

非線形景気循環理論における「時間」概念の再検討

同志社大学大学院経済学研究科

経済政策専攻 博士課程(後期課程)

1404191102 番 堀田悠生

目次

序章.....	2
1章 技術進化を考慮した3次元グッドウィン成長循環モデル及び時間スケールの影響.....	12
序論.....	12
1.1 技術進化を伴うグッドウィン成長循環モデルの考察.....	15
1.1.1 一般形.....	15
1.1.2 特定化とシミュレーション.....	18
1.2 時間スケールの導入とその効果.....	19
結論.....	22
2章 非線形乗数・加速度モデルにおける外的強制力の効果の再考.....	23
序論.....	23
2.1 非線形乗数・加速度モデルと外力.....	26
2.2 外力が変動するケース.....	28
2.3 固定的な外力が2種類存在するケース.....	30
結論.....	31
3章 景気循環の速度及びカタストロフ的変化の発生.....	34
序論.....	34
3.1 Lordon(1997)モデルの概略.....	37
3.2 本章で考察するモデル.....	42
3.2.1 本章で行う修正と拡張.....	42
3.2.2 1つ目の単純なケース.....	43

3.2.3 2つ目のケース.....	45
結論.....	46
4章 景気循環の様態とカタストロフィー理論 燕の尾カタストロフによる考察.....	52
序論.....	52
4.1 Varian(1979)による景気循環モデル.....	55
4.2 Varian(1979)モデルの拡張.....	58
4.3 燕の尾カタストロフによるモデリング.....	60
4.4 結果.....	62
結論.....	64
終章.....	66
補論.....	1
補論 A 変数の時間スケールの区別と経済分析における意義.....	1
補論 B Lordon(1997)における成長率 g と雇用率 v の動学.....	5
補論 C Lordon(1997)における技術進化の程度 β の動学.....	7
補論 D くさびカタストロフ及び燕の尾カタストロフの概説.....	8
補論 E Varian(1979)のモデルの導出.....	10
補論 F カタストロフィー理論を用いたモデルの意義.....	11
付図・付表.....
参考文献.....

序章

景気循環理論や成長理論の根本には、成長していく過程こそが本来の経済変動のあり方であり、不況は何か一時的なトラブルか、経済からは外的な独立的なショックによって経済が乱されてしまった偶発的な事故のようなものだという理解が根強いと思われる。よく知られた内生的成長理論や動学的確率的一般均衡理論などは、その典型的な例である。

こうした想定とは対照的に、好況と不況の両方を経済の内的な論理から説明しようという景気循環理論や成長理論はいくつも存在している。例えば古くはマルクスに遡ることもできるであろうし、カレッキやグッドウィン、さらにはミンスキーを挙げることもできる。これらの理論はカレッキアン・モデルやグッドウィン・モデル、ミンスキアン・モデルといった形で、主にポスト・ケインジアン文脈で受け継がれている。

1939年にサミュエルソンによって提唱された乗数・加速度モデルは、上記のものとはやや異なる文脈で発展していった。その契機はヒックスによるものであった。ヒックスは乗数・加速度モデルに非線形性を加えた最初の一人として知られている(Hicks(1950))。更にこのモデルに本格的に非線形性を組み込んだのは、グッドウィンである(Goodwin(1951))。グッドウィンは、加速度原理を非線形関数として捉えることで、経済に興味深い変動が生じうることを示した。主流と呼べるほどの流れではないとしても、乗数・加速度モデルは現代でも研究が続けられているのであり、その大きな要因としては、ヒックスやグッドウィンが論じた興味深いモデルの振る舞いを挙げて良いであろう。

また、ヒックスやグッドウィンが非線形の乗数・加速度モデルを提唱した同じ時期には、カルドアが非線形の投資関数を提唱しており(Kaldor(1940))、グッドウィンもまた別の非線形性を有した成長循環理論(Goodwin(1967))を発表している。景気循環理論の分野において、徐々に非線形動学への関心が高まっていく流れがあったと見て良いと思われる。一般に、非線形動学を用いたこうした景気循環モデルは非線形景気循環理論と呼ばれる。

1970年代から1990年代にかけて、経済学において非線形動学が注目された。具体的にはカオスやカタストロフィー理論、複雑系といった数学が経済学に応用できないかと盛んに研究された。そうした流れの中で、例えばグッドウィンの非線形乗数・加速度モデルが再検討されたり(Lorenz(1980))、カルドアの投資関数の拡張としてカタストロフの発生が論じられ

たり(Varian(1979))、カオス・アトラクタの研究が進められたり(Goodwin(1990))した。乗数・加速度モデルも、例えばPuu(1993)などで連続型のモデルが検討された。1990年代には、Lorenz(1993)やRosser,Jr.(1991)、Puu(1993)といった、経済学向けの非線形動学の教科書が出版された。こうした議論も上記の非線形モデルの流れを汲むものであり、非線形景気循環理論と見て良いと思われる。

このように、かつてはカオスやカタストロフィー理論、非線形動学が経済学、景気循環理論において重要な位置を占めていたにもかかわらず、今日の景気循環理論ではこれらはあまり注目されていない。複雑系、特に自己組織化はcomputational economics等のシミュレーションの分野ではよく知られているが、いわゆる景気循環理論や成長理論とは毛色が異なっている。周期的な循環解(リミットサイクル)はいくつかの景気循環モデルに見られるものの、そのようなモデルはどちらかといえば非主流派の類である。

しかし、後で見るように、景気循環理論における非線形動学の重要性が失われたわけではないと考えられる。本稿の議論は、景気循環理論の文脈で非線形動学の応用がなぜ注目されなくなったのか、非線形動学の有用性が再度注目されるには、何が必要なのかという点を出発点としている。

好況と不況という、ある種矛盾した局面の発生を、経済運動という同じ要因に帰着させるという理論は、当然ながら複雑で難解になりうる。そのことは、こうした理論は同様に複雑で難解な数学モデルを要するということでもある。景気循環理論に非線形性を取り込もうとしたヒックスやグッドウィン、非線形動学を経済理論に持ち込もうとしたローレンツやロッサー,Jr.といった面々が、モデルを難解にする非線形性を重視し、あえて理論に取り入れようと試みたのは、このような必要性を意識していたからだと思われる。

本稿の立場は、景気循環を考える上で、このような発想は今日でもその意義を失っていないと考えるものである。当然のことながら、景気には浮き沈みがあるのであり、これらがすべて経済にとって外的な要因によってもたらされているとは考えづらい。好況と不況を繰り返すような経済の論理があると考えるのが自然である。さらに言えば、経済の本来あり得べき自然な状態とは成長ではなく、様々な局面を繰り返す波であるということである。

現に今日の経済を振り返ってみれば、先進国はこの20年ほどは低成長・停滞の傾向にある。安定した好調な成長経路を辿っていると言える国は無いと言っても過言ではない。例えば日本では、1990年代から今日まで、失われた30年と言われる停滞が続いている。

このように見れば、経済の自然な状態は成長であるという展望は疑問に付される。しかし、それ以前に遡れば、先進各国は黄金時代と呼ばれるような高度成長を謳歌していたのもまた事実である。これらのよく知られた歴史的事実を簡単に総合するならば、経済の自然な状態は、定常的で均質な成長ではなく、変動的で循環的な波動だと考えるのは妥当ではないかと思われる。

この前提に立てば、景気循環は経済にとって内生的な現象であることは疑いない。好況と不況の両方をもたらす要因が経済の内部に共存しているはずであり、景気循環理論はこの内部のメカニズムを明らかにするという課題を有することになる。

前述した非線形景気循環理論は、まさにこうした課題に正面から向き合った理論であった。非線形動学は、景気循環理論に好況と不況の「循環」を生じさせるような性質を提供する。あるいは、経済変動の「予測不可能性」や「急激な変化やそこからの緩やかな変化」といった諸現象を説明する道具をもたらす。これらは線形的なモデルや静学モデルの範疇を超える、非線形動学ならではの特徴である。

その一方で、非線形動学が景気循環理論の主軸となっていないのは、非線形動学の有用性があまり認められていないからであると思われる。本稿では、非線形動学の有用性をどこに見出すことができるのかという問いを持ち、検討を行っていく。

なお、「非線形景気循環理論」というタームの経済学史上一般的かつ明確な定義は管見の限り見られない。そこで本稿では便宜上、景気循環を扱っており、かつ非線形動学を用いているモデルをこのように呼称する。

景気循環理論にとって内生的振動が重要な論点である一方で、すべての景気循環が経済の内部の論理によって生じると考えるのもまた早計である。経済は他の社会的領域あるいは自然環境と密接に繋がっているのであり、それらが景気循環に与える影響は無視できない。例えば、2008年のリーマンショックは経済の内的な要因に端を発する不況であったと言えるが、2019年末からの新型コロナウイルス感染症による不景気は、経済にとって外的な要因に

よると言って良いであろう(少なくとも端緒はそうであると考えて良いかと思われる)。したがって、景気循環理論は内生的であることが求められるが、外生的な要因も考慮されなければならない。重要なのは、両方を総合的に分析できる枠組みを考察することである。

システムの外生的な要因の影響を考慮するという事は、システムに外的な諸作用を加え、その反応を見ることになる。この外的作用は、任意にショックを与える、確率的攪乱を設定する、周期的な外力を加えるといった方法でモデルに導入される。

非線形動学の議論においては、主たる関心は内生的な振動であるものの、このような外的な作用の考慮も一般的である。非線形景気循環理論を用いることで、内生的な振動と外的な作用の両方を捉えることができる。本稿では後者について、特に周期的な外力について議論する。これは、経済の動態に一定のリズムで影響する社会的・環境的な諸々の作用を考慮している。

Lorenz(1993)や Rosser, Jr.(1991)で多種多様な非線形動学理論が取り上げられていることを考慮すれば、少なくともある時点において非線形動学が経済学において重要な位置を占めていたことは疑いない。本稿で既に挙げた諸研究は、非線形動学を景気循環理論に応用しようとする多くの研究のほんの一部に過ぎない。それにもかかわらず、現代において非線形動学は景気循環理論においてそれほどの脚光を浴びているとは言い難い。

ここで、非線形景気循環理論に対する批判的意見を参照することは意義があると思われる。例えば Krugman(1996)は、非線形動学の興味深い現象の1つである自己組織化について述べているが、それに関連して非線形景気循環理論にも触れている。Krugman(1996)は上述したサミュエルソンやヒックス、グッドウィン、カルドアが、1980年代の経済学における流行に先んじて非線形動学の重要性を着目していたとして評価している一方で、非線形景気循環理論が注目されなくなった原因についても考察している。その原因とは、経済理論的な意味づけが弱く、経済学者がその根拠を疑問視したこと、そして更に、非線形景気循環理論によって導き出される帰結は、正確に規則的過ぎる上に、好況と不況が同規模だとされるということである。

この論点は Krugman(1996)の主要な論題というわけではないが、これらの指摘は非線形景気循環理論の本質的な課題を明らかにしていると考えられる。したがって、本稿の議論は、これらの課題に答えることで非線形景気循環理論の改良に寄与することを目的とする。

1つ目の経済学的根拠への疑義に関しては、カオスやカタストロフィー理論の経済学による受容のされ方が具体的な例と言える。両者はいずれも非線形動学の最も有名な現象の1つであり、1970年代頃から経済学に広まった。大きな注目を集めていたにもかかわらず、これらが今日では一昔前の流行と見なされているのは、経済学的な意味づけが弱かったことが一因であるとされる(Lorenz(1993)、Rosser,Jr.(2007))。実際に、Zeeman(1974)等はこうした批判を強く受けた。

しかし、先に挙げた Varian(1979)や他には Lordon(1997)のように、既存の経済学を踏まえてカタストロフィー理論を応用した研究は存在する。カオス現象に関しても同様に、経済学的に妥当と思われるモデルの結果としてカオスが生じるという研究はいくつもある¹。すなわち、あくまでもカタストロフィー理論やカオスを用いたモデルに経済学的な意味づけを行うことは十分に可能であり、経済的な理論とこのような非線形動学の手法を組み合わせた分析の意義が否定されたわけではない。

実際に、主流ではないかもしれないが、非線形動学を用いた経済分析は今日まで盛んに議論されている。例えば、リミットサイクル解を生じるようなモデルはその例である。さらに言えば、Krugman(1996)も主題は経済における自己組織化現象であり、この現象は非線形動学の中心的な課題の1つである。

このように見れば、非線形景気循環理論は、かつては確かに経済学的な根拠付けを得られなかったこともあったかもしれないが、そのことをもってして現代もそうであるとは言えない。

¹ 例えば、グッドウィン成長循環モデルを元にしてカオスの発生を論じた議論として、Sportelli and De Cesare(2022)、Yoshida and Asada(2007)、乗数・加速度モデルに関するものとしては Lorenz and Nusse(2002)、Li et al...(2011)、Naimzada and Pecora(2017)等が挙げられる。その他の議論として Sturis and Brens(1995)や Goodwin(1990)等も興味深い。

より深刻な課題は、非線形景気循環理論によって得られる帰結が規則的過ぎるという2つ目の指摘である。非線形景気循環理論の重要な貢献は、内生的で周期的な振動解を生じる動学の解析である。しかし、通常このような振動解は規則的な循環で表されるのであり、その結果をシンプルに解釈するならば、好況と不況は、規模も時間も同程度であり、同様の速さで単調に繰り返されていくということになる。現実の経済変動においては、好況期と不況期は異なる様相を呈していると考えられ、したがってこの結果はやや不自然と思える。

この問題は、例えば、非線形景気循環理論に頻繁に見られるリミットサイクル解においても重要である。一般に、リミットサイクル解で表される変数 (x, y) の状態は、増加する局面と減少する局面とが極めて対称的である。このことを経済変動として解釈するならば、好況と不況は同じ程度、同じ速度、同じ形の変化であり、それらの違いは正方向か負方向かの違いだけである。リミットサイクル解は非線形景気循環理論において重要な結果であり、内生的な振動を表現するという点で大きな意味を持つが、その振動の詳細な動態を考察するならば、あまり現実的ではない点が見えてくる²。

