\leq p}||F(s,x)||ds\leq C.$$

このとき，結論 (I) - (III) を得る．

(I) 定数 $r>0$ を固定する．任意の $y\in S^r$ に関し，線形系 $x'(t)=A(t,y(t))x(t)$ の基本行列を X_y（$X_y(0)=I$）とする．このとき，次式が成り立つ．

$$||X_y(t)X_y^{-1}(s)||\leq Ke^{K\delta_1}.$$

(II) 準線形系 (4.14) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は一様安定 [US] である．

(III) 準線形系 (4.14) と線形系 (4.15) は，安定漸近同値である．

次の例では，線形系 (4.15) が一様有界の下，有界漸近同値性を与えている．

例 4.6 （文献 6，6 章）準線形系 (4.14) と線形系 (4.15) に関し，次の条件 (1) - (5) が成り立つとする．

(1) 線形系 (4.15) は一様有界 [UB]，すなわち，$||X_B(t)X_B^{-1}(s)||\leq K(>1)$（$t\geq s$）とする．

(2) ある定数 $\delta_1>0$ が存在し，任意の $r\geq 0$ につき，次式が成り立つ．

$$\int_0^\infty\sup_{||x||\leq r}||A(s,x)-B(s)||ds\leq\delta_1.$$

(3) 準線形系 (4.14) の初期値問題の解は，一意的である．

(4) 定数 $C>0$ は $C<1/(Ke^{K\delta_1})$ を満たす．

(5) 準線形系 (4.14) の摂動項 F は，次式を満たす．

$$\liminf_{p\to\infty}\frac{1}{p}\int_0^\infty\sup_{||x||\leq p}||F(s,x)||ds\leq C.$$

このとき，結論 (I) - (III) を得る．

(I) 定数 $r>0$ を固定する．任意の $y\in S^r$ に関し，線形系 $x'(t)=A(t,y(t))x(t)$ の基本行列を X_y（$X_y(0)=I$）とする．このとき，次式が成り立つ．

$$||X_y(t)X_y^{-1}(s)||\leq Ke^{K\delta_1}.$$

(II) 準線形系 (4.14) は一様有界 [UB].

(III) 準線形系 (4.14) と線形系 (4.15) は，有界漸近同値である．

証明 (I) $r>0$ に対し，任意の $y\in S^r$ を準線形系 (4.14) の一部 $x'(t)=A(t,y(t))x(t)$ に代入し，斉次線形系 $x'(t)=A(t,y(t))x(t)$ を考える．

$$x'(t)=B(t)x(t)+\{A(t,y(t))-B(t)\}x(t)$$

より，次式が成り立つ．

$$X_y(t)=X_B(t)X_B^{-1}(\tau)X_y(\tau)$$
$$+X_B(t)\int_\tau^t X_B^{-1}(s)(A(s,y(s))-B(s))X_y(s)ds \quad (t\geq\tau).$$

これより，

$$X_y(t)X_y^{-1}(\tau)=X_B(t)X_B^{-1}(\tau)$$
$$+X_B(t)\int_\tau^t X_B^{-1}(s)(A(s,y(s))-B(s))X_y(s)dsX_y^{-1}(\tau)$$

（$t\geq\tau$）より，

$$||X_y(t)X_y^{-1}(\tau)||$$
$$\leq||X_B(t)X_B^{-1}(\tau)||+\int_\tau^t||X_B(t)X_B^{-1}(s)||$$
$$\times||A(s,y(s))-B(s)||||X_y(s)X_y^{-1}(\tau)||ds$$

に対し，Gronwall の不等式を用いると結論を得る．

(II) 文献 5) の証明を参照．Schauder の不動点定理，Gronwall の不等式，Ascoli-Arzelá の定理を用いる．

(III) 初期値 $\xi\in\boldsymbol{R}^m$ を固定する．条件 (5) より，十分大な正 $\beta>\alpha$（$\alpha\geq||\xi||$）に対し，次式が成り立つ．

$\int_0^\infty||F(s,x)||ds\leq\beta C$（$||x||\leq\beta$）.

また次式 (a)，(b) が成り立つとしてよい．

(a) 解 $x(t)=x(t;0,\xi)$ は，$||\xi||\leq\alpha$，かつ

$||x(t)||\leq\beta$ （$t\in\boldsymbol{R}_+$），

(b) $\frac{Ke^{K\delta_1}\alpha}{1-Ke^{K\delta_1}}<\beta$.

