Qualitative Analysis to Solutions for Equations via Fixed Point Theorems I - Boundary Value Problems of Ordinary Differential Equations and Stability of Quasilinear Ordinary Differential Equations-

Seiji SAITO*

(Received January 16, 2023)

In this article we deal with boundary value problems of nonlinear ordinary differential equations and initial value problems of quasilinear ordinary differential equations. To the former problems we prove the existence of solutions, and to the latter we show the stability by applying fixed point theorems.

Key words ： fixed point theorem, ordinary differential equation, quasilinear ordinary differential equation, boundary value problem, stability.

キーワード ： 不動点定理，常微分方程式．準線形常微分方程式，境界値問題，安定性．

不動点定理による方程式の定性解析 I - 常微分方程式の境界値問題と準線形常微分方程式の安定性 -

齋藤誠慈

1　はじめに

ベクトル空間 V 上の写像 $F : V \to V$ の不動点 $x_e \in V$ とは，$F(x_e) = x_e$ を満たす点をいう．特に $V = \boldsymbol{R}$ のとき，点 $x_e \in \boldsymbol{R}$ が $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の不動点であるとは，直線 $y = x$ と曲線 $y = F(x)$ の交点 $y = x_e = F(x_e)$ を意味する．

大学課程学部初年次における配当科目において解析学等では，次の中間値の定理を学ぶ．

定理 1.1 （中間値の定理）区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ に関し，$f(a)f(b) < 0$ のとき，ある点 $c \in (a, b)$ について，$f(c) = 0$ を満たす．

上記の中間値の定理を応用すると，ある条件の下，不動点の存在が示される．例えば，関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ は連続とする．不等式

$$(f(a) - a)(f(b) - b) < 0$$

が成り立つとき，ある点 $x_e \in (a, b)$ は，$f(x_e) - x_e = 0$，すなわち，不動点 $x_e = f(x_e)$ の存在が示される．

本報告では，常微分方程式の境界値問題の解について，不動点定理を応用し，その存在を示す．また，解の定性解析についても述べる．

2　不動点定理等の準備

集合 $\boldsymbol{R}_+ = [0, \infty)$，自然数 m と，線形積分方程式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds \tag{2.1}$$

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6702, E-mail : ssaito@mail.doshisha.ac.jp

（$t \geq t_0 \geq 0$，行列 $A : m \times m$ は $\boldsymbol{R}_+$ 上で連続，$x(t), x_0 \in \boldsymbol{R}^m$）を考える．本節では，方程式の解の定性解析について考察するのに必要な不動点定理等を述べる．

「1」Gronwall（グロンウォール）の不等式[7)]

定理 2.1　連続関数 $u, g : I \to \boldsymbol{R}_+$ と定数 $K \geq 0$ に関し，次式が成り立つ．

$$u(t) \leq K + \int_a^t g(s)u(s)ds \quad (a, t \in I)$$

このとき，$u(t) \leq Ke^{\int_a^t g(s)ds}$（$t \in I$）
が成り立つ．

上記の定理に関し，積分方程式 (2.1) に対し，$u(t) = ||x(t)||$（ノルム），$I = [t_0, b]$（$b \geq t_0$），$g(t) = \max_{t \in I} ||A(t)||$ とおけば，

$$u(t) \leq ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^t g(s)u(s)ds$$

から，$||x(t)|| \leq ||x(t_0)||e^{\int_{t_0}^t g(s)ds}$（$t \in I$）を得る．

「2」Leray-Schauder（ルレイ・シャウダー）の不動点定理[2)p.27]

定理 2.2　バナッハ空間 X と区間 $I = [0, 1] \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義される写像 $\mathcal{V} : X \times I \to X$ の方程式

$$\mathcal{V}(x, \mu) - x = 0 \tag{2.2}$$

に関し，次の条件 (1) - (4) を仮定する．

(1) 任意の $\mu \in I$ を固定するとき，$\mathcal{V}(\cdot, \mu)$ はコンパクト写像，すなわち，有界集合 $M \subset X$ につき，像 $\mathcal{V}(M, \mu)$ は相対コンパクトである．

(2) 任意の有界集合 $M \subset X$ として，$\mathcal{V}(x, \mu)$ は M につき同程度に，$\mu \in I$ について連続. すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に関し，ある $\delta > 0$ が存在し，$||\mathcal{V}(x, \mu_1) - \mathcal{V}(x, \mu_2)|| < \varepsilon$ ($|\mu_1 - \mu_2| < \delta$，任意の $x \in M$).

(3) ある $\mu_0 \in I$ と任意の $x \in X$ につき，$\mathcal{V}(x, \mu_0) = 0$.