経済の諸変数が好況と不況という循環を持ち、それが繰り返されるという主張は、現実の諸経済指標の動きからしても納得の行くものである。そうした循環を表現する手法として、リミットサイクルが持つ有用性が否定されるわけではない。ここで主張したいのは、好況と不況の循環の過程が対称的な形状をしている、あるいは同じくらいの期間ずつ続いていくというように考える根拠は無く、したがって通常の一般的なリミットサイクルでは、好況と不況の移り変わりを示すことはできても、それが具体的にどのような様相となるかまでは十分に論じきれないという点である。

² ただし、リミットサイクルが緩和振動子である場合には、「循環の速さ」に関しては「速い」局面と「遅い」局面の区別が可能である。しかし、この場合でも、一般的な緩和振動子の解軌道の「速い」部分と「遅い」部分はほとんど同じ形であり、したがって規則的過ぎるという指摘には答えられない。

この課題は景気循環理論の経済学的な根拠や理論的前提に起因するものではなく、モデリングを議論する際に生じるものである。したがって、この課題の解決のためには、モデリングの観点からの議論が不可欠である。すなわち、非線形動学によって好況と不況の循環のような複雑な波動を記述することはできるのか否か、できるとすればどのような手法によってであるのかを検討しなければならない。本稿の主たる議論はこの課題についてのものである。

ここでは、Krugman(1996)によって指摘された非線形景気循環理論の2つの課題を挙げ、考察した。その結果、1つ目の経済学的意味づけに関しては、経済分析への応用の数々を見れば適切ではないと考えられること、一方で2つ目の、導出される結論の単調な規則性という課題は現在でも大きな課題であり、それはモデリングの観点から議論される必要があることが示された。

以上の議論を要約すると、景気循環理論に導入された非線形動学が大きな注目を集めていないのは、非線形動学に求められていた多様で複雑なメカニズムの記述という要請を十分に果たすことができていないからではないかと考えられる。

しかし、このことは非線形動学の有用性を否定するものではない。非線形性を扱った力学系は非常に広範囲に発展しているため、これらを今一度参照することで、非線形景気循環理論の新たな可能性が見えてくると期待できる。

本稿ではこのような動機から、非線形景気循環理論のモデルについて、「時間」に関するいくつかの概念を導入し、検討する。「時間」の概念とは、具体的には、「時間スケール」、「周期」そして「循環の速さ」の3つである。

「時間スケール」は、景気循環理論ではあまり使用されていない概念だと思われる。時間スケールの意味は、変数によって「速い」時間と「遅い」時間とを区別すること、すなわち、急激に、短いスパンで変化する変数は「速い」時間で、ゆっくりと長いスパンで変化する変数は「遅い」時間で考えるということである。

経済変数の中でも、比較的速く変化するものもあれば、非常にゆっくりとしか変化しないものもあると考えられる。例えば、価格はすぐに上下するかもしれないが、雇用率や賃金シェアはそれよりは変化に時間がかかるだろう。産出資本比率や技術進歩、潜在産出量など

は、さらに長いスパンで変化するのであろう。しかも、それらは多くの場合、経済の動学の中で、互いに影響を及ぼし合っている。すなわち、景気循環においては、短いスパンでの速い循環と、長いスパンでの遅い趨勢とが存在し、更に相互に作用し合っていると考えられる。したがって、それぞれを別々に考えたとしても、その後で結合するという過程が必要とされる。

当然ながら、経済分析において、短期モデルと長期モデルという区分は極めて基本的とされている。しかしながら、ここで強調しておきたい点は、短期モデルと長期モデルというように別々に考慮するのではなく、短期的な循環と長期的な波動の両方を同じモデルの中で考慮するという点である。短期モデルと長期モデルとして区別される場合、諸変数は単にどちらかでは独立変数として扱われ、どちらかでは一定のパラメータと置かれるのが一般的である。諸変数の時間スケールの長短は考慮されない。ゆえに短期モデルと長期モデルを結合する場合、すべての変数は同じ時間の中に置かれる。しかし、変化のスパンに大きな差がある場合、こうした扱いは適切ではない。

非線形動学では、このような問題は一般に fast/slow dynamics と呼ばれている。基本的な技法は、「速い」時間を t とすれば、「遅い」時間は $T = \epsilon t$ と表すというものである。ただし、 ϵ は非常に小さなパラメータである。このように、変数の時間的尺度の差異を考慮することで、新たな結論が得られる。

景気循環理論においては、短期モデルと長期モデルの区別は行われても、変数の間での時間スケールの違いはほとんど考慮されない。ゆえに、短期モデルの変数は実質長期モデルの動学に影響を及ぼさないし、逆も然りである。モデルの構造という観点からすれば、短期モデルと長期モデルの違いは、異なる諸条件を置くことで、どの変数を動かしてどの変数を一定とするかという点にあるのであって、異なる長さの時間尺度という構造を考慮し、区別しているわけではない。短期モデルと長期モデルはこの意味では異なる2つのモデルを別々に考察しているようなものである。その分析手法の意義は当然ながら否定しうるところではないものの、短期と長期の動学を総合して考察するという場合には、別の観点が必要になる。

時間的尺度の差異の導入によって短期と長期の動学を総合するという事は、直観的に言えば短期的な波と長期的な波を重ね合わせるという分析が可能になるということである。

Ryoo(2010)やRyoo(2013)などは、長期的な波動と短期的な循環とを区別しているものの、その結合の仕方は短期と長期で諸変数に異なる条件を置くことによってであり、各変数の持つ時間の違いを区別することによってではない。短期的な循環と長期的な波動を区別した上で結合したことで、Ryoo(2010)やRyoo(2013)は経済変数の変化のスパンをモデルに導入したという貢献を果たしている。しかし、その導入の仕方は2つのモデルを別々に考察するという方法の範囲を越えておらず、短期と長期の密接な関係を総合したものではない。短期と長期の波動の関係を表すのに、fast/slow dynamicsのような非線形動学的手法を用いることで、異なる貢献が得られると期待できる。

また、このような時間スケールの異なる変数は、それぞれ異なる「周期」を持っていると考えられる。ここでの「周期」とは、経済の内部であるか外部であるかを問わず、景気循環に影響を与えるような諸力の変動するサイクルを意味している。

経済学においてこの発想は既に馴染み深いものである。極めて古典的かつ基本的な例を挙げるならば、景気循環の「波」として知られるキチン、ジュグラー、クズネッツ、コンドラチェフの4つの波がある。これらの波の重要な特徴は、その周期の長さの違いである。これらの波が現代の経済にどの程度当てはまっているのか、またそれらの周期の区別や具体的な長さ、発生要因の解釈が本当に適切なのかといった問いは本稿の議論を超えてしまうものの、経済変動の中に異なるサイクルで運動する諸要因が存在するというのは妥当と思われる。そもそも、景気循環という語自体が、経済が好況と不況を繰り返す「波」であるという意味を含んでいる。その一方で、そのような各要因はどのくらいの長さの「周期」を持っているか、それが経済変動にどのように影響するのかという点は、景気循環のモデルの中ではあまり考慮されていない。モデルの中で働く諸力の「周期」に着目し、その効果を考えることは、景気循環理論における「時間」概念の拡張の必要性を示唆する。

景気循環理論についての「時間」概念として、3つ目の要素は「循環の速さ」である。そもそも景気循環理論の中心的な関心は、好況か不況か、上昇局面か下降局面か、成長か停滞かということである。しかし、現実の景気循環を考えるならば、そのような質的な区別だけでなく、それらがどの程度なのかという量的な分類も重要である。例えば、不況期は急激で強烈な恐慌 depression と緩やかで持続的な停滞 recession の2つに区分できる。日本経済を例

にとっても、リーマンショックの影響による景気の落ち込みと 2010 年代の景気後退は、同じ不景気といってもその様態は異なるのであり、景気循環理論にとっても、景気変動の速さ、あるいは変化の激しさを明示的に議論することは重要な意味を持つと言って良いと思われる。しかしながら、景気循環理論においては強く注目されておらず、とりわけモデルの中で積極的に議論されることは少ない。景気循環理論におけるこうした「循環の速さ」に関する問題は、本稿で着目する課題の 1 つである。先に紹介した Krugman(1996)の指摘も、この点に深く関連している。

この点に関しては、カタストロフィー理論の応用が特徴的な手法である。Varian(1979)は 3 次元に拡張されたカルドア・モデルを考慮し、景気回復に「速い」経路と「遅い」経路が存在することを、カタストロフを用いて説明した。Lordon(1997)はグッドウィン・モデルにいくつもの修正を加え、景気の緩やかな停滞がある地点を過ぎると途端に急激な不況へと落ち込む様相を、やはりカタストロフによって表現した。

それ以外の例としては、緩和振動子として知られる現象によって景気循環の速さを説明した Goodwin(1951)がある。緩和振動子とは、周期的な振動解であるものの、変化が非常に速い部分と非常に遅い部分との両方を有しているものである。

以上の考察を踏まえて、本稿の目的は以下のように要約できる。まず本稿では、景気循環理論に関して 3 つの課題を設定する。最初に、内生的に生じる振動と外生的な作用による変化の両方を考慮すること。次に、時間スケール、周期、循環の速さといった時間に関する問題を吟味すること。そして最後に、それらに経済学的な意味づけを与えることである。この 3 つの課題の解決に向けて、本稿では非線形動学をどのように使用するかという問いを設定し、その具体的な使用法について考察していく。

本稿の考察は、大きく 3 つの部分によって構成されている。これらの議論は、先に挙げた 3 つの時間概念に対応している。

1 つ目の議論は、内生的な振動と変数の時間スケールの効果に関するものである。この議論のため、グッドウィン成長循環モデルを取り上げ、拡張する。その理由は、グッドウィン成長循環モデルが内生的な振動解を生じる景気循環モデルとして今なお重要な意味を持っているからである。本稿の第 1 章ではこのグッドウィン成長循環モデルを拡張し、さらに各変

数の時間スケールの差異を考慮することで、その効果が得られる結果を大きく変更しうることを論じる。

2つ目の議論は、内生的な振動と外生的な揺動の相互作用及び周期の差異に関係している。ここでは、非線形乗数・加速度モデルを対象とする。このモデルは乗数・加速度モデルの枠組みに非線形性を導入した初期の例であり、非線形景気循環理論のモデルとして有用である。また、このモデルは内生的な振動を生じると同時に、外生的な諸力による揺動を導入した議論も盛んである。そこで、本稿の第2章ではこのモデルを元に、内生的に生じる振動が外的諸力によって受ける影響とその周期がもたらす効果について考察する。

3つ目の議論は、循環の速さあるいは程度についてである。本稿では、第3章と第4章で、カタストロフィー理論の持つ効果について検討する。第3章では、不況期における下落の速さの違いに着目した Lordon(1997)について検討する。カタストロフィー理論、特にくさびカタストロフを用いることで、Lordon(1997)の議論を発展させることができ、好況と不況の両局面の変化の速さを表せるだけでなく、そのメカニズムについて多くの含意が得られることが論じられる。また、Lordon(1997)はレギュラシオン・アプローチに基づくモデルであり、カタストロフィー理論がレギュラシオン・アプローチに与える有用性についても述べている。第4章ではくさびカタストロフを用いて景気の回復局面を類別した Varian(1979)に、カタストロフィー理論の一種である燕の尾カタストロフを用いた拡張を行うことで、突発的で急激な変化の発生条件や、景気循環の多様な経路の存在について考察する。

1章 技術進化を考慮した3次元グッドウィン成長循環モデル及び時間スケールの影響

序論

内生的な景気循環を論じたモデルとして、グッドウィンの成長循環モデル(Goodwin(1967))は極めて重要である。このモデルでは、資本家と労働者の対立が内的な振動をもたらす要因として置かれ、雇用率と賃金シェアの相互作用が説明されている。

景気循環理論の研究は多岐にわたるが、内生的な振動を記述するモデルはその一部に過ぎない。この意味でグッドウィン成長循環モデルの意義は極めて大きく、今日まで多様な研究が行われている。

グッドウィン成長循環モデルの大きな問題とされてきたのは、構造不安定という性質である。グッドウィン成長循環モデルでは、初期条件や定式化のごく僅かな変化によって数値解が別の軌道に移ってしまうことが知られている。このような結果は、小さな要因によって景気が非常に鋭敏に反応するという解釈をもたらす。実際の経済がそれほど安定性に欠けるとは考えづらいため、以降の研究ではグッドウィン成長循環モデルの構造安定性について盛んに議論された。

グッドウィン成長循環モデルの拡張の1つに、資本係数の内生化の方向が存在する。これは労使の対立が資本家に労働節約的な資本への投資を促すという点で、グッドウィン成長循環モデルの前提に忠実である。

資本係数に関する拡張の意図は、技術進化の影響を考慮することにある。このような拡張は Shah and Desai(1981)が端緒となり、Van der Ploeg(1987)を始めとして多くの研究が存在し、Foley(2003)や Tavani(2012)、Tavani(2013)、Tavani and Zamparelli(2015)、Zamparelli(2015)、McIsaac(2021)等を例示することができる。Tavani(2012)や Tavani(2013)、Zamparelli(2015)では労使交渉力が投資や雇用に与える影響が考慮され、労使交渉力の生産性を上昇させる反面雇用率を低下させるという効果について論じられている。McIsaac(2021)は Van der Ploeg(1987)の定式化を元に実証的分析を行っている。

その他の拡張の方向として、政策効果を考慮するものがある。主としてこの研究では、政策のラグに着目されている。このとき、グッドウィン成長循環モデルの基本的な変数である賃金シェア、雇用率に加えて、期待インフレ率等の変数が新たに考慮されることが多い。例として、Asada(2006)や Yoshida and Asada(2007)が挙げられる。これらの議論では、政策の発案から実際に効果が生じるまでの遅れが重要な役割を果たす。Yoshida and Asada(2007)では賃金シェア、雇用率、期待インフレ率の3次元体系について、財政政策に関するラグがカオス的挙動をもたらす可能性を論証している。Asada(2006)では雇用率、産出-資本比率、負債-資本比率、自己資本比率、期待インフレ率の5次元体系に拡張された検討が行われてい