このとき，$y\in C(\boldsymbol{R}_+)$ は，$y(0)=\xi$（$||\xi||\leq\alpha$），$||y||_\infty=\max_{t\geq 0}||y(t)||\leq\beta$ ならば，非斉次線形系

$$x'(t)=A(t,y(t))x(t)+F(t,y(t)) \quad (t\in\boldsymbol{R}_+)$$

の解 $x_y(t)=x(t;0,\xi)$ は，$||x_y(t)||\leq\beta$（$t\in\boldsymbol{R}_+$）を満たす．実際，

$$x_y(t)=X_y(t)\xi+\int_0^t X_y(t)X_y^{-1}(s)F(s,y(s))ds$$

（$t\in\boldsymbol{R}_+$）より Gronwall の不等式から，

$$||x_y(t)||\leq Ke^{K\delta_1}\alpha+Ke^{K\delta_1}C\beta<\beta$$

（$t\in\boldsymbol{R}_+$）を得る．

今後，線形系 (4.15) の解 $x(t) = x(t;0,\xi)$ に対し，$\lim_{t\to\infty}||x(t)-z(t)||=0$ なる準線形系 (4.14) の解 $z(t)=z(t;0,\xi)$ の存在を示す．点列 $\{\varepsilon_n>0 : n\in\boldsymbol{N}\}$ を次に定める．

$\frac{1}{2}\varepsilon_1 = K\{\int_{t_1}^{\infty}\sup_{||x||\le\beta}||A(s,x)-B(s)||\beta ds$
$+\int_0^{\infty}\sup_{||x||\le\beta}||F(s,x)||ds\}$,

$\varepsilon_{n+1}<\frac{\varepsilon_n}{2}$ $(n\ge 1)$．

点列 $\{t_n\ge 0 : t_0=0, t_{n-1}<t_n (n\ge 1)$,
$\lim_{n\to\infty} t_n=\infty$．かつ次の条件 (4.16) を満たす $\}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon_n &\ge K\int_{t_n}^{\infty}\sup_{||x||\le\beta}\{||A(s,x)-B(s)||\beta ds\\ &+\sup_{||x||\le\beta}||F(s,x)||\}ds\ (n\ge 1).\end{aligned} \tag{4.16}$$

ここで，$J_n=[0,t_n]$ $(n\ge 1)$，点列 $\{m(n)\ge 0 : n\ge 1\}$，関数集合 $\{E(n) : n\ge 1\}$ を定義する．

$m(n)=\max\{||A(t,x)||\beta+||F(t,x)|| :$
$t\in J_n, ||x||\le\beta\}$,

$E(1)=\{y\in C(\boldsymbol{R}_+) : y(0)=\xi$,
$||y(t)||\le\beta (t\in J_1)$，
$y(t)=y(1)$ $(t\ge 1)$，
$||y(t)-y(s)||\le m(1)|t-s|$ $(t,s\in J_1)$，
$||y(t)-x(t)||\le\varepsilon_1 (t\in J_1)\}$,

$E(n)=\{y\in C(\boldsymbol{R}_+) : y(t)\in E(n-1)$ $(t\in J_{n-1})$,
$y(t)=y(n)$ $(t\ge n\ge 2)$，$||y(t)||\le\beta(t\in J_n)$，
$||y(t)-y(s)||\le m(n)|t-s|$ $(t,s\in J_n)$,
$||y(t)-x(t)||\le\varepsilon_n(t\in[t_{n-1},t_n])\}$.

自然数 $n\ge 1$ と $y\in E(n)$ $(y(0)=\xi$，$||y||_\infty\le\beta)$ を固定し，準線形系 (4.14) を線形化する．

$u'(t)=A(t,y(t))u(t)+F(t,y(t))$,
$u(0)=y(0)=x(0)=\xi$.