(4) もし $\mu \in I$ に対し，式 (2.2) の解 x_μ が存在すれば，X 内の 1 つの球 $B \subset X$ に含まれる．B は μ に依存しないとする．

このとき，任意の $\mu \in I$ につき，式 (2.2) は少なくとも 1 つの解 x_μ を有する．

次の常微分方程式

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{2.3}$$

を考える．ある解候補の関数 $y(t)$ を代入して得られる式

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, y(t)) \tag{2.4}$$

は，非斉次線形微分方程式であるから，その解は一意的に存在し，

$$x_y(t) = a + \int_{t_0}^t (A(s)x_y(s) + f(s, y(s)))ds$$

（$x_y(t_0) = a$）である．ある条件下において，写像 $V(y, \mu) = \mu x_y$ に対し，Leray-Schauder の不動点定理が適用される．

「3」Schauder の不動点定理[2)p.26 5)]

定理 2.3　バナッハ空間 X の部分集合 B 上の写像 $\mathcal{V} : B \to X$ は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 集合 $B \subset X$ は，閉凸.

(2) $\mathcal{V}(B) \subset B$.

(3) $\mathcal{V} : B \to B$ は連続.

(4) 像 $\mathcal{V}(B)$ は相対コンパクト.

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は B 内に少なくとも 1 つの不動点を有する．

式 (2.4) に対し，写像 $\mathcal{V}$ を，

$$[\mathcal{V}(y)](t) = a + \int_{t_0}^t (A(s)x_y(s) + f(s, y(s)))ds$$

を定めて，Schauder の不動点定理が応用されることがある．

「4」Ascoli-Arzelá（アスコリ・アルツェラ）の定理[2)p.22 3)]

定理 2.4　関数集合 $S = \{f : I \to \boldsymbol{R}^m, f$ は連続$\}$（区間 $I = [a, b]$）は，次の 2 条件を満たすとする．

(1) S は一様有界，すなわち，ある $M > 0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\max_I ||f(t)|| \leq M \quad (f \in S).$$

(2) S は同程度連続，すなわち，微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||f(t) - f(s)|| < \varepsilon \quad (f \in S,\ t, s \in I,\ |t - s| < \delta).$$

このとき，集合 $S \subset X$ は相対コンパクトである．

「5」縮小写像の原理[2)p.26]

定理 2.5　バナッハ空間 X の集合 S 上で定義される写像 $\mathcal{V}$ は，次の条件 (1) - (3) を満たすとする．

(1) S は閉集合.

(2) $\mathcal{V}(S) \subset S$.

(3) ある正数 $r < 1$ が存在し，次式が成り立つ．

$$||\mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x)|| \leq r||y - x||$$

（$y, x \in S$）.

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は S 内にただ 1 つの不動点を有する．

「6」最終縮小写像[1)]

定理 2.6　バナッハ空間 X の集合 S 上で定義される写像 $\mathcal{V}$ は，次の条件 (1) - (3) を満たすとする．

(1) S は閉集合.

(2) $\mathcal{V}(S) \subset S$.

(3) ある正数 $r < 1$ と自然数 n が存在し，次式が成り立つ．

$$||\mathcal{V}^n(y)-\mathcal{V}^n(x)|| \le r||y-x||$$
（$y,x\in S$，$\mathcal{V}^n$ は，$\mathcal{V}$ の n 回合成）.

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は S 内にただ 1 つの不動点を有する．

「7」逆写像定理 [2)p.31,34]

定理 2.7 バナッハ空間 X,Y 間の写像 $f:X\to Y$ と開集合 $S\subset X$ とし，条件 (1), (2) が成り立つとする．

(1) $f:S\to Y$ は，Fréchet 連続微分可能，すなわち，$x\in S, h\in X$ として，
$$f(x+h)=f(x)+Th+o(h)\ (h\to 0)$$
を満たす有界線形写像 $T:X\to Y$ が存在するとする．ここで $o(h)\to 0$（$h\to 0$）はランダウの記号である．このとき，$T=f'(x)$ と表し，f の Fréchet 微分という．

(2) ある $x_0\in S$ とある近傍 $U(x_0)\subset S$ につき，Fréchet 微分 $f':X\to Y$ は全単射とする．

このとき，f は点 $(x_0,f(x_0))$ に関し，局所可逆的である．

3 境界値問題への応用

区間 $J=[\alpha,\beta]$ とし，集合 $I\times \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(t,x,y)$ に関する 2 階常微分方程式の境界値問題

$$x''(t)=f(t,x(t),x'(t)),$$
$$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}x(\alpha)+\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}x'(\alpha)+\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}x(\beta)+\begin{pmatrix}a_4\\ b_4\end{pmatrix}x'(\beta)=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$$

は，変換 $x_1=x$，$x_2=x'$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2$，

$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}x_2\\ f(t,\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$，$f(t,\boldsymbol{x})=f(t,x_1,x_2)$，

$B_1=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}a_3 & a_4\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$