る。また、政策ではなくカレツキアンの稼働率を変数に加えたモデルも存在する。

Sasaki(2013)はカレツキアンの投資関数とマルクシアンの産業予備軍効果及び産業予備軍創出効果の導入という拡張を加えることで、稼働率を加えた3次元体系でリミットサイクル解が生じることを論証している。

上に挙げたような拡張は、グッドウィン成長循環モデルに新たな変数を考慮するという点で一致している。当然ながらそれぞれの拡張の意味や分析の結果は異なっているが、グッドウィン成長循環モデルの動学的安定性に関しては、新たな変数を導入するという拡張が大きな効果を持つことが分かる。

その他にも、遅れに着目した研究として、Sportelli and De Cesare(2022)がある。これは通常のグッドウィン成長循環モデルと同様に賃金シェアと雇用率の動学であるが、それぞれが過去の変数から影響を受けると仮定されている。それにより、長期的にはカオス・アトラクタが出現するという、景気循環理論的にも動学モデル的にも注目に値する結果が得られることを主張している。また、確率的ノイズを考慮した研究としてHuu and Costa-Lima(2014)、McIsaac(2021)がある。

本章では、最初に挙げた技術進化の内生化に関して議論する。

技術進化に関する拡張は、Shah and Desai(1981)やVan der Ploeg(1987)に端を発する。これらでは、資本係数が3つ目の変数として内生化され議論されている。その一方で、両者の議論では動学としての関心はあくまでも賃金シェアと雇用率の相互作用にあり、資本係数を含めた3次元の動学は議論されていない。Shah and Desai(1981)やVan der Ploeg(1987)に基づいた考察はFoley(2003)やZamparelli(2015)、McIsaac(2021)、Tavani and Zamparelli(2015)といったものが挙げられるが、それにおいても同様に賃金シェア、雇用率、資本係数の3次元の動学は考察されていない。グッドウィン成長循環モデルでは体系がリミットサイクルを生じるかどうか重要な論点の1つであるが、技術変化を導入した3次元体系におけるリミットサイクルの発生は明示的に議論されていない。

一般的に、動学モデルは2次元体系よりも3次元体系の方が複雑になるが、その分結果の豊富さも大きく異なる。とりわけ、動学が非線形性を持つ場合は特にそうである。景気循環理論の分析に対する非線形動学の効果は、Lorenz(1990)やRosser, Jr.(1991)、Puu(1993)、

Zhang(1991)等が詳細な検討を行っている。グッドウィン成長循環モデルはよく知られているように非線形的なモデルであり、通常の2次元体系から3次元体系への拡張は、動学モデル的にも景気循環理論的にもより興味深い考察を可能にすることが期待できる。

本章では、こうした理由から、資本係数を含めた3次元体系の動学を明示的に考察する。これにより、技術進歩が内生化したモデルでどのような挙動が生じるかをより詳細に見て取ることができる。

また、本章の試みとして、変数の変化の違いを考慮する。経済変数の中には速いスパンで変化するものもあれば、ゆっくりとしか変化しないものもある。本章では、技術進歩を示す資本係数は、賃金シェアや雇用率よりも変化の遅い変数だと仮定する。このような考え方はfast/slow dynamicsや多重スケール分析、あるいはシナジェティクスといった手法に基づくが、このように変数の変化の速さを導入することが大きな影響を持つことを論証する。

本章の構成は、以下のようになる。第1節では本章で議論する技術進歩を内生化したモデルを導入し、シミュレーションによって数値解を検討する。第2節では変化の速さの違いを加えて、第1節で得られた結果に比べてどのような差異が生じるかを比較する。結論では得られた結果を要約し、非線形動学の応用の意義について述べる。

1.1 技術進歩を伴うグッドウィン成長循環モデルの考察

1.1.1 一般形

Shah and Desai(1981)及びVan der Ploeg(1987)のアイデアは、資本係数を内生化することで、技術進歩を体系に組み込むというものである。Van der Ploeg(1987)によれば、体系は以下のようになる。なお、 ω は労働者の賃金所得、 v は雇用率である。また、 σ は資本-産出比率(資本係数)であり、技術進歩を表す変数として用いられている。

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = f(v) - (1 - \mu)\phi\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) = \Omega(\omega, v) \quad (1)$$

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\theta(\omega)}{\sigma} - \psi(\omega) - \phi\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) - \beta = V(\omega) \quad (2)$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \psi(\omega) \quad (3)$$

ここで、 $f' > 0$, $\mu \geq 0$, $\phi(0) \geq 0$, $\phi' > 0$, $\phi'' < 0$, $\theta' < 0$, $\psi' > 0$ である³。

本章では、より技術進歩を内生的に扱うために、このモデルに関していくつかの変更を検討する。

最初に、雇用率の方程式について、独立変数に賃金シェアに加えて雇用率自身の水準 v と資本係数 σ を導入する。これは以下のような根拠に基づく変更である。

雇用率の決定要因に、労働者の交渉力を挙げることができる。これは一方では、より高い雇用率に応じて労働者の交渉力が高まり、反対に労働者の高い交渉力はより高い水準の雇用率を確保するというロジックによって正当化される。他方では、労働者の高すぎる交渉力は、資本家の労働節約的な技術への投資を促進し、結果として雇用率を低下させてしまうという効果も考えられる。こうした論理は Goodwin(1967)において、グッドウィン成長循環モデルにおいて賃金シェアと雇用率が循環を描くことへの経済学的意味づけとして提案された。また、Tavani and Zamparelli(2015)や Tavani(2013)においても、このような労働者の交渉力と雇用率の相互関係が想定されている。このように考えると、雇用率は何らかの経路でそれ自身の動学に影響を及ぼすと考えて良いと思われる。

次に、資本係数の動学について、資本係数それ自身の水準も動学に影響を与えると仮定する。これは、例えば資本係数が低い場合はより増加しやすく、逆に高い場合は増加の程度は

³ $\phi(\dot{\sigma}/\sigma)$ は生産性が賃金シェア ω に与える影響を表しており、生産性が資本係数 σ の動学 $\dot{\sigma}/\sigma$ の関数であることを意味している。 $\phi' > 0$, $\phi'' < 0$ は、 $\dot{\sigma}/\sigma$ が ω についてS字型の関数となっていることを表す。さらに、 $\phi(0) \geq 0$ は、 $\dot{\sigma}/\sigma$ であっても生産性が賃金シェアに与える影響が0ではないという仮定である。

また、 $f' > 0$ 及び $\mu \geq 0$ は、雇用率 v と生産性 $\phi(\dot{\sigma}/\sigma)$ の上昇が賃金シェア ω に正の影響を与えることを示している。

$\theta(\omega)$ は企業の利潤が雇用率に与える効果を表す関数である。 $\theta' < 0$ は、利潤シェアが $1 - \omega$ で表されることによる。これらの設定は Van der Ploeg(1987)にてより詳細に解説されている。

弱くなるといったロジックを表している。資本の動学に例えばカルドア型の S 字型の投資関数のような非線形性を導入するならば、資本係数の動学が資本係数の水準に影響を受けるのは自然な設定である。また、Shah and Desai(1981)や Van der Ploeg(1987)では技術進歩は賃金シェアのみの関数となっている。賃金シェアは総生産の関数として定義できる。したがって、これはある意味では成長が技術進歩への投資を促し、結果労働生産性を上昇させるという加速度原理を示しているとも言える。しかし、上述のように労働者の交渉力を加味するならば、交渉力が高いならば労働者はより高い雇用率を求めるというように、技術進歩の投資に雇用率が与える影響が考えられる。この影響は Goodwin(1967)や Sportelli(1995)、Tavani and Zamparelli(2015)等で考慮されている。

したがって、労使関係をより明示的に考慮するために、資本係数の動学は賃金シェアだけでなく、雇用率あるいは資本係数それ自身の水準にも影響を受けると変更するのがより適切と思われる。

最後に、賃金シェアの動学を ω と v によって定義する。労働者の賃金シェアは、総生産あるいは国民所得の増加や、前述のような労働者の交渉力によって決定される。総生産の増加はそれに伴って労働者の賃金シェアを変化させると考えられ、また生産の拡大のために雇用率が上昇すれば、労働者の交渉力が高くなり、賃金率の増加を求める結果として賃金シェアが上昇する。このような仮定の下で、賃金シェアや雇用率の増減が賃金シェアの変化に影響すると考える⁴。

⁴ ここでは労働者は、交渉力の増大に伴い賃金交渉を行うと仮定している。直前では、労働者は高い雇用率の実現と維持を望むと仮定している。労働者は労使交渉において、より高い賃金とより高い雇用率の両方を望むのが自然であると考えられるが、恐らく実際には交渉の結果、どちらか片方のみ(例えば賃金)を上げるという妥協が実現する。妥協の結果、他方(例えば雇用率)の獲得は犠牲となる。ただし、モデルの仮定としては、労働者の交渉力が賃金と雇用率の両方に影響すると考えるのはどちらも不自然ではないと思われる。実際にそれぞれにどのような影響があるかは、モデルの上では関数形によって規定される。

上述の検討によって、(1)、(2)、(3)式に代わって以下のようなモデルが得られる。

$$\dot{\omega} = \Omega(\omega, v) \quad (4)$$

$$\dot{v} = V(\omega, v, \sigma) \quad (5)$$

$$\dot{\sigma} = \Psi(\omega, v, \sigma) \quad (6)$$

この形は一般的な3次元体系と見なせる。2次元体系よりはやや複雑になるが、資本係数を明示的に変数として組み込んだ考察が可能になる。また、次元が増えたことで、動学的に興味深い挙動が確認できる。

次節では、これらの体系を特定化し、数値解を考察する。

1.1.2 特定化とシミュレーション

本章では、(4)-(6)式を以下のように特定化する⁵。

$$\frac{d\omega}{dt} = r \left(1 - \frac{\omega}{K}\right) \omega - \frac{b\omega}{c + \omega} v \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = k_1 \left(\tanh\left(\frac{\omega - \eta}{s}\right) + 1 \right) \frac{b\omega}{c + \omega} v + \alpha_1 \sigma - dv \quad (8)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = k_2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{\omega - \eta}{s}\right) + 1 \right)\right) \frac{b\omega}{c + \omega} v - \alpha_2 \sigma \quad (9)$$

これらの特定化には非線形項が含まれている。その理由は、明瞭であるが簡易すぎる線形項よりも、非線形項によってより現実的な定式化ができると期待できるからである⁶。

また、前述の(3)式と比較すると、この議論においては ω の動学に $\dot{\sigma}/\sigma$ を考慮しない形になる。一見すると、生産性を導入しないように見えるが、実際には v の動学を通じて間接的に効果を及ぼす。このような間接的な導入の仕方は、生産性の上昇が賃金の上昇に直結するような制度は必ずしも一般的ではないと考えられること、それよりも労働者の交渉力の方を大きな要因として考慮していることが理由である。

⁵ 特定化には Kuwamura and Chiba(2009)を参考にし、パラメータの値等を適宜変更した。

⁶ 例えば、 $\tanh((\omega - \eta)/s) + 1$ という項はシグモイド関数であり、 ω の値に関して非線形項である。 $b\omega v/(c + \omega)$ という非線形項は ω が c に対して十分に大きいとき、 bv に収束し、その値

これらの動学を知るためにシミュレーションを行う。結果は図1のようになる。図1で示されているように、適当な初期状態から出発した解軌道はリミットサイクルに収束する。すなわち、安定的である。

一方で、収束する先は周期的に運動を続けるリミットサイクルであり、均衡点ではない。したがって、定常状態が実現しても経済は内生的な振動を続けることが示されている。

このように、技術進化を表す資本係数を内生化したモデルを考察すると、グッドウィンの成長循環は安定性を持つ。この結果は、技術進化を内生化した Shah and Desai(1981)や Van der Ploeg(1987)以降の研究では明示的に示されていなかった3次元体系の考察が、景気循環の内生的振動という興味深い結論をもたらすことを表している。

より詳細に解釈を試みるならば、以下のようなになる。適当な位置にある経済は賃金シェア及び雇用率の循環を繰り返しながら、資本係数は上昇していく。すなわち、労働節約的な技術進化が進む。しかし、一定期間を経た後は賃金シェア、雇用率、資本係数は内生的な循環を繰り返し続ける。すなわち、技術進化も永遠には続かず、一定の水準を推移するという考察ができる。

この結果は、グッドウィン成長循環モデルを3次元体系に拡張しても、2次元体系の場合と同様にリミットサイクルの発生という現象が生じうるということを示す。ただし、3次元体系による論証を明示的に行った例は少ないことから、ここで得られた結果にも理論的意義があると言って良いと思われる。

1.2 時間スケールの導入とその効果

これまでの議論では、賃金シェアと雇用率、資本係数の3つの変数すべてを同一の時間スケールで扱ってきた。すなわち、いずれの変数についても時間 t に関する動学を考慮してきた。しかし、賃金シェア及び雇用率に比べると、資本係数の変化はかなり遅いと考えるのが

を超えない。これらの項は、分配の増加がさらに分配を増加させるとは限らないというような含意を表している。Goodwin(1967)や Tavani and Zamparelli(2015)はこうした見解を取っている。

より自然な設定だと思われる。上述の議論では、このような問題は考慮されていない。以下の議論ではこのような変化の速さの差異を動学的に考慮する。

変数の変化の違いに着目する分析手法は、fast/slow dynamics や多重スケール分析、あるいはシナジェティクスと呼ばれる⁷。

この手法の詳細な解析的な議論はやや難解であるが、基本的なアイデアは極めて単純である。その手法の第一は、速い時間スケールを表す t と遅い時間スケールを表す $T = \epsilon t$ とを区別するというものである。ここで、 $\epsilon > 0$ は極めて小さい値であり、したがって T の変化のスペクトルは t に比べてゆっくりとしたものになる。