その一意解 u_y は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}u_y(t)&=X_y(t)X_y^{-1}(0)\xi\\ &+\int_0^t X_y(t)X_y^{-1}(s)F(s,y(s))ds\end{aligned} \tag{4.17}$$
$(t\ge 0)$

(i) $u_y\in E(1)$ を示す．$u_y(0)=\xi=y(0)=x(0)$.
$||u_y(t)||\le Ke^{K\delta_1}\alpha+Ke^{K\delta_1}\beta C\le\beta$ $(t\in J_1)$．
また，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}u_y(t) &= y(0)+\int_0^t A(s,y(s))u_y(s)ds\\ &+\int_0^t F(s,y(s))ds.\end{aligned} \tag{4.18}$$

式 (4.18) から，$||u_y(t)-u_y(s)||$
$\le|\int_t^s\sup_{p\in J_1,||u||\le\beta}\{||A(p,u)||\beta+||F(p,u)||\}ds$
$\le m(1)|t-s|$ $(t\in J_1)$．

さらに，

$u'(t)=B(t)u(t)+\{A(t,y(t))-B(t)\}u(t)+F(t,y(t))$
より，次式を得る．

$$\begin{aligned}u_y(t) &= X_B(t)X_B^{-1}(0)\xi\\ &+\int_0^t X_B(t)X_B^{-1}(s)\{A(s,y(s))-B(s)\}u_y(s)ds\\ &+\int_0^t X_B(t)X_B^{-1}(s)F(s,y(s))ds\end{aligned} \tag{4.19}$$

であり，
$||u_y(t)-x(t)||$
$\le\int_0^{\infty}||X_B(t)X_B^{-1}(s)||||A(s,y(s))-B(s)||ds\beta$
$+\int_0^{\infty}||X_B(t)X_B^{-1}(s)||||F(s,y(s))||ds=\frac{\varepsilon_1}{4}\le\varepsilon_1$
$(t\in J_1)$．

(ii) $u_y\in E(2)$ を示す．まず，$u_y(t)\in E(1)$ $(t\in J_1)$ は成り立つ．式 (4.17) から，$||u_y(t)||\le\beta$ $(t\in J_2)$．
また，式 (4.18) から，$||u_y(t)-u_y(s)||$
$\le|\int_t^s\sup_{p\in J_2,||u||\le\beta}\{||A(p,u)||\beta+||F(p,u)||\}ds$
$\le m(2)|t-s|$ $(t\in J_2)$．

さらに，式 (4.19) と同様に，$t\in[t_1,t_2]$ のとき
$u_y(t)=X_B(t)X_B^{-1}(t_1)u_y(t_1)$
$+\int_{t_1}^t X_B(t)X_B^{-1}(s)\{A(s,y(s))-B(s)\}u_y(s)ds$
$+\int_{t_1}^t X_B(t)X_B^{-1}(s)F(s,y(s))ds$
より，$t\in[t_1,t_2]$ のとき，
$||u_y(t)-x(t)||$
$\le+\int_{t_1}^{\infty}||X_B(t)X_B^{-1}(s)||\{||A(s,y(s))-B(s)||ds\beta$
$+||F(s,y(s))||\}ds\le\frac{\varepsilon_1}{4}<\varepsilon_1$
を得る．同様に $u_y\in E(n)$ $(n\ge 2)$．

各 $n\in\boldsymbol{N}$ に関し，写像
$\mathcal{P} : E(n)\to E(n)$ を $\mathcal{P}(y)(t)=u_y(t)$ $(t\in\boldsymbol{R}_+)$
と定める．集合 $E(n)\subset C(\boldsymbol{R}_+)$ は閉凸コンパクトである．$\mathcal{P}$ は，$E(n)$ 上で連続．よって，Schauder の不動点定理から，不動点 $y_n\in E(n)$，すなわち

$$\begin{aligned}y_n(t)&=y_n(0)+\int_0^t A(s,y_n(s))y_n(s)ds\\ &+\int_0^t F(s,y_n(s))ds\ (t\in J_n)\end{aligned} \tag{4.20}$$

が存在し，次の条件がすべて成り立つ．

$$\begin{aligned}&||y_n(t)||\le\beta,\ y(t)=y(n)\ (t\ge n),\\ &||y_n(t)-y_n(s)||\le m(n)|t-s|\ (t,s\in J_n),\\ &||y_n(t)-x(t)||\le\varepsilon_n(t\in[t_{n-1},t_n])\end{aligned} \tag{4.21}$$

なお $t\to\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[t_{n-1},t_n]}||y_n(t)-x(t)||=0.$$

さらに，次の関数列 $\{z_n\in C(\boldsymbol{R}_+) : n\in\boldsymbol{N}\}$ を定める．

$$z_n(t)=\begin{cases} y_n(t) & (t\in[0,t_n]=J_n)\\ y_n(t_n) & (t\ge t_n)\end{cases}.$$