により，次式を得る．
$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\ B_1\boldsymbol{x}(\alpha)+B_2\boldsymbol{x}(\beta)=\boldsymbol{r}.$$

注意 3.1 以後ベクトルは，$x,y,u,v,f,g,h,F,G\in\boldsymbol{R}^m$ 等で表す．

文献 2) では，無限区間 $\boldsymbol{R}_+$ 上での境界値問題を解の存在に関し，Leray-Schauder の不動点定理を応用している（定理 6.14）．後述の例 3.5 では同様な条件下，区間 $J=[\alpha,\beta]$ 上の m 元斉次線形系の境界値問題

$$x'(t)=A(t)x(t) \tag{3.5}$$

$$L(x)=B_1x(\alpha)+B_2x(\beta)=\boldsymbol{0} \tag{3.6}$$

の解が一意的に存在するとき，線形摂動系の境界値問題

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t,x(t)) \tag{3.7}$$

$$L(x)=r \tag{3.8}$$

の解の存在条件を与えている．ただし，写像 $L:C(J)\to\boldsymbol{R}^m$ は線形写像である．

例 3.2 線形写像 L には，次の例がある．

(1) 初期条件 $x(\tau)=\xi$ は，$L(x)=x(\tau)$ とすると，$L(x)=\xi$ と表される．

(2) 周期条件 $x(T)=x(0)$ は，$L(x)=x(0)-x(T)$ とおくと，$L(x)=\boldsymbol{0}$.

(3) 無限区間 $\boldsymbol{R}_+$ での境界条件 $\lim_{t\to\infty}x(t)=r$ は，$L(x)=\lim_{t\to\infty}x(t)$ とおくと，$L(x)=r$.

次のように，非線形式を線形化（線形非斉次式に帰着）する．

境界値問題 ((3.7), (3.8)) の解の候補 $y\in C(J)$ を，非線形式 (3.7) の摂動項 $f(t,x)$ に代入すると，線形式

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t,y(t)) \tag{3.9}$$

を得る．

定義 3.3 斉次線形系 (3.5) の基本行列を $X(t)=(x_1(t),\cdots,x_m(t))$（$X(0)=I$，$I$ は単位行列），すなわち，x_k（$1\le k\le m$）は (3.5) の 1 次独立解とする．

線形系 (3.9) の解 $x_y(t)=x_y(t;\alpha,c)$（$x_y(t;\alpha,c)$ は，初期条件 $x_y(\alpha)=c$ を満たす解を意味する）に関し，基本行列 X により次式で与えられる．

$$x_y(t)=X(t)X^{-1}(\alpha)c+p_y(t),$$
$$p_y(t)=X(t)\int_\alpha^t X^{-1}(s)f(s,y(s))ds,\ x_y(\alpha)=c.$$

上式 x_y を境界条件 $L(x_y)=r$ に代入すると，

$$r=L\Big(X(\cdot)X^{-1}(\alpha)c+p_y\Big)$$
$$=L(X(\cdot)X^{-1}(\alpha)c)+L(p_y).$$

ここで，次式を満たす定行列 $\overline{X}$ が存在するはず．

$$\overline{X}u=L(X(\cdot)X^{-1}(\alpha)u)\ (\text{任意の } u\in\boldsymbol{R}^m).$$

逆行列 $\overline{X}^{-1}$ が存在するとは，線形境界値問題 ((3.5),(3.8)) の解が一意的に存在するときと同値である．逆行列 $\overline{X}^{-1}$ が存在するとき，$c=\overline{X}^{-1}(r-L(p_y))$ とおけば，次式を得る．

$$x_y(t)=X(t)X^{-1}(\alpha)\overline{X}^{-1}[r-L(p_y)]+p_y(t).$$

なお，$\overline{X}^{-1}$ が存在することは，境界条件

$$L(x)=\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{R}^m \tag{3.10}$$

に関し，境界値問題 ((3.5),(3.12)) の解はゼロ解 $x=\boldsymbol{0}$ に限ることと同値である．以上の考察から，次の定理を得る．

定理 3.4 （文献 2)[p.101]）有界閉区間 $J=[\alpha,\beta]$ 上の線形斉次境界値問題

$$x'(t)=A(t)x(t) \tag{3.11}$$
$$L(x)=\mathbf{0} \tag{3.12}$$

と，線形非斉次境界値問題

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t) \tag{3.13}$$
$$L(x)=r \tag{3.14}$$

において，連続な $m\times m$ 行列 $A(t)$，連続関数 $f:J\to \boldsymbol{R}^m$，線形写像 $L:C(J)\to \boldsymbol{R}^m$，$r\in \boldsymbol{R}^m$ とする．線形系 (3.5) の基本行列を $X(t)$ （$X(0)=I$(単位行列)）とし，$m\times m$ 行列 $\overline{X}$ は，次式で定義される．

$L(X(\cdot)X^{-1}(\alpha)c)=\overline{X}c$（任意の $c\in \boldsymbol{R}^m$）．

このとき，次の結論 (I) - (III) は同値である．

(I) 斉次境界値問題 ((3.5),(3.12)) の解は，ゼロ解 $x=\mathbf{0}$ に限る．

(II) $\det(\overline{X})\neq 0$.