時間 t に関する体系は、したがって以下のように変更される。

$$\frac{d\omega}{dt} = U(\omega, v, \sigma)\omega \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = V(\omega, v, \sigma)v \quad (11)$$

$$\frac{d\sigma}{dT} = \Psi(\omega, v, \sigma)\sigma \quad (12)$$

緩やかな変化に従う3番目の式のみ、時間 T による微分で与えられる。ここで、時間に関する変数変換によって

$$\frac{d\sigma}{dt} = \epsilon\Psi(\omega, v, \sigma)\sigma \quad (12)'$$

が得られる⁸。

前項で与えられた特定化も、同様に変更される。

⁷ 景気循環モデルにおける応用は、Lordon(1997)がある。Zhang(1991)ではより詳細な検討が行われている。詳細は補論 A を参照。

⁸ 微分の連鎖律(チェーンルール)により、 $\partial\sigma/\partial t = (\partial\sigma/\partial T) \cdot (\partial T/\partial t) = \epsilon(\partial\sigma/\partial T) = \epsilon\Psi(\omega, v, \sigma)\sigma$ となることによる。

$$\frac{d\omega}{dt} = r \left(1 - \frac{\omega}{K}\right) \omega - \frac{b\omega}{c + \omega} v \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = k_1 \left(\tanh\left(\frac{\omega - \eta}{s}\right) + 1 \right) \frac{b\omega}{c + \omega} v + \alpha_1 \sigma - dv \quad (14)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \epsilon \left\{ k_2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{\omega - \eta}{s}\right) + 1 \right) \right) \frac{b\omega}{c + \omega} v - \alpha_2 \sigma \right\} \quad (15)$$

この体系は、形式上はパラメータが僅かに変更されたに過ぎないが、この変更は2つの異なる時間スケールの影響を示している⁹。

シミュレーションによって、図2並びに図3に示されるような結果が得られる。図2を参照することで、図1とは全く異なる解軌道が実現していることが分かる。適当な初期値から出発した軌道は、大きく螺旋を描きながら緩やかに上昇しているが、一定期間が経過した後は小さな螺旋で急激にz軸(資本係数)方向へと上昇していくが、徐々に上昇速度は低下していき、今度は横方向へと推移していく。期間t=2000とt=10000との比較によって、ある程度まで推移すると一定の領域に引き寄せられることが分かる。図では、 $(\omega, v, \sigma) = (0.6, 0.9, 1.8)$ 付近に留まっていることが見て取れる。ただし、t=2000とt=10000とをよく見比べてみると、後者においては収束しているはずの領域の部分に違いが見受けられる。より分かりやすいように抜粋すると、単に一点に吸引されるのではなく、一定の領域に吸引されながらもその軌道はカオス的なばらつきを生じていることが分かる。したがって、実際はカオス・アトラクタが生じていることが理解できる。

図3では、補足としてシミュレーション期間をt=20000まで延長した際の結果を表している。期間を延長してもカオス的なふるまいは消失しておらず、図2で得られた結論をより明確に示していると言える。

このことは、資本係数の変化が賃金シェア及び雇用率よりも遅く、したがって技術進化が緩やかに進行していくと仮定した場合は、そうでない場合と比べると軌道がより奇妙な変化を描き、賃金シェアや雇用率の動学も著しく変化する。十分に長い時間を取ると、解はカオ

⁹ 詳細については補論Aにて論じている。

ス・アトラクタに引き寄せられた状態で安定することが分かる。この状態を図1の定常状態と比較すると、図1のリミットサイクルの半径と比べて図2の吸引領域は小さく、したがって変化の幅という点では図2の方がより景気循環の程度は緩やかである。しかし、図2ではカオス的な振る舞いが実現しており、図1よりもその変化の仕方は不規則である。

結論

本章における議論の特徴は、資本係数を含んだグッドウィン成長循環モデルの動学を直接的に考察した点と、資本係数の変化の速度に着目することで得られる結果に重要な相違が生じるという点の2つである。技術進化を考慮するために資本係数を内生化するという拡張はこれまでも行われてきたが、3次元体系として明示したのは本章の意義の1つと言って良いと思われる。この検討によって、リミットサイクル軌道が出現するという主張が得られた。したがって、技術進化を内生化すると、グッドウィンの成長循環モデルは安定性を得ることが分かる。さらに、定常状態に至ったとしても、内生的な振動は繰り返され続ける。これはグッドウィン成長循環モデルの特徴的な結論である内生的な景気変動の持続という現象は3次元体系でも維持されることを支持している。これを明示的に論証したのは本章の意義の1つと言って良いと思われる。

本章では、各変数の変化の速さに差があると仮定した場合、しなかった場合と比べて動学に著しい影響があることも検討した。非線形動学ではfast/slow dynamics やシナジェティクスと呼ばれる手法であるが、こうした景気循環に関する変数の変化の速さの違いに着目した議論はこれまであまり行われていない、本章が強調したい点である。本章で検討したように、諸経済変数はその変化の速さに違いがあると考えるのは自然であり、したがって体系にfast/slow 構造を導入することは、景気循環理論としても動学モデルとしても非常に意義深い。本章では実際にシミュレーションを行い、その結果を提示することで、その意義の一端を述べている。

本章では、内生的な振動を生じる非線形景気循環モデルとして、グッドウィン成長循環モデルを取り上げることで、その興味深い性質を考察した。景気循環理論として、内生的な振

動の考察は極めて重要であり、またそのためには非線形動学を用いることが有用である。グッドウィン成長循環モデルから、リミットサイクルだけでなくカオス・アトラクタの出現を示唆したのは、本章の特徴の1つであると言って良いと思われる。

非線形動学を用いた景気循環モデルの研究は、1980-90年代に比べると主流とは呼べないかもしれない。しかし、非線形動学に特徴的なカオスや複雑系といった概念が経済変動の分析に依然として有効であることは、今日でも強く主張されている(Rosser, Jr.(2021)等)。本章の議論によっても、こうした非線形動学の有用性の一端が提示されていると思われる。

2章 非線形乗数・加速度モデルにおける外的強制力の効果の再考

序論

景気循環のモデルに非線形動学を導入した初期の例は、Hicks(1950)や Goodwin(1951)のような乗数・加速度モデルである。とりわけ Goodwin(1951)の非線形加速度因子を導入した乗数・加速度モデルは、非線形動学の景気循環理論への応用としても重要である。以下、本章ではこのモデルを非線形乗数・加速度モデルと呼称する¹⁰。

Lorenz(1980)や Lorenz and Nusse(2002)によって、Goodwin(1951)による非線形乗数・加速度モデルはリミットサイクルを示しうると同時に、カオス的挙動をも生じることが論証された。それを端緒とし、Matsumoto(2009)や Li et al...(2011)、Mastumoto and Szidarovszky(2015)等の拡張がされてきた。

¹⁰ 非線形項を考慮した乗数・加速度モデルとしては Hicks(1950)も重要な例であるが、その定式化の意味は Goodwin(1951)とほとんど変わらず、また Goodwin(1951)に基づく研究の方が多いことから、Goodwin(1951)によって提唱されたモデル及びそれを拡張した研究を非線形乗数・加速度モデルと呼ぶのは差し支えないと思われる。

非線形乗数・加速度モデルの1つの拡張は、遅れの導入である。もともと Goodwin(1951)モデルでは、投資に伴うラグが導入されており、このラグを拡張していく方向の議論が多く行われている。Mastumoto and Szidarovszky(2015)や Matsumoto,Nakayama,and Szidarovszky,(2018)は、それ以外の、例えば消費の遅れを導入し、解析を行っている。Matsumoto(2009)は、変動的なラグを導入することで、2つのリミットサイクルが発生することを示している。

他の拡張としては、Jungeilges and Ryazanova(2017)は確率的ノイズを導入し、それがアトラクタの発生に与える影響を議論している。Puu (1986)は貿易等を考慮することで空間的な差異を導入した考察を行っている。

以上で簡単に述べたように、Goodwin(1951)による非線形乗数・加速度モデルには多くの拡張が行われており、リミットサイクルの存在やその個数、カオス・アトラクタの出現というように、多様な結果が生じることが明らかになっている。非線形乗数・加速度モデル自体は古くからあるモデルである一方で、近年でも多くの研究が行われているのは、このような拡張に対する種類に富んだ結果という興味深さも大きな一因となっていると思われる。

非線形乗数・加速度モデルのもう1つの側面として、ファン・デル・ポール型の方程式と見なせるという点である。Lorenz(1980)や Lorenz and Nusse(2002)によって、Goodwin(1951)によって提唱された乗数・加速度モデルはファン・デル・ポール方程式とみなすことができると明らかにされた。ファン・デル・ポール方程式は、非線形動学において典型的なモデルの1つであり、内生的な振動を生じるモデルとして多くの分野で注目されている。

ファン・デル・ポール方程式の基本的な性質は、解がリミットサイクルを生じるということである。これに加え、Lorenz(1980)や Lorenz and Nusse(2002)、Li et al...(2011)は、Goodwin(1951)型のモデルを、強制項を伴うファン・デル・ポール方程式に一般化し、カオスの発生可能性について述べた。ファン・デル・ポール方程式は今なお数学や物理学の分野で盛んに研究されている対象であり、上述したように景気循環理論の分野においても、乗数・加速度モデルとして興味深い研究が多く行われている。

ファン・デル・ポール方程式の拡張の1つの方向性として、外的強制力の効果の研究がある。非線形乗数・加速度モデルにおいて強制項は、所得の内生的な運動に対して外的な諸力を意味する。これは Lorenz and Nusse(2002)では自生的投資とされ、周期関数で表される。

ファン・デル・ポール方程式の外的強制力については多くの研究がある一方で、非線形乗数・加速度モデル乗数・加速度モデルに関しては、外的強制力についての議論は Lorenz and Nusse(2002)以外ではほとんど行われていない。

さらに、Lorenz and Nusse(2002)では強制項は一定の振動を与える力として与えられるが、より現実的な想定では、この振動も一定ではなく変化するものであると考えられる。言い換えれば、所得の動学に他の諸力の振動の動学を加えた体系を考慮することで、より現実に近い考察が行えると期待できる。

さらに、自生的投資についても再検討の余地がある。ここで自生的投資とは景気循環の内部とは独立的な投資であり、例えば資本の減価償却に伴う投資を挙げることができる。しかし、技術進歩を促すような投資を考慮するならば、この投資とは異なる扱いをするべきだと思われる。減価償却的な投資に対して、技術進歩にかかわるような投資は長期的な周期であり、またより不規則的であるかもしれない。

この点に関して簡単な拡張は、強制項を2種類用意するというものである。一方は自生的支出であり、例えば比較的短期の周期を持つ投資の循環である。もう一方は比較的長期の周期を持つ投資であり、例えば技術進歩にかかわる投資や、その他の社会的・環境的要因である。

本章の構成は、以下のようなになる。まず第1節において非線形乗数・加速度モデルを概観し、外力について検討する。第2節では1つの拡張として、変動的な外力を導入し、その結果を吟味する。第3節ではもう1つの議論として、固定的ではあるが周期の異なる2つの外力の効果を検討する。結論ではこの2つの議論から、非線形乗数・加速度モデルの意義を考察する。

2.1 非線形乗数・加速度モデルと外力

非線形乗数・加速度モデルは、一般化するとこのような形になる。

$$\ddot{y} + A(y)\dot{y} + B(y) = O^*(t) \quad (16)$$

ここで、 y は所得である。

Lorenz and Nusse(2002)では、以下のように特定化されている。

$$\ddot{y} + \frac{a(y^2 - 1)}{y^2 + 1} \dot{y} - by(1 - y^2) = csin(t) \quad (17)$$

ここで、 a 、 b 、 c はそれぞれ正のパラメータである。

この式はファン・デル・ポール方程式と呼ばれる2次微分方程式の形となっており、さらに外力 $csin(t)$ を考慮していることから、強制振動子と呼ばれる。この形の方程式は内生的な周期解を生じることが知られている。非線形乗数・加速度モデルの大きな特徴は、内生的な循環を表すことができる点である。

さらに、ファン・デル・ポール方程式は強制項と呼ばれる外力を導入することで、多様な解を生じることが知られている。外力を考慮しないファン・デル・ポール方程式は、周期解を生じるのであり、その軌道は安定なリミットサイクルを生じるが、外力を考慮する場合、その振る舞いはカオス的になることもある。Lorenz and Nusse(2002)は、一定の周期を持つ外力を考慮することで、カオス・アトラクタが生じることを示した。図4は、シミュレーションによって得られた解と位相図を表している。この図によれば、解軌道は周期的であり、またその位相図を取るとカオス・アトラクタの存在がうかがえる。

Lorenz and Nusse(2002)や図4でも改めて示されたように、非線形の乗数加速度モデルは外力の存在なしに周期解を内生的に生じる。その位相図はリミットサイクルを生じることが知られている。一方で、外力によってその軌道は少なからず変更を受け、さらに位相図のリミットサイクルは崩れ、カオス・アトラクタを生じる。

景気循環を考慮するモデルで、内生的な振動が生じるという結果は極めて重要である。それは経済内部のメカニズムが、ある一点の均衡状態に収束するのではなく、浮き沈みを繰り返すということを表している。すなわち、経済の好況と不況の繰り返しに対する内的なメカニズムを捉えることができる。

一方で、景気循環は経済的な要因以外の外的要因の影響を受けることもまた事実である。Goodwin(1951)やそれを元にした Lorenz and Nusse(2002)などは、内的要因と外的要因の両方を加味した議論を展開することで、興味深い動学が生成することを導いた。

しかし、非線形乗数・加速度モデルの外的要因による強制力についての説明は、多くの場合自生的・自律的な(企業の)支出としか説明されず、Lorenz and Nusse(2002)や Li et al...(2011)に代表されるように、多くの場合理論的解釈を行われずに周期的な関数が想定されている。しかし、乗数加速度モデルにとっての外的強制力は、そのような支出関数以外にも多く存在すると考えられる。例えば、このモデルの経済理論的基礎は基本的な乗数加速度モデルであり、実物経済における投資行動の論理を内生的に考慮している。したがって、例えば金融経済の論理はこのモデルによって外的要因の1つである。また、投資行動の決定要因は大きく分けて乗数効果と加速度原理であり、技術進歩に関わるような投資も考慮されていない。当然ながら、政治的情勢、貿易、さらには環境やその他の社会的要因も外的要因である。景気循環は投資行動の(マクロ的な)動学だけでなく、これらの外的要因にも影響されると考えるのが自然である¹¹。一方で、本章序論でも触れたように、非線形乗数・加速度モデルに関する諸研究において、このような外力についての拡張はほとんど注目されておらず、本章で議論する意義は十分にあると思われる。