（これは既に，定義されている）

Ascoli-Arzelà の定理から，部分列 $\{z_{n(k)}\in E(n(k)) :$

$k \in \boldsymbol{N}\} \subset \{z_n \in E(n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ と $z_0 \in C(\boldsymbol{R}_+)$ が存在し，部分列 $\{z_{n(k)} : k \in \boldsymbol{N}\}$ は，z_0 に $\boldsymbol{R}_+$ 上で広義一様収束する．また，z_0 は初期条件 $z_0(0) = \xi$ を満たす準線形系 (4.14) の解で，$\lim_{t\to\infty} ||z_0(t) - x(t)|| = 0$ を満たす．

逆を示す．準線形系 (4.15) のゼロ解は一様有界であるから，十分大の $\beta > \alpha > ||\xi||$（初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$）をとれば，次式 (i) - (iii) が成り立つ．

(i) $\int_0^\infty ||F(s,x)||ds \leq \beta C$（$||x|| \leq \beta$）．

(ii) 線形系 (4.15) の解 $x(t) = x(t;0,\xi)$ は，$||x(t)|| \leq \beta$（$t \geq 0$，$||\xi|| \leq \alpha$）．

(iii) 準線形系 (4.15) 解 $z(t) = z(t;0,\xi)$ は，$||\xi|| \leq \alpha$ ならば，$||z(t)|| \leq \beta$ （$t \in \boldsymbol{R}_+$），

今後，準線形系 (4.14) の解 $y(t) = y(t;0,\xi)$ に対し，$\lim_{t\to\infty} ||y(t) - z(t)|| = 0$ なる線形系 (4.15) の解 $z(t) = z(t;0,\xi)$ の存在を示す．条件 (3) から，関数 $x \in E_1(n) \subset C(\boldsymbol{R}_+)$（$n \in \boldsymbol{N}$，$E_1(n)$ は後述，$x(0) = \xi$）から準線形系 (4.14) を線形化した $y'(t) = A(t,x(t))y(t) + F(t,x(t))$ から得られる解 y_n（$n \in \boldsymbol{N}$）の点列 $\{y_n \in C(\boldsymbol{R}_+) : n \in \boldsymbol{N}\}$ に対し，Schauder の不動点定理を応用して得られる準線形系 (4.14) の解（不動点）$y(t) = y(t;0,\xi)$ は，線形系 (4.15) の解 $z(t) = z(t;0,\xi)$ に，$t \to \infty$ のとき漸近することを示せばよい．線形系 (4.15) の解 $z(t) = z(t;0,\xi)$ を固定する．

点列 $\{\varepsilon_n > 0 : n \in \boldsymbol{N}, \varepsilon_{n+1} < \dfrac{\varepsilon_n}{2}, \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\}$,

$\{t_n \geq 0 : n \in \boldsymbol{Z}_+, t_n < t_{n+1}, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty\}$,

$\{m_1(n) \geq 0 : n \in \boldsymbol{N}\}$,

$E_1(n) = \{x \in C(\boldsymbol{R}_+) : n \in \boldsymbol{N}\}$ を次に定める．

$\frac{1}{2}\varepsilon_1 = K\{\int_{t_1}^\infty \sup_{||x||\leq\beta} ||A(s,x) - B(s)||\beta ds$

$+ \int_{t_1}^\infty \sup_{||x||\leq\beta} ||F(s,x)||ds\}$，$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{2}$ （$n \geq 1$）．

点列 $\{t_n \geq 0 : t_0 = 0, t_{n-1} < t_n (n \geq 1)$,

$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$．かつ次条件(4.22) を満たす $\}$：

$$\frac{1}{2}\varepsilon_n \geq K \int_{t_n}^\infty \sup_{||x||\leq\beta} \{||A(s,x) - B(s)||ds + \sup_{||x||\leq a_1} ||F(s,x)||\}ds \ (n \geq 1) \tag{4.22}$$

ここで，$J_n = [0, t_n]$（$n \geq 1$）とし，次の点列 $\{m_1(n) \geq 0 : n \geq 1\}$，関数集合 $\{E_1(n) : n \geq 1\}$ を定義する．