(III) 非斉次境界値問題 ((3.13),(3.8)) の解は，次の関数に限る（一意解）．

$x(t)=X(t)X^{-1}(\alpha)\overline{X}^{-1}[r-L(p_f)]+p_f(t)$,

$p_f(t)=X(t)\displaystyle\int_\alpha^t X^{-1}(s)f(s)ds$（$t\in J$）．

考察　行列 $A:m\times m$ の連立斉次 1 次方程式 $Ax=\mathbf{0}$ と連立非斉次 1 次方程式 $Ax=b$ の解の存在・非存在性の条件と類似している．

次の例では解の存在に関し，Leray-Schauder の不動点定理が応用される．線形系 $x'(t)=A(t)x(t)$ の摂動系 (3.7) に対し，基本行列の逆 $X^{-1}(t)$ と $f(t,x)$ の積のノルムにつき，$||x||$ の 1 次式 $p(t)||x||+q(t)$ が上から押さえている．

例 3.5 境界値問題 ((3.7), (3.8)) に関し，$J=[\alpha,\beta]$ とし，行列 A は J 上で連続，$f:J\times \boldsymbol{R}^m\to \boldsymbol{R}^m$ は連続とする．次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 線形系 (3.5) の基本行列 $X(t)$（$X(0)=I$）は，$||X(t)X^{-1}(\alpha)||\leq M\quad(t\in J)$.

(2) 次の条件式を満たす連続関数 $p,q:J\to \boldsymbol{R}_+$ が存在し，

$||X^{-1}(t)f(t,x)||\leq p(t)||x||+q(t)$

（$t\in J$，$x\in \boldsymbol{R}^m$) が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta p(s)ds\leq P<\infty,\quad \int_\alpha^\beta q(s)ds\leq Q<\infty.$$

(3) 線形写像 $L:C(J)\to \boldsymbol{R}^m$ は連続（$\Leftrightarrow ||L||<\infty$）．

(4) 行列 $\overline{X}^{-1}$ が存在する．

(5) $1-||L||M^2P-MP>0$.

このとき，問題 ((3.7),(3.8)) は少なくとも 1 つの解を有する．

証明　任意の $y\in C(J)$ に対し，線形化境界値問題 ((3.9),(3.8)) を考えると，次の $x_y(t)$ は一意解となる．

$x_y(t)=X(t)X^{-1}(\alpha)\overline{X}^{-1}[r-L(p_{f(y)})]+p_{f(y)}(t)$,

$p_{f(y)}(t)=X(t)\int_\alpha^t X^{-1}(s)f(s,y(s))ds$.

（$t\in J$）．写像 $\mathcal{V}:C(J)\times[0,1]\to C(J)$ を次に定める．

$\mathcal{V}(y,\mu)=\mu x_y(t)$

$=\mu\{X(t)X^{-1}(\alpha)\overline{X}^{-1}[r-L(p_{f(y)})]+p_{f(y)}(t)\}$.

方程式 $\mathcal{V}(y,\mu)-y=\mathbf{0}$ に対し，Leray-Schauder の不動点定理を応用する．

(I) 写像 $\mathcal{V}(y,\mu)$ はコンパクト写像である．実際，$B\subset C(J)$ は有界，すなわち $y\in B$ ならば，$||y||_\infty(=\max_{t\in J}||y(t)||)\leq M_1$ なる $M_1>0$ が存在する．よって，$\{p_{f(y)}:y\in B\}$ は一様有界より像集合 $\{\mathcal{V}(y,\mu):y\in B\}$（$\mu$ 固定）も一様有界となる．また，微分 $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(y,\mu)=\mu A(t)x_y(t)+\mu f(t,y(t))$ より，$y\in B$（$B\subset C(J)$ は有界）より，$\{\frac{d}{dt}\mathcal{V}(y,\mu):y\in B\}$ も一様有界，すなわち $||\frac{d}{dt}\mathcal{V}(y,\mu)||_\infty\leq M_2$ なる $M_2>0$ が存在する．これより，$\{\mathcal{V}(y,\mu):y\in B\}$ は，t につき同程度連続，すなわち $||\mathcal{V}(y(t),\mu)-\mathcal{V}(y(s),\mu)||\leq M_2|t-s|$ が成り立つ．Ascoli-Arzelá の定理から $\{\mathcal{V}(y,\mu):y\in B\}\subset C(J)$ は，相対コンパクト集合である．ゆえに，$\mathcal{V}(y,\mu)$ はコンパクト写像．