上述のように、考慮されるべき外的要因は多種多様であるが、その一方ですべてを考慮することは不可能であり、一定の単純化が必要なことは否定されない。ただし、一定の周期的な振動と捉えるだけでは、上記のような外力を考慮するにはあまりに単純である。本章では、大きく2つの特徴に着目して議論する。

まず1つ目は、外力の変動である。Lorenz and Nusse(2002)などでは、外力は一定の周期関数となっている。それが企業の自生的な支出であろうと、他の要因であろうと、周期は一

¹¹ Li et al...(2011)は確率的ノイズも考慮しているが、これがどのようなものかは論じられていない。なお、本章では単純化のため、確率的ノイズは考慮しない。

定ではなく変動すると考えるのがより現実的である。よって、本章では外力もまた変動するものとする拡張を加える。

2つ目の変更は、外力の種類である。上述したように、想定されている外力は1つの関数で表されている。しかし、既に議論したように多くの外的要因が考えられる以上、複数の外力の存在を置くことでより拡張的な議論が可能である。よって、本章では複数の外力を導入する。ただし、あまりに多くの外力を想定するのは議論を煩雑にしてしまう。本章では、周期の長さに着目することで、外力を区別する。すなわち、(相対的に)短い周期の外力と長い周期の外力である。

このような導入の根拠は、以下のような理由による。自生的な支出や技術進歩、他の社会的要因、環境的要因といった外力を考慮する際に、それらの動学が一定ではなく循環的であるとすれば、周期への着目は諸外力の区別に有用である。例えば、自生的投資(例えば、減価償却への投資)や金融市場の変動に比べて、政治的な変化はより長い周期であると考えられる(例えば選挙や政策の決定・施行)。技術革新や環境要因の周期はさらに長いものであると考えられる。このように、多様な外的要因の変動を周期によって区別することは、議論の単純化という点でも、複数の要因を考慮できるという点でも、かなり有効である。したがって、本章では周期の長さが異なる2種類の外力を導入することで、外力についてより詳しく分析することが可能だと考える。

2.2 外力が変動するケース

第一に、外力が変動するケースを考慮する。外力の変動を以下のように定義する¹²。

$$\ddot{y} + \frac{a(y^2 - 1)}{y^2 + 1} \dot{y} - by(1 - y^2) = c \sin(\theta t) \quad (18)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (19)$$

¹² 定式化については Han, and Bi (2012)や Yu, Zhao, and Zhang (2017)を元にした。

パラメータ a 、 b 及び c の値について、組み合わせを変えてシミュレーションすると、図5、図6、図7が得られる。これらの結果を総合し、図4と比較する。第一に解軌道の様相が大幅に異なることが分かる。図5(a)、図6(a)(c)、図7(a)(c)(e)では、いずれにも急激に変化する局面とそれほど変化しない局面とが混在していることが見て取れる。急激に変化する局面は振幅が大きく、周期も短くなっている。それに対して変化が緩やかな曲面では振幅が小さく、周期も長い。このような周期解の密度の偏りというべき現象は、外力の変動という想定によって導出された結果である。

第二に、位相図も異なることが分かる。図4では2つのカオス・アトラクタが出現していたが、図5(b)、図6(b)(d)、図7(b)(d)(f)では、カオス的挙動は生じているものの、中心にリミットサイクルが生じている点で異なる。その結果位相図の軌道もかなり異なったものとなっている。

上述の結果から、外力が固定的ではなく変動するという条件を置くと、モデルの解はかなり異なることが分かる。

更に第3の比較として、各パラメータの組み合わせによって結果に大きな変化が生じることが分かる。図5、図6、図7の諸結果は、先に述べたように、大まかな特徴としては一致しているものの、左辺のパラメータ a と b 及び外力の変動のパラメータ θ の違いによって、周期や振幅に差が生じている。図5、6、7によれば、 θ の違いは波形に影響し、 a と b は解の周期の速さに影響すると考えられる。

以上をまとめると、変動する外力を考慮した場合、その挙動はパラメータの値、特に外力の周期パラメータに大きく影響されるが、大まかな特徴を取り出すことは可能である。そして得られた結果を外力が固定的な場合と比較すれば、その差は明瞭に現れる。

2.3 固定的な外力が2種類存在するケース

続いて、外力は固定的であるが、2種類存在するケースを考慮する¹³。

$$\ddot{y} + \frac{a(y^2-1)}{y^2+1} \dot{y} - by(1-y^2) = d_1 \sin(\omega_1 t) + d_2 \cos(\omega_2 t) \quad (20)$$

簡単化のため、ここでは $\omega_2 = 0.001$ と固定し、 ω_1 及び d_2 の値を変化させた結果を考察する。ここで、右辺の $d_1 \sin(\omega_1 t)$ は比較的短い周期の外力、 $d_2 \cos(\omega_2 t)$ は長い周期の外力を表している。先ほどの議論と同様に、左辺のパラメータ a 、 b 及び d_1 、 d_2 、更に ω_1 の値を組み合わせて考察する。シミュレーションの結果は図8、図9、図10に表されている。

まず解軌道を考えるために、図8(a)(c)、図9(a)(c)、図10(a)(c)を比較する。どれもパラメータの相違による軌道の差異はあるものの、共通した特徴として、短いスパン($t=100$)で見た場合と長いスパン($t=10000$)で見た場合とでかなり様相が異なるということである。短いスパンでは、解は振動を繰り返しながらも収束していくか、最初からあまり変化しないかのように見られる一方で、長いスパンで見ると、より長い周期の波を描いていることが分かる。したがって、短期と長期という異なる時間スケールでは、異なる作用が働いていることが示される。

先に議論した2つの異なるケースと比較すると、今回のケースでは短期的な循環と長期的な波動がよりはっきり区別できることが特徴的である。この特徴は、単にモデルに長期的な外力を組み込んだからというだけではなく、内生的な循環、短い周期の外力、長い周期の外力の3つが互いに作用し合うことで、全体の挙動が生まれていることを示している。実際に図11を検討すればそれが確認できる。図11に示されているのは、長期的な外力のみを導入したケースのシミュレーション結果である。この結果と図8、図9、図10とを比較すれば、単に長期的な外力を導入したから長期的な波動が生じたわけではないことが分かる。

位相図もまた、先の考察とは異なっている。短いスパンでは存在しないアトラクタが、長いスパンでは生じている。例えば図10(b)では、1つのアトラクタに収束するように見える上に、カオス的挙動も見られないが、長いスパンで見た図10(d)では、アトラクタが3つに増

¹³ 定式化に関しては、Ghaleb, Abou-Dina, Moatimid, and Zekry(2021) や Kakmeni, Bowong, Tchawoua, and Kaptouom(2004)の議論を参考にした。

え、更に新たに増えた2つのアトラクタはカオス・アトラクタであることがうかがえる。すなわち、考慮する時間スケールの違いによって、動学の様相は激しく異なっている。

2つの異なる外力を考慮した結果として重要な帰結は以下の2つに要約できる。1つ目は、短期的な局面と長期的な局面では異なる作用が支配していること、そして短期と長期ではそれぞれ見えるものと見えないものが異なるということである。

結論

非線形乗数・加速度モデルは、現在でもいくつかの方向で拡張が進められている景気循環モデルであり、その特徴はファン・デル・ポール型の非線形動学モデルであり、内生的振動解を生じることと、外的強制力によって様々な挙動を生じることである。本章では、このモデルの外的強制力に対する反応に着目し、外力に関する議論を拡張した。外力を変動する場合と2つ存在する場合とをそれぞれシミュレーションによって解を求め、その結果を考察した。

本章の議論で、いくつかの特徴的な結果が得られた。1つには、非線形乗数・加速度モデルにおける外力への注目の重要性である。既に論じたように、非線形乗数・加速度モデルの研究は、カオスの挙動が生じるかどうかや、種々の遅れを導入することでどのような結果が得られるかといった側面に注目するものが多く、外力に関してはその意味をあまり詳しく議論されてこなかった。非線形乗数・加速度モデルが内生的に興味深い挙動を示す以上、外力以外の部分の議論が行われることは自然であるが、このモデルがファン・デル・ポール型のモデルであり、外力によって多様な結果を生じることが知られている以上、外力の考察は大きな意味を持つ。本章の1つの帰結は、非線形乗数・加速度モデルの新たな側面に注目する意味を持たせるものである。

2つ目に、非線形乗数・加速度モデルそのものの意義である。多くの先行研究と同様に、本章でも興味深い結果が得られた。このことによって、非線形乗数・加速度モデルが景気循環の動学モデルとして極めて重要であると主張できる。景気循環理論の豊富さに比べれば、非線形動学を用いた景気循環モデルは少ない。非線形乗数・加速度モデルは、非線形動学を用

いることで、内生的な循環解を生じるモデルの1つであり、景気循環モデルとして大きな意義を持っている。それだけでなく、外的強制力を導入することで、景気循環内部の論理と外的な諸力の相互作用を考慮することができる。

さらに、本章で見たように、外的強制力の違いによって、多種多様な結果が生じるのであり、これらは景気循環モデルとしても非線形動学としても興味深いと思われる。現に本章の議論によって、非線形乗数・加速度モデルは短い周期の循環と長い周期の振動の両方を示すことが分かった。これは景気循環モデルとしては、短期的な景気循環と長期波動との関係を表しうるといふ点で意義のあるものである。短期の循環と長期波動の存在や発生要因、両者の相互作用という問題に関してはいくつかの理論があるものの、この問題は依然として開かれた議論であると言える。本章の考察は、そのような議論の1つとして非線形乗数・加速度モデルという理論が有用である可能性を意味している。

また、短い期間と長い期間では動学の結果に違いが見受けられるという結果は、景気循環を論じる上では大きな意味を持つ。観測する期間によって見える様子が異なるということは、ある一定の期間の景気変動のデータが与えられたとしても、好景気か不景気かという判断を行うには慎重になるべきだということを意味している。数年単位の景気変動は、実際には十年から数十年周期の長期的なトレンドによっても影響を受けているのであり、例えば一昨年や昨年と比べて今年が好調か不調かという視点では、この長期的な影響を見落としてしまう。したがって非線形動学の観点からしても興味深いと思われる。

3つ目の主張は、景気循環を波の合成として見るという視点の示唆である。本章のモデルの経済理論的な根拠は乗数・加速度モデルであり、乗数効果と加速度原理の内生化し、その他の要因を外的要因とすることで、それらの相互作用を論じている。これは異なる周期の波の合成と言える。それというのも、乗数効果と加速度原理による内的なメカニズムは、外力が存在しないケースによって確認できるが、この場合、内的なメカニズムは振動を繰り返す。言い換えれば、波を発生している。外力は三角関数あるいはその合成によって表される波である。本章で外力を導入したケースでは、これらの内的な波と外的な波との合成として、マクロ経済の経済成長率を捉えたということになる。結果として、経済成長率を表す波は内的

なメカニズムによる波とも外力の波とも違う新しい形状となった。この結果は、経済成長率を諸経済変数の波の合成として見ることの意義を示している。

一般に、波という現象に対する分析は、ある波を異なる複数の波が重なり合わさった結果として生じているとみなし、どのような波の合成かを考える。例えば、フーリエ変換はこの際用いられる基本的な手法である。この手法の利点は、どの要因が全体の様相にどの程度影響を与えているのかが明示的に示される点である。

例えば経済成長率を考えると、これはあるマクロ経済システムの出力である。そしてマクロ経済システムは、多種多様な経済変数が変化しながら、互いに相互作用を及ぼすことで構成されている体制である。この論理は通常、いくつかの経済変数に関する(連立)微分方程式として記述される。

一方で、経済成長率の変化をいくつかの経済変数の循環という波の合成の結果生じた波であると見ると、経済成長に影響を与えていると思われる多様な経済変数のうち、どの変数が経済成長にどの程度の影響力を持っているかが示される。本章の議論は、この一例である。乗数・加速度モデルに対し、様々な外力を想定し導入することで、経済成長率の動態にどのような変化が生まれるかを考察した。本章では実証的な議論を行えてはいないが、実際の経済成長のトレンドと比較、検証することで、どのような外力が存在するのかを推定していくという研究の方向性が、本章の考察によって示唆される。

すなわち、本章の結果は、景気循環モデルに関する短期と長期という時間概念の深化に寄与するものと期待できる。

本章の課題は、第一に基本的な枠組みとしては、非線形乗数・加速度モデルを超えておらず、したがって内的なメカニズムとして捉えられているのは、乗数効果と加速度原理のみであり、実物経済のごく一部である。その他の、例えば金融経済といった経済的諸領域や、社会的・政治的・環境的要因はすべて外的な諸力とされている。乗数加速度モデルの現代的意義も含め、理論的な拡張・再検討の余地は多い。

さらに、本章ではモデルの実証研究を行うことができなかった。本章では外力の形状を考慮することで、いくつかの興味深い結果を得られたが、これらが実際の経済変動にどの程度フィットするのか、またそのことにはどのような経済的意味づけが可能なのかという点は、

本章では議論できていない。実証的な検証とそれに基づく修正は、本章の議論の大きな課題である。

3章 景気循環の速度及びカタストロフ的变化の発生

序論

景気循環理論の最も重要な課題は好況と不況、成長と景気後退の動態の分析であると言えるが、景気循環における「速さ」や「激しさ」という課題はあまり明示的に考察されていない。しかし、現実の景気循環を考える際には、好況か不況かという問題だけでなく、その勢いがどの程度かという問題も極めて重要である。例えば、日本経済における「失われた10年」のような、暴落こそ起きないものの停滞が数年続くような景気後退と、世界恐慌やリーマンショックに代表されるような急激な経済状態の悪化に特徴づけられる不況とは、同じ「不景気」でも質的に異なる。一方で、景気循環理論において、このような景気変動の「速さ」がどのような動学によって表されるのかという問題はあまり主要な論点として扱われてはいない。したがって、景気の良し悪しだけでなく、その「速さ」を明示的に説明するモデルについて議論することは、景気循環理論の研究にとって大きな意義があると考えられる。本章の課題は、そのような景気循環の「速さ」を主眼においたモデルの考察である。