$m_1(n) = \max\{||A(s,x)||\beta + ||F(s,x)|| :$
$s \in J_n, ||x|| \leq \beta\}$,

$E_1(1) = \{x \in C(\boldsymbol{R}_+) : x(0) = \xi$,
$x(t) = x(1)$ $(t \geq 1)$，
$||x(t)|| \leq \beta (t \in J_1)$，
$||x(t) - x(s)|| \leq m(1)|t-s|$ $(t, s \in J_1)$，
$||x(t) - z(t)|| \leq \varepsilon_1 (t \in [0, t_1])$ $\}$,

$E_1(n) = \{x \in C(\boldsymbol{R}_+) : x(t) \in E_1(n-1)(t \in J_{n-1})$,
$x(t) = x(n)$ $(t \geq n)$,
$||x(t)|| \leq \beta (t \in J_n)$，
$||x(t) - x(s)|| \leq m_1(n)|t-s| (t, s \in J_n)$,
$||x(t) - z(t)|| \leq \varepsilon_n (t \in [t_{n-1}, t_n])$ $\}$．

自然数 $n \geq 1$ と $x \in E_1(n)$（$x(0) = \xi$，$||x||_\infty \leq \beta$）を固定し，準線形系 (4.14) を線形化する．

$u'(t) = A(t,x(t))u(t) + F(t,x(t))$,
$u(0) = x(0) = z(0) = \xi$.

その一意解 u_x は，次式で与えられる．

$$u_x(t) = X_x(t)X_x^{-1}(0)\xi + \int_0^t X_x(t)X_x^{-1}(s)F(s,x(s))ds \ (t \geq 0) \tag{4.23}$$

(ai) $u_x \in E_1(1)$（$x \in E_1(1)$）を示す．$u_x(0) = \xi = x(0) = z(0)$．$||u_x(t)|| \leq Ke^{K\delta_1}\alpha + Ke^{K\delta_1}\beta C \leq \beta$（$t \in J_1$）．

また，次式が成り立つ．

$$u_x(t) = x(0) + \int_0^t A(s,x(s))u_x(s)ds + \int_0^t F(s,x(s))ds \tag{4.24}$$

式 (4.24) から，$||u_x(t) - u_x(s)||$
$\leq |\int_t^s \sup_{p\in J_1, ||u||\leq\beta} \{||A(p,u)||\beta + ||F(p,u)||\}ds$
$\leq m(1)|t-s|$（$t \in J_1$）．

さらに，$u_x'(t) = B(t)u_x(t) + \{A(t,x(t)) - B(t)\}u_x(t) + F(t,x(t))$ とみなすと，次式を得る．

$$u_x(t) = X_B(t)X_B^{-1}(0)\xi + \int_0^t X_B(t)X_B^{-1}(s)\{A(s,x(s)) - B(s)\}u_x(s)ds + \int_0^t X_B(t)X_B^{-1}(s)F(s,x(s))ds \tag{4.25}$$

$z(t) = X_B(t)\xi$ であり，$||u_x(t) - z(t)||$
$\leq \int_0^\infty ||X_B(t)X_B^{-1}(s)||||A(s,x(s)) - B(s)||ds\beta$
$+ \int_0^\infty ||X_B(t)X_B^{-1}(s)||||F(s,x(s))||ds = \frac{\varepsilon_1}{2} \leq \varepsilon_1$（$t \in J_1$）．

(aii) $u_x \in E_1(2)$（$x \in E_1(2)$）を示す．まず，$u_x(t) \in E_1(1)$（$t \in J_1$）は成り立つ．式 (4.23) から，$||u_x(t)|| \leq \beta$（$t \in J_2$）．

また，式 (4.24) から，$||u_x(t) - u_x(s)||$
$\leq |\int_t^s \sup_{p\in J_2, ||u||\leq\beta} \{||A(p,u)||\beta + ||F(p,u)||\}ds$
$\leq m(2)|t-s|$（$t \in J_2$）．

さらに，式 (4.25) と同様に，$t \in [t_1, t_2]$ のとき
$u_x(t) = X_B(t)X_B^{-1}(t_1)u_x(t_1)$
$+ \int_{t_1}^t X_B(t)X_B^{-1}(s)\{A(s,x(s)) - B(s)\}u_x(s)ds$
$+ \int_{t_1}^t X_B(t)X_B^{-1}(s)F(s,x(s))ds$
より，$t \in [t_1, t_2]$ のとき，$||u_x(t) - z(t)||$
$\leq + \int_{t_1}^\infty ||X_B(t)X_B^{-1}(s)||\{||A(s,x(s)) - B(s)||ds\beta$
$+ ||F(s,x(s))||\}ds \leq \frac{\varepsilon_2}{2} < \varepsilon_2$ を得るから，$u_x \in E_1(2)$（$x \in E_1(2)$）．同様に $u_x \in E(n)$ （$x \in E_1(n)$，$n \geq 2$）．