(II) $\mu\in[0,1]$ を固定する．$C(J)$ 内で $y_n\to y_0$（$n\to\infty$）のとき，$\lim_{n\to\infty}||L(p_{f(y_n)})-L(p_{f(y_0)})||\to 0$（$\boldsymbol{R}^m$ 内），かつ $\lim_{n\to\infty}||p_{f(y_n)}-p_{f(y_0)}||_\infty=0$（$C(J)$ 内）であるから，$\mathcal{V}(y,\mu)$（μ 固定）は $y\in C(J)$ につき連続．

任意の有界集合 $B\subset C(J)$ と $y\in B$ に関し，$||X(\cdot)X^{-1}(\alpha)\overline{X}^{-1}[r-L(p_{f(y)})]||_\infty$ は一様有界，$y\in B$ につき $||p_{f(y)}||_\infty$ は一様有界であることから，$\mathcal{V}(y,\mu)$ は B 上で同程度連続で，また μ に関し一様連続．

(III) $\mu=0$ のとき $\mathcal{V}(y,0)=0$（任意の $y\in C(J)$）．

(IV) 任意の $\mu\in[0,1]$ に対し，関数 $y_\mu\in C(J)$ は問題 ((3.7),(3.8)) を満たすと仮定する．$y_\mu=\mathcal{V}(y_\mu,\mu)$ とおくと，

$||y_\mu(t)||$

$\leq M||\overline{X}^{-1}||(||r||+||L||M||p_{f(y_\mu)}||_\infty)+M||p_{f(y_\mu)}(t)||$

$\leq M||\overline{X}^{-1}||\ ||r||+||L||M^2\int_\alpha^t p(s)ds||y_\mu||_\infty$

$+M^2||L||\int_\alpha^t q(s)ds)+M\int_\alpha^t p(s)ds||y_\mu||_\infty+M\int_\alpha^t q(s)ds$

$\leq M||\overline{X}^{-1}||\ ||r||+||L||M^2P||y_\mu||_\infty+M^2||L||Q$

$+MP||y_\mu||_\infty+MQ$ から，

$||y_\mu||_\infty(1-||L||M^2P-MP)$

$\leq M||\overline{X}^{-1}||\ ||r||+M^2||L||Q+MQ$.

よって，$||y_\mu||_\infty\leq\frac{M||\overline{X}^{-1}||\ ||r||+M^2||L||Q+MQ}{1-||L||M^2P-MP}$

を得る．

$K=\frac{M||\overline{X}^{-1}||\ ||r||+M^2||L||Q+MQ}{1-||L||M^2P-MP}$

とおくと，y_μ は，μ に依存しない球

$B_K=\{x\in C(J):||x||_\infty\leq K\}$

に関し，$y_\mu\in B_K$ である．

以上 (I) - (IV) から，Leray-Schauder の不動点定理の条件 (1) - (5) が満たされる．したがって，$\mathcal{V}(x,1)=x$ が

境界値問題 ((3.7),(3.8)) の少なくとも 1 つの解である．

例 3.6 例 3.5 において，条件 (5) に替えて，次の条件を仮定する．

(5)' $1 - M||\overline{X}^{-1}||P||L||e^{PM} > 0$

このとき，Gronwall の不等式を用いると，

$K = \frac{M(||\overline{X}^{-1}||\,||r||+||\overline{X}^{-1}||Q||L||+Q)}{1-M||\overline{X}^{-1}||P||L||e^{PM}}$

として，Leray-Schauder の不動点定理から問題 ((3.7),(3.8)) は少なくとも 1 つの解を有することが示せる．

非線形系

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

（$t \in [a, b] = J_1$，または $t \in I = [0, 1]$，$x(t) \in \boldsymbol{R}$）

の境界値問題に関し解の存在を，以下では議論する．

例 3.7 では $x''(t) = f(t)$ に関し縮小写像，

例 3.8 では $x''(t) = f(t, x(t))$ に関し縮小写像，

予想 3.9 では $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ に関し，Schauder の不動点定理，Gronwall の不等式が応用される．

例 3.7 連続関数 $f : J_1 \to \boldsymbol{R}$ に関する境界値問題（$J_1 = [a, b]$）

$$x^{''}(t) = f(t), \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{3.15}$$

において，$x_1(t) = t - a$，$x_2(t) = b - t$ とおく．次の関数は境界値問題 (3.15) の解である．

$x(t) = \frac{1}{a-b}(x_2(t)\int_a^t x_1(s)f(s)ds + x_1(t)\int_t^b x_2(s)f(s)ds)$.