もっとも、景気循環理論においてこの論点が全く議論されてこなかったわけではない。景気循環の速さを研究したモデルとして、Zeeman(1974)や Varian(1979)、Lordon(1997)、といった例を挙げるができる。これらのモデルに共通した特徴は、動学に生じる不連続な変化、すなわち解軌道のジャンプについて考察している点である。解軌道にそのようなジャンプが生じることは、景気変動における極めて変化の速い局面(例えば危機的な不況)を説明できることを意味する。

さらに、Zeeman(1974)や Varian(1979)の特徴として興味深いのは、カタストロフィー理論を用いていることである¹⁴。カタストロフィー理論とは、分岐理論や代数幾何、幾何学的制御理論といった数学的手法を用いて諸現象を説明する理論であり、数学者 R.トムや E.C.ジーマンらによって構築された。カタストロフィー理論の応用は 1970 年代に流行し、物理学や生物学といった自然科学領域だけでなく、経済学をはじめとした社会科学領域でも盛んに議論された。その大きな特徴は、緩やかに変化していた現象が突然急激な変化を生じ、それまでとは異なる様態へと移行するという現象を明快に表現できる点にある。このカタストロフィー理論を用いて、Zeeman(1974)は株式市場の暴落やそこからの回復を表現した。Varian(1979)は景気の回復過程について、不況の後に元の経済水準まで比較的短い時間で回復する場合(景気後退)と、回復に長い時間がかかる場合(大不況)とをカタストロフィー理論によって類別した。その他の例として、Woodcock and Davis(1978)はフィリップス曲線をカタストロフィー理論の知見を用いることで拡張した。Fisher and Jammernege(1986)は、Woodcock and Davis(1978)のモデルを実証的に検証し、線形モデルよりもデータのあてはまりが良いことを論証している。

現在経済学においては、カタストロフィー理論はかつて過ぎ去った流行とされているが、そのことをもってカタストロフィー理論の意義が失われたとするかどうかは議論の余地がある。事実、上で紹介したような Zeeman(1974)や Varian(1979)による帰結は、今日でも十分興味深いものである。また、Fisher and Jammernege(1986)のように、カタストロフィー理論が実証分析にも有用である可能性を示唆する研究があることも無視できない。

さらに、近年でもカタストロフィー理論の応用は行われている。例として、アメリカの株式市場について確率的ノイズを含んだカタストロフィー理論を用いて実証分析を行った Barunik and Kuckacka(2015)が挙げられる。他にも、Gong et al...(2022)は上海の原油先物価格の変動がカタストロフィー理論によって説明されることを論じている。Zhang et al... (2013)は中

¹⁴ Lordon(1997)においてもカタストロフィー理論の一種である折り目カタストロフが登場するが、Lordon(1997)ではカタストロフィー理論については簡単に触れられるに留まっており、この観点からの詳細な考察は行われていない。

国における農村地域の情報化の統計分析におけるカタストロフィー理論の有効性について考察している。したがって、Rosser,Jr.(2007)が述べるように、経済学におけるカタストロフィー理論の衰退は流行が過ぎ去った反動とみなすべきであり、カタストロフィー理論の応用の意義が失われたことを意味しないと考える良いと思われる。

本章では、カタストロフィー理論により積極的意義を見出す。前述の通り、カタストロフィー理論は連続的な変化と不連続な変化の推移の説明を得意とする。したがって、本章が課題として挙げた、景気循環の「速さ」「激しさ」を考慮するには、カタストロフィー理論を用いたモデルは極めて有効であると考えられる。

以上をまとめると、本章の課題は、不連続な変化を生じうる景気循環モデルを、カタストロフィー理論を用いて考察することにあると言える。

本章では、不連続な変化を伴うモデルとして、Lordon(1997)を元に議論を進める。

Lordon(1997)は不況局面において、緩慢に進んでいた景気後退が徐々に加速していき、急激な不況へと転じる様態を示したモデルとして興味深い。本章の議論では、Lordon(1997)のモデルは簡単な修正と拡張を加えることで、不況局面だけでなく好況局面の様態を説明するのにも有用であることを示す。また、拡張にあたってカタストロフィー理論の一種であるくさびカタストロフを用いることで、好況局面におけるジャンプの可能性とその条件や、より多様な成長経路の導出といった、より豊富な結論が得られることを論じる。

本章の構成は、以下ようになる。第1節ではLordon(1997)モデルの概略を紹介する。第2節は本章において変更されたモデルの考察である。第2節第1項でLordon(1997)の修正と拡張の方向性について検討し、第2節第2項でその単純なケースを吟味する。第2節第3項ではくさびカタストロフを導入し、第2節第2項で生じた問題点がくさびカタストロフの使用によって解決されることを論証する。結論では、第2節の結果を考察し、景気循環理論及びレギュレーション・アプローチにおけるカタストロフィー理論の有用性について論じる。

3.1 Lordon(1997)モデルの概略

レギュラシオン学派を代表する一人である F.Lordon は、レギュラシオン理論によるフォーディズム理解を元に、1970年代の不況の動態をモデル化している(Lordon 1997)。このモデルの特色は、経済成長の後退期に、異なる複数の状態が存在することを示唆していることにある。すなわち、経済の後退期には、経済成長率が(ある程度高い水準で)緩やかに減少していく状態から、突如現れる急激な成長率の下落の局面を経て、(極めて低い水準で)さらなる成長率減少の状態へ移行するという遷移が起きるとのことである。経済成長が好調か不調かというだけでなく、不調がどのように進むのかという動学をより豊かに表現していることが、このモデルにおいて注目すべき点である。

本節では、Lordon(1997)のモデルを簡単に紹介する。

Lordon(1997)の原型となっているのは、Goodwin(1967)のモデルである。内生的な循環を生じること有名なこのモデルに対し、Lordon(1997)では以下の修正が行われている。第一に、生産性上昇傾向 *productivity trend* を内生化するために、非線形な Kaldor-Verdoorn law を導入すること、第二に、フィリップス曲線を非線形関数として導入すること、第三に、*profit-sharing* の効果を加えることである。

まず Lordon(1997)では、モデルの基本的な構造は以下の式で表される。

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{p}}{p} \quad (21)$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{p}}{p} \quad (22)$$

この2式は雇用率 v と賃金シェア ω の方程式である。また、 q は生産量、 p は生産性、 w は実質賃金であり、変数の上の点は時間に関する微分を表している¹⁵。

¹⁵ Lordon(1997)自身が述べているように、(21)及び(22)式は、形式としてはグッドウィン成長循環モデルの構造と相似している。それというのも、グッドウィン成長循環モデルを提唱した Goodwin(1967)において、雇用率の変化率を生産量の変化率から生産性の変化率を引いたものとして、賃金シェアの変化率を賃金関数の変化率から生産性の変化率を引いたものとして定式化されているが、(21)及び(22)式はそれを表したものだからである。ただし、後に見

Lordon(1997)における修正を1つずつ見ていく。まず、生産性に関する動学に対して、非線形な Kaldor-Verdoorn law を導入する。

$$\frac{\dot{p}}{p} = \phi(g; \beta) \quad (23)$$

ここで g は経済成長率であり、 $g = \dot{q}/q = (1 - \omega)/\sigma$ と定義される¹⁶。 β は technical change intensity のパラメータであり、技術変化の激しさを表す。また、Lordon(1997)では、経済的な構造の表現とも理解される。さらに、 $\beta > 0$ である。ここで、 ϕ に関して以下のような性質を仮定する。

$$(1) \phi'(g) \geq 0 \text{ for all } g \geq 0$$

$$(2) \phi(0) \neq 0$$

$$(3) \phi(g) \text{ exists}$$

$$(4) \exists \tilde{g} > 0; \phi''(\tilde{g}) = 0, \text{ and } g < \tilde{g} \Rightarrow \phi''(g) > 0, g > \tilde{g} \Rightarrow \phi''(g) < 0$$

これらの性質は、 ϕ がS字状のシグモイド関数であることを意味する。

続いて、賃金関数(すぐ後に述べるように、より適切には労働者所得の関数)には以下のような変更が加えられる。

$$\frac{\dot{w}}{w} = \eta(v) + \delta(g) \quad (24)$$

ここで、 $\eta(v)$ はフィリップス曲線であり、非線形関数である。また、

$$(1) \eta'(v) > 0 \text{ for all } v \in [0,1]$$

$$(2) \exists v_n; 0 < v_n < 1, \eta(v_n) = 0$$

である。なお、一般的なフィリップス曲線とは異なり、独立変数にインフレ率ではなく雇用率が取られている。 $\eta(v)$ は、労働者の賃金が雇用率に影響を受けることを意味している。

ていくように、Lordon(1997)ではかなりの変更が加えられ、得られる結果もグッドウィン成長循環モデルとは異なる。

¹⁶ σ は資本係数 $\sigma = k/q$ を表している(k は資本ストック)。

$\delta(g)$ は、profit-sharing の効果を表しており、企業の利潤のうち、一部を労働者に還元するような利潤分配制度が想定されている。したがって、このモデルにおける w は、労働への賃金だけでなく労働者への利潤分配も加味した、労働者の所得全般ということになる。

Lordon(1997)では賃金(労働者所得)と利潤率の正の相関が導入される¹⁷。同時に、賃金(労働者所得)は貯蓄されず、利潤(資本家所得)はすべて投資されるという単純化を行っているため、 $g = r$ であり、profit-sharing の効果は g の関数として表される。なお、 $\delta'(g) > 0$ である。

以上を踏まえると、雇用率と賃金シェアに関するモデルは以下のようなようになる。

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{q}}{q} - \phi(g; \beta) \quad (25)$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \eta(v) + \delta(g) - \phi(g; \beta) \quad (26)$$

ここで、 $g = \dot{q}/q = (1 - \omega)/\sigma$ であるから、雇用率と経済成長率に関する以下のようなモデルが得られる。

$$\frac{\dot{v}}{v} = g - \phi(g; \beta) \quad (27)$$

$$\frac{\dot{g}}{g} = \left(1 - \frac{1}{\sigma g}\right) (\eta(v) + \delta(g) - \phi(g; \beta)) = \left(1 - \frac{1}{\sigma g}\right) (\psi(v, g) - \phi(g; \beta)) \quad (28)$$

\dot{v} と \dot{g} のヌルクラインについての議論は、以下のようなになる。

まず、 $\dot{v} = 0$ のとき、 $g = \phi(g; \beta)$ となる。このとき、 $\dot{v} = 0$ は $f_1(g) = g$ と $f_2(g) = \phi(g; \beta)$ の交点によって表される。図 12 ではこのことが示されている。 f_1 と f_2 の位置関係と ϕ の形状から、この交点は最大3つ存在する。Lordon(1997)では、3つ存在すると仮定している(補論 B 参照)。

$\dot{g} = 0$ のとき、 $\psi(v, g) = \phi(g; \beta)$ となる。 $\partial\psi(v, g)/\partial g$ と $\partial\phi(g; \beta)/\partial g$ の大小によって、 $\dot{g} = 0$ の形状は複数のケースが考えられる(Lordon(1997)及び補論 B を参照)。このうち、

¹⁷ 実際、Duménil and Lévy(1993)の第 15 章では、長期的には賃金と利潤率の正の相関があることが示されている。

Lordon(1997)では、極小値と極大値を1つずつ持つ場合が取り上げられている。この場合のヌルクラインを図示すると、図13のようになる。

これらの仮定から、 (v, g) 平面上で $\dot{v} = 0$ 及び $\dot{g} = 0$ は3つの交点を持ち、これらの点が均衡点である。図13では3つの交点 E_1 、 E_3 、 E_2 が示されている。このとき、 E_1 と E_3 が安定、 E_2 が不安定である(安定性の詳細な議論については、Lordon(1997)及び補論Bを参照)。

E_1 、 E_2 、 E_3 のときの g^* をそれぞれ g^{*1} 、 g^{*2} 、 g^{*3} とすると、 β と g^* の関係が得られる。図14にこれを示す。

更に、Lordon(1997)による β の定式化は、次の式によって与えられる、

$$\dot{\beta} = \frac{1}{T}(R(g) - \bar{R})\Omega'(\bar{R})\Gamma'(\Omega(\bar{R})) = \epsilon P(g) \quad (29)$$

ただし、 $0 < \epsilon \ll 1$ である。Lordon(1997)による設定により、 $\dot{\beta} = \epsilon P(g) < 0$ となる。その理由は、Lordon(1997)では財の選好への多様性が正と仮定されている上に、その増大は β に対して負の効果を与えるとされているからである(詳細はLordon(1997)及び補論Cを参照)。したがって、このモデルは以下のような主張をもたらす。

経済が g^{*3} の位置にあるとする。 β の減少に伴い g^* も緩やかに減少していく。 $\beta = \beta^*$ に近づくにつれて g^* の減少は急激になっていく。 $\beta = \beta^*$ に到達したとき、 g^* はそれまで位置していた上の枝から一気に下の枝へとジャンプする。その後はまた g^* は緩やかに減少していくが、その値はジャンプの前よりかなり低い水準である¹⁸。

¹⁸ このような β と g^* の関係を裏付ける根拠として、Lordon(1997)ではレギュラシオン・アプローチの概念を援用している。レギュラシオン・アプローチにおいては、生産性レジームの疲弊が成長レジームの危機をもたらす要因(の一つ)であると解釈される。成長レジームとは、ある経済の成長を裏付ける経済的・社会的な制度的構造の総体であり、成長レジーム自身も多くのサブ的なレジームからなる集合体である。このうち、生産性の向上に関わるものが生産性レジームと呼称される。しかし、レギュラシオン・アプローチにおけるレジーム概念には、レジームがやがて機能不全を起こし、その結果成長レジーム全体にも負の影響をもたらしていくという含意がある。生産性レジームも同様であり、当初はその機能を十全に発揮し、経済成長を促進するが、そのレジームはやがて陳腐化し、機能し

このダイナミクスの特徴の1つは、 g^* の減少の速度を表していることである。すなわち、 g^* の減少局面においては、「遅い」ステージと「速い」ステージとが存在するという点を示している点である。もう1つの特徴は、 β の減少は連続的であるにも関わらず、 g^* の変化は非連続的であるということである。これは非線形関数の導入によって起こる現象であり、現実を説明するのに有効であると考えられる。