各 $n \in \boldsymbol{N}$ に関し，写像

$\mathcal{P}_1 : E_1(n) \to E_1(n)$ を $[\mathcal{P}_1(x)](t) = u_x(t)$（$t \in \boldsymbol{R}_+$）

と定める．集合 $E_1(n) \subset C(\boldsymbol{R}_+)$ は閉凸コンパクトである．$\mathcal{P}_1$ は，$E_1(n)$ 上で連続である．よって，Schauder の不動点定理から，不動点 $u_n \in E_1(n)$，すなわち

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t A(s, u_n(s))u_n(s)ds + \int_0^t F(s, u_n(s))ds \ (t \in J_n) \tag{4.26}$$

が存在し，次の条件がすべて成り立つ．

$$||u_n(t)|| \le \beta,\ u_n(t) = u_n(n) \ (t \ge n)$$
$$||u_n(t) - u_n(s)|| \le m_1(n)|t - s| \quad (t, s \in J_n) \tag{4.27}$$

$||u_n(t) - z(t)|| \le \varepsilon_n \quad (t \in [t_{n-1}, t_n])$

なお $t \to \infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[t_{n-1},t_n]} ||u_n(t) - z(t)|| = 0.$$

さらに，次の関数列 $\{x_n \in C(\boldsymbol{R}_+) : n \in \boldsymbol{N}\}$ を定める．

$$x_n(t) = \begin{cases} u_n(t) & (t \in [0, t_n] = J_n) \\ u_n(t_n) & (t \ge t_n) \end{cases}.$$

（これは既に，定義されている）

Ascoli-Arzelà の定理から，部分列 $\{x_{n(k)} \in E(n(k)) : k \in \boldsymbol{N}\} \subset \{x_n \in E(n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ と $x_0 \in C(\boldsymbol{R}_+)$ が存在し，部分列 $\{x_{n(k)} : k \in \boldsymbol{N}\}$ は，x_0 に $\boldsymbol{R}_+$ 上で広義一様収束する．また，x_0 は初期条件 $x_0(0) = \xi$ を満たす準線形系 (4.14) の解で，$\lim_{t\to\infty} ||x_0(t) - z(t)|| = 0$ を満たす．

最後の例では，文献 1) の問題 8.11（証明なし）について，その証明に関し，考察を与える．

例 4.7 次の 2 式

$$x'(t) = A(t, x(t)) \tag{4.28}$$
$$y'(t) = A(t, y(t)) + F(t, y(t)) \tag{4.29}$$

を考え，次の条件 (1) - (3) を仮定する．

(1) C^1 級の関数 $A(t, x) : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は，$A_x = \frac{\partial A}{\partial x}$ とおき，

$||A_x(t, x)|| \le p(t)$（$x \in \boldsymbol{R}^m$，$t \in \boldsymbol{R}_+$）．

(2) 連続関数 $F(t, x) : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は，

$||F(t, x)|| \le q(t)$（$x \in \boldsymbol{R}^m$，$t \in \boldsymbol{R}_+$）

(3) $\int_0^\infty p(s)ds = P < \infty$，$\int_0^\infty q(s)ds = Q < \infty$.

このとき，結論 (I), (II) を得る．

(I) 式 (4.28) の解はすべて，$t \to \infty$ で存在する．

(II) 式 (4.28) の任意の解 $x(t)$ に対し，摂動系 (4.29) のある解 $y(t)$ が存在して, 次式が成り立つ．

$||x(t) - y(t)|| \to 0$（$t \to \infty$）．

考察 (I) テイラーの定理から

$A(t, x) = A(t, \mathbf{0}) + A_x(t, \theta x)x$（$0 < \theta < 1$）

より，式 (4.28) の一意解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は存在する限り，

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t A_x(s, \theta x(s))x(s)ds + \int_\tau^t A(s, \mathbf{0})ds.$$

よって，

$$||x(t)|| \le ||\xi|| + \int_\tau^t ||A(s, \mathbf{0})||ds + \int_\tau^t p(s)||x(s)||ds$$