証明方針 方程式と境界条件を満たすことを確認すればよい．

例 3.8 連続関数 $f(t, x) : J_1 \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は x に関する Lipschitz 条件，すなわち

$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y|$

（ある $L > 0$ が存在し，任意の $t \in J_1$，任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$）が成り立つとき，次の境界値問題は一意解をもつ．

$$x''(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{3.16}$$

証明方針 (I) 集合 $X = \{y \in C(J_1) : y(a) = 0 = y(b)\}$ はバナッハ空間である．$y \in X$ として，

$x''(t) = f(t, y(t))$，$x(a) = 0 = x(b)$

に関し，次式の関数 x_y は，その境界値問題の解である．

$x_y(t) = \frac{1}{a-b}(x_2(t)\int_a^t x_1(s)f(s, y(s))ds$
$\quad + x_1(t)\int_t^b x_2(s)f(s, y(s))ds,$
$\quad x_1(t) = t - a,\ x_2(t) = b - t.$

例 3.7 と同様．

(II) 問題 (3.16) の解は，一意的であることを，縮小写像の原理を用いて示す．

$[\mathcal{T}(u)](t) = X_1(t) + X_2(t)$
$X_1(t) = \frac{1}{a-b}x_2(t)\int_a^t x_1(s)f(s, u(s))ds$
$X_2(t) = \frac{1}{a-b}x_1(t)\int_t^b x_2(s)f(s, u(s))ds$

は最終縮小写像である．定理 2.6 から，$\mathcal{T}$ は X 内に唯一の不動点 $x = \mathcal{T}(x)$ をもち，次式が成り立つ．

$x(t) = \frac{1}{a-b}(x_2(t)\int_a^t x_1(s)f(s, x(s))ds$
$\quad + x_1(t)\int_t^b x_2(s)f(s, x(s))ds),$
$\quad x(a) = 0 = x(b).$

予想 3.9 区間 $I = [0, 1]$ で，連続関数 $f : I \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ とする，$c > 0$ として集合 $S_c = \{p \in \boldsymbol{R} : |p| \le c\}$ とおく．ある定数 $L > 0$, $r > 0$, $R > 0$ が存在，次の Lipschitz 条件が満たされるとする．線形空間 $\boldsymbol{R}^2$ のノルムは $||x|| = ||(x_1, x_2)^T|| = |x_1| + |x_2|$ とし，次の条件 (1) - (4) が成り立つとする．記号 T は転置．

(1) $|f(t, p_1, q) - f(t, p_2, q)| \le L|p_1 - p_2|$

（$t \in I$，$p_1, p_2 \in S_r$，$q \in S_R$）．

(2) $|f(t, p, q_1) - f(t, p, q_2)| \le L|q_1 - q_2|$ （$t \in I$，$p \in S_r$，$q_1, q_2 \in S_R$）．

(3) ある $\alpha > 0, r > 0, R > 0$ に関し，条件 (3a),(3b) が成り立つ．

(3a) $\displaystyle\int_0^1 (1 - s) \max_{|p| \le r, |q| \le R} |f(s, p, q)|ds \le r,$

(3b) $\displaystyle\int_0^1 s \max_{|p| \le r, |q| \le R} |f(s, p, q)|ds \le R.$

(4) 関数 $f_0 : I \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は上記の条件 (1) - (3) を満たし，1 つ固定され，次の集合を定める．

$C_0(c, r, R, \alpha) = \{f : I \times S_r \times S_R \to \boldsymbol{R}$ は連続で，上記の条件 (1) - (3)，かつ次の条件 (4a) を満たす $\}$

(4a) $\max\{||f(t, p, q) - f_0(t, p, q)|| :$
$\quad t \in I, p \in S_r, q \in S_R\} \le \alpha.$

このとき，次の境界値問題

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), x(0) = 0 = x(1) \tag{3.17}$$

と，集合 $C(r, R) = \{x \in C^1(I) :$
$\quad x(0) = 0 = x(1), ||x||_\infty \le r, ||x'||_\infty \le R\}$

に関し，結論 (I) - (III) が得られると筆者は予想する．今後，証明が期待される．

(I) 写像 $\mathcal{P} : C(r, R) \to C^2(I)$ は

$$[\mathcal{P}(y)](t) = \{(1 - t)\int_0^t sf(s, y(s), y'(s))ds + t\int_t^1 (1 - s)f(s, y(s), y'(s))ds\}$$

（$y \in C(r, R)$）とおく．このとき，唯一の不動点 $x = \mathcal{P}(x)$ を有する．ゆえに関数 $x \in C(r, R)$ は，境界値問題 (3.17) の一意解となる．

(II) 関数 f_0 に対する境界値問題 (3.17) の一意解を $x_0 = \mathcal{Q}(f_0)$ とおく．このとき，任意の $f \in C_0(c, r, R, \alpha)$ に対し，問題 (3.17) の一意解 $x_f = \mathcal{Q}(f) \in C(r, R)$ が定まり，写像 $\mathcal{Q} : C_0(c, r, R, \alpha) \to \mathcal{Q}(C_0(c, r, R, \alpha)) \subset C(r, R)$ は，1 対 1 である．