以上で見たように、(内生的な)技術変化の強度(β)が経済成長率(g^*)の変化の仕方に影響すること、技術変化の連続的な変化が経済成長率の非連続的な変化を起こすことが表される。またこのことは、成長率の減少局面において、変化が「遅い」状態と「速い」状態とが存在することを示し、不況の動態について豊富な見解を得ることができる。これらの点が Lordon モデルの特徴である。

これらの特徴は、Lordon(1997)のモデルが、フォーディズム期の崩壊だけでなく、広く景気循環のモデルとして有用な性質を持つことを意味する。ただし、Lordon(1997)の定式化はフォーディズム期の崩壊を論じるためのものであるため、より一般的に景気循環モデルとして使用するには若干の変更が必要となる。

なお、以下では表記の簡単化のため、 g^* 、 v^* を単に g 、 v のように記述する。

なくなっていく。そうして疲弊したレジームは成長に貢献することができず、成長を妨げる要因にもなる。また、諸レジームは相互に関連しているのであり、あるレジームの陳腐化は他のレジームにも負の影響を与える。このようにして、成長レジーム全体が弱体化していき、その結果経済成長は失速する。やがて成長レジームが機能不全に陥り、経済は危機を迎える。

技術変化を表す β は、生産性レジームを表す指標と理解される。 β の減少は生産性レジームの疲弊を表し、それは成長レジームの弱体化をもたらし、 g^* を減少させる。やがて成長レジーム全体が疲弊し、レジームの危機が訪れる。それは g^* の急激な減少をもたらす。Lordon(1997)ではより詳細な議論が行われている。

3.2 本章で考察するモデル

本節では、Lordon(1997)のモデルを一般化するための修正・拡張を検討する。ここで議論するのは2つのケースであり、それぞれ本節第2項と第3項で検討される。前者は極めてシンプルな拡張であるが、それゆえに得られる結果に疑問が残る。後者はそれに比べるとやや複雑であるが、くさびカタストロフを用いることでその疑問を解決できることが示される。

3.2.1 本章で行う修正と拡張

1つ目の修正として、 $\dot{\beta} < 0$ という制限を緩和する。これは前述のように、フォーディズム体制の崩壊のための仮定であるため、より一般的な定式化には適さない。技術変化の強度は経済的・社会的に様々な要因が考えられるのであり、それらの要因は β に対して正の影響も負の影響ももたらしうる。したがって、 β の符号は正にも負にも(あるいは0にも)なりうるのと考えるのがより一般的である。

また、 β が正にも負にもなりうることを仮定することは、好況期と不況期の両方を扱う上では不可欠だと言える。なぜならば、景気が拡大している局面では、技術変化もより進みやすく、したがってその強度を表す β も上昇していくと考えるのが自然と思われるからである。よって本章では、Lordon(1997)の制限を緩和し、 β の符号は正にも負にもなりうることを仮定する。

2つ目の拡張は、雇用率 v の動学の明示的な導入である。景気変動の分析において雇用率は重要な指標であり、Lordon(1997)のモデルにも扱われているが、Lordon(1997)ではその議論はあまり詳細に行われていない。 g と β の分岐を論じているLordon(1997)の主要な考察において、 v の存在は完全に捨象されている。元々はLordon(1997)においても g と v と β の3つの変数を扱っていた以上、 v も含んだ動学も考慮することは意義があると思われる。成長率や技術変化と雇用率は密接に関わっていると考えるのは、経済学的に自然な発想であるからである。実際、Lordon(1997)においても、雇用率を考慮から外す積極的な理由は述べられていない。これらの理由から、本章では、 g と β の分岐を伴う2次元の動学に v を含め、3次元の体系として考察を進める。

ここで問題となるのは、 g と v の関係である。Lordon(1997)ではこの点はほとんど論じられていない。例えば、 g^{*1} 、 g^{*2} 、 g^{*3} に対応する v^{*1} 、 v^{*2} 、 v^{*3} の大小関係について言及されていない。

本章では単純な拡張として、 g と v が単調増加の関係にあると仮定する。これは直観的に自然であり、オークンの法則とも整合的である。

しかし、上記のように動学に v を組み込むとしても、Lordon(1997)では3次元の場合の解軌道については言及が無いため、3次元空間ではどのような解軌道を取るのかについて考察しなければならない。

3.2.2 1つ目の単純なケース

まず、3次元平面への単純な拡張として、図15のように解軌道を v 軸方向に延長したような曲面を考える。

解軌道をこのような曲面上を通る曲線だとすると、3次元体系としての議論が可能になる。図16では、そのような軌道の一例が示されている。これは、不況期に v が上昇に転じると β 及び g にプラスの効果働き、景気が上昇局面へと転換する。そして v や β の上昇に伴って g が S_1^{**} に達したとき、 g はジャンプし、上部の面へと移動する。すなわち、好景気の局面に移る。しかし、その好景気もある程度の水準に達すると再び停滞していく。 v の増加率が最初に鈍化・下降し始めると、それに伴い g や β の変化も停滞・負へと推移していく。3つともが下降していく局面に入ったとしても、最初の段階は変化の比較的緩やかな停滞期である。しかし v と β が下降を続けていくにつれて、 g の下落は徐々に加速していく。そして S_1^* に達した瞬間、 g は急激に落ち込み、深刻な不況期が到来する。しかし、例えば v の低下が食い止められ、上昇していくならば、徐々にだが景気は回復していく。そして g が S_1^{**} まで回復すれば、再び好景気へとジャンプするのである。

この考察と Lordon(1997)の議論との大きな違いの1つは、3次元空間に拡張したことで、雇用率 v が果たす役割を考察することが可能になった点である。今見たケースでは、不況期に v が上昇することで、経済全体が少しずつ回復に向かう。このことは、例えば不況期に雇用保

護・雇用創出的な諸財政政策が取られることが、景気の回復に大きな影響を及ぼすことを示唆していると考えられる。このことは、ケインズの有効需要拡大政策が不況期に効果をもたらすメカニズムと一致する。

一方で、好況期に v の上昇が頭打ちになることで、経済状態は悪化の兆しが見え始める。これは Goodwin(1967)や Kalecki(1943)等が主張するように、企業(資本家)は非常に高い水準に雇用率が維持され続けることを好ましく思わないという論理が働いていると解釈することができる。このことは、企業に労働節約的な資本を取り入れるインセンティブを生むかもしれない。

このように、 v を考慮に加えることで、景気の動態に関して様々な考察が可能になる。

もう1つの大きな特徴として、好況局面も論じることが可能になった点である。解軌道曲線が3次元表面上を通るため、不況が底を打った後に諸変数が上昇に転じるような過程を描くことができる。

この拡張によって得られる特徴的な結果は、好況曲面においても急激な変化が起こるという点である。図16のように、景気が上昇していくと、 g はある水準(S_2^*)で必ずジャンプする。したがって、 g がそれ以上の水準に達するには、必ず急激な上昇が生じるということになる。

しかしながら、この結果については少々疑問の余地がある。というのも、 g のジャンプで表されるような経済の急激な変化が不況期に起きることは直観的にも自然であるが、好況期にもそれが必ず起きるとするのはあまり考えにくいからである。勿論そのような急速な成長軌道が実現する可能性はあるが、そうしたドラスティックな変化を伴わず、(不況の落ち込みに比べれば)ゆっくりとした景気の回復経路も実現しうる¹⁹。

したがって、ここで議論した3次元体系への単純な形の拡張は、雇用率の働きや好況局面を射程に入れることができるという利点はあるものの、好況局面の上昇経路の様態といったより改善されるべき余地が存在している。

¹⁹ あるいは、1990年代からの日本経済の動向を例に見るならば、こうした緩やかな回復経路の方がより直観的に妥当だと言えるかもしれない。

3.2.3 2つ目のケース

前項では、Lordon(1997)の体系を図 16 に示されるような単純な 3 次元曲面へと拡張して考察することで、意味のある主張を得られた一方で、問題点が残る結果となった。その問題点とはすなわち、(特に景気回復・好況局面において) g のジャンプで表される急速な激しい変化が生じない場合が考慮できないというものである。そこで本項では、3 次元への拡張の仕方を検討し直すことで、この問題点の解決を試みる。

図 15 で表された、S 字型の曲線を v 軸方向に延長したような形では、 g が S_1^{**} の水準以上にまで上昇するならば、確実に不連続なジャンプが起きることは直観的にも明らかである。その理由は、 S_1^* 及び S_1^{**} がそれぞれ乗っている 2 つの折り目が、3 次元平面全体に渡っているからである。このため、解軌道がどのような経路を辿ろうとも、 g が変化を続ければ必ず折り目に行き着き、ジャンプを生じる。

したがって、直観的に言えば、3 次元平面上に折り目によって折られている部分と折られていない部分の両方が存在しているような図形を考慮すれば良いということになる。そのような 3 次元平面の形状を図 17 に示す。

図 17 に表された 3 次元平面は、くさびカタストロフと呼ばれる図形であり、代数幾何学の一種であるカタストロフィー理論において基本的な対象である²⁰。

図 15 の柱状の曲面と図 17 のくさびカタストロフ曲面の違いは、折り目の形状のみであるが、この違いが議論に本質的な差異をもたらす。

図 18 ではくさびカタストロフ上の典型的な解軌道が描かれている。軌道の大まかな動きは前項と同様であるが、上昇局面の様態は大きく異なり、緩やかな軌道を描いて高い水準へと

²⁰ くさびカタストロフを景気循環理論に応用した例として、Varian(1979)や Woodcock and Davis(1978)、Zeeman(1974)等が挙げられる。また、経済学におけるカタストロフィー理論の意義については、Rosser,Jr.(1991)や Rosser,Jr.(2007)などが詳しい。

戻っていく様子が示されている。これは不況に落ち込んでから急速な成長を伴わず、ゆっくりと不況前の水準へと戻っていくという景気回復の道筋を表現している。

反対に、図 19 で表されているように、同じくさびカタストロフ曲面上で、上昇局面においてもジャンプが生じるケースも生じる。ただし、この場合は前項の場合と異なり、くさびカタストロフの折り目の形状や長さ、成長軌道のとる経路によって、ジャンプの点が多様になりうる(図 20)。それは下降局面でのジャンプに関しても同様である。これは、くさびカタストロフの折り目の特有の形状による現象である。

このように、くさびカタストロフによる 3 次元体系への拡張は、前項の拡張で生じた問題点を解決することが分かる²¹。

結論

本章のこれまでの議論では、Lordon(1997)のモデルをくさびカタストロフによって 3 次元体系へと拡張することで、景気循環の好況と不況の動態に関してより豊富な議論が行えることを示してきた。ここでは上述の結果をまとめ、どのような主張が導き出されるのを考察する。

まず、景気循環における急激な変化と緩慢な変化の分類についての言明を挙げる事ができる。本章の議論では、Lordon(1997)と同様に不況期におけるそうした変化を区別した。す

²¹ ここでは述べられていないが、上昇局面と同様に下降局面についても、 g のジャンプを伴わないケースはありうる。すなわち、解軌道が折り目を通らない場合である。この場合、くさびカタストロフ平面の性質上、景気の回復・上昇局面においてもジャンプは生じないと考えて良いと思われる。図 18 及び 19 を見れば分かるように、このケースでは v が比較的高い水準で景気循環が生じる。一方で、 g 及び β の取りうる値の範囲は、ジャンプが生じるケースとさほど変わらない。したがって、この場合は、不況ではあるものの雇用率は比較的高く保たれ、不況期にも回復期にも急激な変化は生じないという、ある種穏やかな成長経路を表していると考えられる。

なわち、不況というのはまずゆっくりとした停滞から始まり、それが次第に勢いを増していき、急落が生じる。その後も不況は続くが、勢いをそのままに悪化し続けていくというわけではなく、変化は再び減速し、ゆっくりと低水準に推移し、やがて底を打つ。

加えて、本章の議論では Lordon(1997)では論じられていなかった、不況からの回復曲面をも扱うことができる。景気の悪化が底を打つと、まず雇用率 v が上昇を始め、その後 β が増加に転じるにつれて、 g も上昇していく。また、本章ではそこから景気が上向きになる様態の差異についても区別した。成長軌道がくさびカタストロフ曲面の折り目部分を通るか通らないかによって、 g が上方へのジャンプで表される急速な変化を生じるかどうかが決まる。またジャンプを生じる場合、どの程度ジャンプするかも、成長軌道が曲面の折り目のどの部分を通るか(高い部分か低い部分か)によって変わる。

さらに、好況から再び不況へと転ずることも、 v の導入によって示されている。その理論的な根拠は、Goodwin(1967)や Kalecki(1943)に従い、企業が高い v が維持され続けることを嫌い、労働節約的な投資の増加等によって雇用率を下げようとするという選好に求めることができるが、本章のモデルではそうした経済の内生的な効果によって、好況から不況への転換が生じることを表している²²。

²² 本章では、くさびカタストロフを用いることでこうした知見を得たが、くさびカタストロフを景気循環理論に用いたモデルはいくつか存在する。代表的な例は Varian(1979)である。Varian(1979)の場合は Lordon(1997)及び本章のモデルとは異なる変数について考察しているが、くさびカタストロフを用いることで、経済が落ち込んだ状態から回復する過程を、急激な上昇を伴う速い過程と緩慢で時間のかかる過程とに分類している。

景気循環理論におけるカタストロフィー理論の初期の応用例として、Varian(1979)は注目すべきであり、その結論も景気循環の回復の様態を区別するという点で有用である。しかし、Varian(1979)では景気の回復過程の議論しか行われておらず、不況へと陥る動態やその要因については検討されていない。したがって、景気が落ち込む局面の考察には別の枠組みが必要

加えて本章のくさびカタストロフを用いた考察では、雇用率を低下させる圧力が強ければ強いほど、その先に待ち受ける不況の落ち込みは大きくなってしまふということが示される。 v が低くなればなるほど、くさびカタストロフの折り目部分の高低差が大きくなり、したがって恐慌はより深刻なものとなってしまふからである。逆に、 v が高い水準に保たれていれば、くさびカタストロフの折り目の部分を通らず、恐慌を生じない可能性もある。