を得て，Gronwall の不等式から，任意の $T \ge 0$ に対し

$$||x(t)|| \le (||\xi|| + \int_\tau^T ||A(s, \mathbf{0})||ds)e^P$$

（$0 \le t \le T$）．よって，解 $x(t)$ は $t \to \infty$ で存在する．

(II) 式 (4.28) の解 $x(t)$ を任意に固定する．摂動系 (4.29) の解 $y(t) = y(t; \tau, \xi)$ は，区間 $U(R) = [0, R)$（$R > 0$）で存在すると仮定する．$u(t) = y(t) - x(t)$，$C(t, u) = A(t, u+x(t)) - A(t, x(t))$，$F_0(t, u) = F(t, u + x(t))$ とおくと，任意の $R > 0, T \le \tau$ につき次式が成り立つ．

$$\max_{u\in U(R)} \int_\tau^T ||C(s, u)||ds < \infty,$$
$$\max_{u\in U(R)} \int_\tau^T ||F_0(s, u)||ds < \infty.$$

ゆえに $T = \infty$ としてよいから，$y(t)$ は $t \to \infty$ で存在する．また，$u(t)$ は，次式を満たす．

$$u(t) = -\int_t^\infty C(s, u(s))ds - \int_t^\infty F_0(s, u(s))ds.$$

（$t \ge \tau$）．従って，次式が成り立つ．

$||y(t) - x(t)|| = ||u(t)|| \to 0$（$t \to \infty$）．

次の例では例 4.7 に有界条件を課して，有界漸近同値の結果を得ている．

例 4.8 例 4.7 の条件 (1) - (3) に加えて，次の条件を仮定する．

(4) $\displaystyle\int_0^\infty ||A(s, \mathbf{0})||ds = C_1 < \infty.$

このとき，次の結論 (I) - (III) を得る．

(I) 式 (4.28) は一様有界 [UB].

(II) 摂動系 (4.29) は一様有界 [UB].

(III) 摂動系 (4.28)，(4.29) は有界漸近同値である．

証明方針 (I) 式 (4.28) の解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は，Gronwall の不等式等から

$||x(t)|| \le (||\xi|| + C_1)e^P$（$t \ge \tau$）．

(II) 式 (4.29) の $y(t) = y(t; \tau, \xi)$ につき，

$$y(t) = x(t) - \int_t^\infty C(s, u(s) + x(s))ds - \int_t^\infty F_0(s, u(s) + x(s))ds$$

（行列 C，関数 F_0 は例 4.7 と同じ）から，

$$||y(t)|| \le ||x(t)|| + C_1 + P(||\xi|| + C_1)e^P + Q$$

を得る（$t \ge \tau$）．

(III) 例 4.7 の証明 (II) と同じ．

5 おわりに

本研究では，2 つの常微分方程式

$x'(t) = X(t, x(t))$

$y'(t) = Y(t, y(t))$

が漸近同値であることの定義を複数を述べている．さらに，その十分条件に関し，Gronwall の不等式，Bihari の不等式，Schauder の不動点定理，Ascoli-Arzelá の定理

を応用することにより，先行結果の別証明や，および新しい結果を証明している．

参考文献

1) A. G. Kartsatos, *Advanced Ordinary Differential Equations*, (Mariner Publ. Comp., Florida, 1980), p. 22, 26.
2) J. Kato, "Asymptotic Equivalence between Systems of Differential Equations and Their Perturbed Systems", *Funkcial Ekvac.*, **8**, pp. 45 - 78 (1966).
3) 河田敬義，三村征雄，現代数学序説 II（岩波書店，東京，1965)，p. 75.
4) N. Levinson, " The Asymptotic Behavior of a System of Linear Differential Equations", *Amer. J. of Math.*, **68**, pp. 1 - 6, 1946.
5) S. Saito, " Asymptotic Equivalence between Linear and Quasilinear Differential Equations", *Mathematica Japonica*, **37**, pp. 503 - 513 (1992).
6) 齋藤誠慈，不動点定理による安定性解析-常微分・差分・積分微分・偏微分方程式の定性解析-（森北出版，東京，2023 年出版予定）, 6 章.
7) D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, (Cambridge Univ. Press, London, 1974), p. 25.
8) 山本稔，常微分方程式の安定性（産業図書出版，東京，1979）, p. 140, 173.
9) T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, (Math, Soc., Tokyo, 1966), p. 31, 151, 152, .
10) 吉沢太郎，微分方程式入門（朝倉図書，東京，1966），p. 10.