(III) 写像 $\mathcal{Q}$ は $C(r, R)$ 上連続である．すなわち，$f_n, f_* \in C_0(c, r, R, \alpha)$ に関し，

$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f_*||$
$= \lim_{n\to\infty} \max\{||f_n(t, u_1, u_2) - f_*(t, u_1, u_2)|| :$

$t \in I, ||u_1|| \le r, ||u_2|| \le R\} = 0.$

証明方針　(I) 写像 $\mathcal{P}$ の不動点 $x \in C(r,R)$ の存在を示すには，中への写像 $\mathcal{P}: C(r,R) \to C(r,R)$ に対し，Schauder の不動点定理を応用する．不動点 x の一意性を示す．変換

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T = (x(t), x(t)')^T$$

を用いて，次の連立方程式に帰着させる．

$$u(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} u_2(s) \\ f(s, u_1(s), u_2(s)) \end{pmatrix} ds,$$

なお $u(0) = (0,0)^T$．

関数 $y \in C(r,R)$ も問題 (3.17) の解とし，

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t))^T = (y(t), y(t)')^T$$

より，$v(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} v_2(s) \\ f(s, v_1(s), v_2(s)) \end{pmatrix} ds,$

なお $v(0) = (0,0)^T$．よって，

$||u(t) - v(t)|| \le \int_0^t (1+2L)||u(s) - v(s)||ds$

から，Gronwall の不等式より，$0 \le ||u(t) - v(t)|| \le 0$ を得，一意性が示される．

(II) 写像 $\mathcal{P}$ に対し，逆写像定理を用いる．

(III) 点列 $\{f_n\}, f_* \in C_0(c,r,R,\alpha)$ は，

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f_*|| = 0$$

とする．$x_n = \mathcal{Q}(f_n)$，$x_* = \mathcal{Q}(f_*)$ をそれぞれ，境界値問題

$$x_n''(t) = f_n(t, x_n(t), x_n'(t)),\ x_n(0) = 0 = x_n(1),$$
$$x_*''(t) = f_*(t, x_*(t), x_*'(t)),\ x_*(0) = 0 = x_*(1),$$

の唯一解とし，距離

$$\rho(x_n, x_*) = \max_{t\in J} |x_n(t) - x_*(t)| + \max_{t\in J} |x_n'(t) - x_*'(t)|$$

とおく．Ascoli-Arzelà の定理から，$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_*) = 0$ を示せばよい．

注意 3.10 予想 3.9 に関し，境界値条件を $x(0) = a$, $x(1) = b$ に替えると，解 $x(t) = x(t; f, a, b)$ は問題 (3.17) の右辺の式 f に加えて，境界値 a, b にも，連続依存することも議論可能である．

4　準線形常微分方程式の局所的な安定性

文献 4) と同様に，Ascoli-Arzelà の定理，Schauder の不動点定理を用いて，ゼロ解が大域的一様漸近安定である線形系

$$x'(t) = B(t)x(t) \tag{4.18}$$

に，ある意味で近い準線形常微分方程式

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + F(t, x(t)) \tag{4.19}$$

のゼロ解の大域的一様漸近安定性に関し，後述の定理 4.3 を与えている．行列 $A(t,x): m \times m$ は $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で，関数 $F: \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で，行列 $B(t): m \times m$ は $\boldsymbol{R}_+$ 上で連続とする．

定義 4.1　準線形系 (4.19) について，恒等式 $F(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を仮定する．

(1) ゼロベクトル $x = \mathbf{0}$ は，準線形系 (4.19) は 1 つの解であり，準線形系 (4.19) のゼロ解という．

(2) 準線形系 (4.19) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は一様安定（[US]，Uniformly Stable）であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ をとれば，任意の初期値時間 $\tau \in \boldsymbol{R}_+$，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m : ||\xi|| < \delta$ につき，任意の解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は，$||x(t)|| < \varepsilon$（$t \ge \tau$）を満たすときをいう．

(3) 準線形系 (4.19) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は一様吸収的（[UA]，Uniformly Attractive）であるとは，微小な $\eta > 0$ が存在し，任意の微小な正数 $\varepsilon < \eta$ に対し，十分大の経過時間 $T = T(\varepsilon) > 0$ をとれば，任意の初期値時間 $\tau \in \boldsymbol{R}_+$，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m : ||\xi|| < \eta$ につき，任意の解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$ は，$||x(t)|| < \varepsilon$（$t \ge \tau + T$）を満たすときをいう．

(4) 準線形系 (4.19) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は一様漸近安定（[UAS]，Uniformly Asymptotically Stable）であるとは，一様安定 [US]，かつ一様吸収的 [UA] のときをいう．

線形系 (4.18) のゼロ解が一様漸近安定 [UAS] のとき，次の定理 6) は周知である．

補題 4.2　線形系 (4.18) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ が一様漸近安定（[UAS]）ならば，式 (4.18) の基本行列 $X(t)$（$X(0) = I$）に対し，正数 $K, c > 0$ が存在し，

$$||X(t)X^{-1}(s)|| \le Ke^{-c(t-s)}$$

（$t \ge s$）が成り立つ．

定理 4.3 次の条件 (1) - (4) を仮定する．

(1) 線形系 (4.18) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は，一様漸近安定（[UAS]）である．

(2) 準線形系 (4.19) の初期値問題の解は一意的である．

(3) ある $\delta_1 > 0$ が存在し，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^\infty \sup_{||x|| \le \eta} ||A(s,x) - B(t)||ds < \delta_1.$$

(4) 定数 $K > 0$ は補題 4.2 の定数とする．定数 $C > 0$ が存在し，次の条件 (4a)，(4b) が成り立つ．

(4a) $F(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$，かつ

$$\liminf_{r\to+0} \frac{1}{r} \int_0^\infty \sup_{||x|| \le r} ||F(s,x)||ds < C.$$

(4b) $CKe^{K\delta_1} < 1$.

このとき，準線形系 (4.19) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は，一様漸近安定（[UAS]）である．

証明方針　一様安定性 [US] について：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ は $\varepsilon > \delta \frac{Ke^{K\delta_1}}{1 - KCe^{k\delta_1}}$ とする．よって，$\int_0^\infty \sup_{||x|| \le \varepsilon} ||F(s,x)||ds \le \varepsilon C$，任意 $\tau \ge 0$，任意の $||\xi|| \le \delta$, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$，$J_n = [\tau, \tau + n]$ を固定し，次の関数 $k(n)$ と関数集合 $S(n)$ を定める．

$k(n)=\max_{t\in J_n}\max_{||x||\le\varepsilon}||A(t,x)||\varepsilon+\max_{t\in J_n}\max_{||x||\le\varepsilon}||F(t,x)||$,
$S(n)=\{y\in C(J_n): f$ は条件 (ア) - (ウ) を満たす $\}$.

(ア) $y(\tau)=\xi$.

(イ) $||y(t)||\le\varepsilon$（$t\in J_n$）.

(ウ) $||y(t_1)-y(t_2)||\le k(n)|t_1-t_2|$（$t_1,t_2\in J_n$）.

このとき，$S(n)\subset C(J_n)$ は一様有界，閉集合である．任意の $y\in S(n)$ に対する非斉次線形微分方程式 $x'(t)=A(t,y(t))x(t)+F(t,y(t))$ の一意解を x_y とし，写像 $\mathcal{V}:S(n)\to S(n)$ を $\mathcal{V}(y)=x_y$ と定める．写像 $\mathcal{V}$ に対し，Schauder の不動点定理を用いると，不動点 $z\in S(n)$ を得る．さらに，$n\to\infty$ として，一様安定性 [US] を得る．一様吸収性 [UA] の証明に関しては，
$x'(t)=B(t)x(t)+(A(t,x(t))-B(t))x(t)+F(t,x(t))$
に対し，Gronwall の不等式を用いる．

5 おわりに

本報告では，まず常微分方程式の境界値問題

$$x''(t)=f(t,x(t),x'(t)),\quad x(0)=0=x(1)$$

（$t\in[0,1]$，$x(t)\in\boldsymbol{R}$）に関し，種不動点定理を応用し，解の存在について議論している．

次に準線形常微分方程式

$$x'(t)=A(t,x(t))x(t)+F(t,x(t))$$

（$t\in\boldsymbol{R}_+$，行列 $A:m\times m$，$F(t,x)\in\boldsymbol{R}^m$）に関し，ある意味で $A(t,x)$ が行列 $B(t)$ が近く，線形系

$$x'(t)=B(t)x(t)$$

のゼロ解が一様漸近安定である場合，不動点定理を応用し．準線形系のゼロ解も一様漸近安定である成果について述べている．

本研究報告に関して，著者は査読者に対し，著者の勘違いによる不正確な表現を修正するなどの指摘について，深く感謝する次第です．

参考文献

1) T. A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, (Academic Press Inc., New York), 1985, p. 71.

2) A. G. Kartsatos, *Advanced Ordinary Differential Equations*, (Mariner Publ. Comp., Florida), 1980, p. 22, 26, 27, 31, 34, 101.

3) 河田敬義，三村征雄，現代数学序説 II(岩波書店，東京，1965), p. 75.

4) S. Saito，" Global Stability of Solutions for Quasilinear Ordinary Differential Systems", *Mathematica Japonica*, **34**, pp. 821-829, 1989.

5) D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, (Cambridge Univ. Press, London), 1974, p. 25.

6) 山本稔，常微分方程式の安定性（実教出版，東京，1979），p.140.

7) 吉沢太郎，微分方程式入門（朝倉書店，東京，1966），p. 10.