くさびカタストロフによる拡張によって、技術変化の程度 β の考察も可能である。 β が最も低い水準となるのは、景気が不況の底に位置している点である。その後、雇用率や成長率が徐々に回復していくにつれて、 β も上昇に転ずる。これは、 β の定式化から供給面と需要面の両方から解釈できる。供給面から解釈すると、これらが回復していくことで企業が景気回復を期待し、技術開発への投資を促進する効果だと考えられる。需要面から解釈するならば、これは雇用率が回復することで消費需要が増加することで β にプラスの効果を与える。 v と β が上昇していくことで、生産はより活発になり、 g が上昇していく。こうした局面では、供給面と需要面が相互的に連関し合うことで、 β の上昇がより促される。

一方で、 β の上昇が鈍化していき、減少に転じる要因としては、技術進歩の物理的境界、 g の上昇が長く続くことによる企業の技術開発のインセンティブの弱化といったものが考えられる。そうした理由で β が停滞・減少したとしても、 g の水準はくさびカタストロフ平面の高い位置で保たれている。このような技術開発を積極的に行わなくても高い利潤が維持できる状況であれば、企業の費用最小化行動の結果として技術開発のインセンティブが維持されなくなり、 β にさらなる下方圧力が生じると考えられる。

v と β の両方が減少している状態では、 g の成長もそう長くは続かず、ほどなくして g も減少に転ずる。 v 及び β の減少は g の減少を加速させ、上述したような恐慌が生じる。

ここではそれぞれの変数について、その変化が他の変数に与える影響を主に考察したが、実際は、 v 、 β 、 g の連関は相互的であると考えられる。また、各変数の変化はより複雑な要因

となるが、本章の議論は景気が回復していく過程と悪化していく過程の両方を同じ枠組みで論じることが可能である。

によって規定されていることも十分に考えられるのであり、ここで述べた因果関係は考えられるうちの一部である。

このように、くさびカタストロフを用いることで、景気循環の好況と不況の両面を議論することができるだけでなく、変化の激しさの移り変わりについても考察することができる。

これらの考察で、特に景気の転換に対する雇用率の役割の大きさは注目すべき点である。なぜならば、景気対策についていくらかの提言を行えるからである。

第2節第2項及び第3項では、不況期で経済が大きく落ち込んだ状況下で、雇用率 v の上昇が g 及び β に正の影響を与え、その結果経済状態が回復していくが、反対に v 、 g 、 β が高い水準にある好況期には、 v の上昇が緩やかになっていき、やがて下降に転じ、その後 β や g も相次いで下落していくという動態が得られた。Lordon(1997)では、 v が g や β にもたらす影響は考慮されていなかったが、本章のこうした検討により、いくつかの単純な仮定を置くだけで、 v の影響の大きさを明らかにすることができることが示されたと言える。

この結果からは、不況期に失業を抑え、雇用を維持・創出するという財政政策が、景気回復に非常に大きな意義を持っているという含意を読み取ることができる。

さらに踏み込んだ考察として、図18と図19を比較すると分かるように、不況からの回復期については、 g のジャンプを生じる方がより速く好況に到達するということが読み取れる。ジャンプを生じるかどうかは、成長経路が折り目部分を通るかどうかにかかっている。これは、 v と β の値の大小関係に依存する。例えば β が上がりきらないうちに、 v が高すぎる水準まで上昇してしまえば、経路は折り目を大きく迂回するルートを通ることになり、結果 g の上昇は遅れる。反対に、 v が上昇していくのと同時に β も順調に上昇していけば、経路は折り目部分を通り、 g はジャンプによって速やかに上昇できる。

したがって、不況から脱する際には雇用率を上昇させることが極めて重要であるが、それと同時に技術変化の強度が刺激されなければ、好景気に達するには時間がかかってしまう。このことから、景気刺激策への含意として、不況を抜け出さなければならない時期には雇用率を上昇させるための政策を優先し、不況から回復に転じるに合わせて技術変化を促進するような政策を並行させるというような政策目標が有効ではないかという仮説が導き出される。

ただし、景気が十分に良くなったならば、技術変化の促進を抑制した方が、次に訪れる不況への道筋を減速させることができるかもしれない。逆に、雇用率が低下すればするほど、不況時に g のジャンプによる落下は大きくなるため、好景気時に雇用率を維持する政策を取ることが、景気の急激な悪化を避けるためには有用かもしれない。これらは本章のくさびカタストロフによるモデリングから導出しようとする主張であるが、実際にそれがどの程度当てはまるかは、くさびカタストロフ曲面上を通る成長経路の実際の軌道による。

このように、本章のモデルによって、雇用率に着目することで、政策の実施やその効果についての提言が得られる。

本章では、モデルの実証的な検討までは行えておらず、したがって景気循環の動態や景気対策についての言明も、理論的示唆の域を出ない。これは本章の課題の1つである。

しかしながら、くさびカタストロフを用いたモデルが景気循環理論に多くの知見をもたらすことは、本章が主張できる意義の1つであると思われる。

また、本章が基盤とした Lordon(1997)は、フォーディズム期に関するモデルであった。Lordon(1997)で議論されたモデルはレギュレーション・アプローチを元にしており、レギュレーション・アプローチの数理モデルという観点からも興味深い。本章は Lordon(1997)をより一般化することで、その議論をより豊かにしたならば、本章はレギュレーション・アプローチについても理論的な提案を行うことができるはずである。

レギュレーション・アプローチに対する Lordon(1997)の貢献は、レギュレーション・アプローチの主要な観点の(少なくとも)1つを理論的に表現している点である。レギュレーション・アプローチにおいては、不況はある成長レジームの危機として理解される。特に大きな不況は成長レジームの構造的危機と解釈され、その前後では経済が全く異なる状態に置かれる。Lordon(1997)で論じられたジャンプを伴う急落は、このような成長レジームの危機を表していると解釈できる²³。

²³ 既に見たように、Lordon(1997)はフォーディズム体制の崩壊を問題としている。

Lordon(1997)では、ジャンプの前後で成長率は低下しつつあるが高水準である状態から、成

本章では、Lordon(1997)のモデルを発展させることで、ある成長レジームの危機の局面だけでなく、そこからの回復局面や好況の動態を同一のモデルで表した。レギュラシオン・アプローチ的に解釈すれば、両者はそれぞれ、ある成長レジーム崩壊後の過渡期及び新たな成長レジームへの到達と、ある成長レジームの調整様式が上手く機能している状況と行うことができる。レギュラシオン・アプローチの大きな特徴の1つは、成長レジームの概念を使うことで、好況期(成長)と不況期(危機)の両方を統一的な枠組みで論じる点であるが、その意味では本章のモデルは、レギュラシオン・アプローチの枠組み(の少なくとも一部)を表現していると解釈できる。

さらに、本章ではくさびカタストロフ曲面の幾何学的性質から、景気の上昇局面や下降局面において多様な経路が実現しうることを示した。これは、レギュラシオン・アプローチの主要な問題意識である成長レジームの多様性について、その成長経路の差異を表現する一助となりうる。

本章の議論をこのように見た場合、本章がレギュラシオン・アプローチに対して可能な貢献は、カタストロフィー理論の有用性の主張である。管見の限り、レギュラシオン・アプローチに基づくモデルで、カタストロフィー理論を用いたものはほとんど見られない。

Lordon(1997)は折り目カタストロフについて触れているが、本章で議論したようなくさびカタストロフに関する議論はあまり行われていないと思われる。既に見たように、本章で得られた結果及び考察は、レギュラシオン・アプローチの観点からも興味深いと考えられる。景気循環理論に対してだけでなく、レギュラシオン・アプローチにおいても、カタストロフィー理論の可能性が示されたのは、本章の主張の1つであると言える。

長率が低水準かつ低下し続ける状態へと移行している。よく知られているように、フォーディズム体制の崩壊後、先進各国は低成長時代を経験した。このように、Lordon(1997)の結論はフォーディズム体制という成長レジームの危機と、その後の低成長期(レジーム過渡期)を表現している。

さらに、数学的にはカタストロフィー理論は分岐理論や特異点理論といった幾何学の一分野であり、カタストロフィー理論の利用は景気循環理論や成長レジームの分析におけるこのような数学の応用可能性を示唆するものである。

4章 景気循環の様態とカタストロフィー理論 燕の尾カタストロフによる考察

序論

経済学におけるカタストロフィー理論の展望について Rosser, Jr.(2007)が指摘した以降も、カタストロフィー理論の応用は検討されている。当然ながらその勢いは 1980 年代に比べると微々たるものであるが、Rosser, Jr.(2007)が強調したように、流行が終わったからといって、経済学においてカタストロフィー理論が全く無効な道具となったわけではないということは認められて良いであろう。本章ではカタストロフィー理論の肯定的側面に焦点を当て、経済学における有用性について再検討する。

経済学全般とカタストロフィー理論の関係についての歴史を詳察することは本章で可能な議論の範疇を軽く越えてしまう。そこで本章では、特にカタストロフィー理論の景気循環理論に対する応用に注目する。当然ながらカタストロフィー理論を用いた景気循環理論のすべてを網羅することはできないが、本章の主題であるカタストロフィー理論の景気循環理論への応用の再検討のためには、いくつかの重要な例を議論することでさしあたり十分であると思われる。

カタストロフィー理論の経済学への最初の応用の 1 つは、Zeeman(1974)によるものである。これは株式市場の暴落とその回復の経路の違いを、くさびカタストロフによって説明した。

景気循環理論への重要な応用としては、Varian(1979)がある。Varian(1979)はカルドア型の投資関数を拡張し、3次元モデルについて不況からの回復局面の区別を行っている。それによれば、カルドアの S 字型の投資関数は、くさびカタストロフ平面に拡張でき、さらにくさびカタストロフ平面上の軌道によって不況は 2 種類に区別される。すなわち、くさびに近い経

路を通った速い回復を景気後退 recession、くさびを迂回して遠回りの経路をたどる遅い回復を恐慌 depression と区別できる。このような軌道の差異による景気の区別は、折り目を持つ平面であるくさびカタストロフを論じることによって可能になる。

カタストロフィー理論が景気循環理論にもたらす貢献の基礎的な面は、既に Varian(1979)によって示されていると言って良い。すなわち、それは景気変動の速さに関する考察である。景気循環理論の主たる関心は好況と不況のメカニズムや、好況が不況に、不況が好況に転じる様子である。しかし、同じ不況期においても、異なる速さの局面が存在しうる。例えば日本経済に関して言えば、戦中からの高度経済成長は非常に速い景気回復局面であったと言える。逆にバブル経済の崩壊以後、失われた 30 年といわれる時期は、非常に遅い景気回復の局面と言えるかもしれない。1929 年の世界恐慌からのアメリカ経済の回復は速い部類であると言えるかもしれないが、1973 年のオイルショックからの回復はそれに比べれば遅いものであったと言えるだろう。

好況期においても同様である。景気が高騰し非常に激しい上昇局面もあれば、景気が少し冷めてゆっくりとした上昇局面も存在する。

このように、景気循環においては、好況と不況というだけでなくその速さがどのようになるかという観点も重要である。

好況や不況の速さがどのようになっているかという問題をモデルによって考察するには、非線形動学が必要不可欠になる。Zeeman(1974)や野口(1973)、Varian(1979)、Woodcock and Davis(1978)、Rosser, Jr.(2007)などは、そのような景気循環のより踏み込んだ議論に対してカタストロフィー理論が多くの知見をもたらすことを主張している。したがって本章では、景気循環における速さを、カタストロフィー理論を用いて考察する。

カタストロフィー理論への批判の 1 つに、しばしば解析が不十分であり、叙述的だというものがある(例えば Lorenz(1993)などが詳しい)。このことは、定量的な考察が行えないということの意味する。しかし、Fisher and Jammaneg(1986)は、カタストロフィー理論が実証的にも有効であることを論証しており、後述するように実証研究においてカタストロフィー理論を用いた研究はいくつもある。したがって、カタストロフィー理論の解析的あるいは実証

的有用性そのものが否定されるわけではないと考えて良いと思われる。ただし、このような実証的な検証は本章の議論を超えてしまうため、ここでは論じない。

また、カタストロフィー理論の経済学的意味づけに対する批判も重要である。カタストロフィー理論が立脚する論拠は経済学的には妥当性に疑問が残るものが多いという批判である。実際、Zeeman(1974)の理論的前提はかなり素朴であり、なおかつ経済学的にはあまり馴染みのないと言える。しかしながら、Varian(1979)はカルドアの投資関数を用いていることから、カタストロフィー理論の使用と経済学的な妥当性は両立しうることが理解できる。この批判に関しては、経済学的に納得の行く理論的前提と結果に関する解釈を検討していくことで応えられるものと思われる。本章は理論的な考察をテーマにしているため、こちらは本章で扱う課題の1つである。

さらに、カタストロフィー理論によるモデルは、実証的に支持されるという研究もある。Fischer and Jammernege(1986)は Woodcock and Davis(1978)によるくさびカタストロフの形状をしたフィリップス曲線が実証的に有効であることを示した。近年の研究として、Barunik and Kuckacka(2015)ではくさびカタストロフによってアメリカの株式市場の実証分析を行っている。Gong et al...(2022)は上海の原油先物価格の変動をくさびカタストロフで表している。両者とも、くさびカタストロフが実証データによくフィットしていると結論づけている。

このように、カタストロフィー理論の経済分析への応用は、経済理論的に妥当な意味づけを行うことができれば、現在でも有用であると言える。

よって、本章では景気循環理論に対するカタストロフィー理論の応用を議論する。本章では、そのようなモデルとして Varian(1979)を踏襲する。さらに、Varian(1979)の議論を拡張し、カタストロフィー理論の新たな応用を考察する。

本章の構成は、以下ようになる。まず第1節で Varian(1979)の議論を概説し、その意義を述べる。第2節で Varian(1979)の拡張について論じる。ここでは、インフレ率の変化率が新たな変数として追加される。第3節で、燕の尾カタストロフを導入し、燕の尾カタストロフの概略を説明する。第4節ではモデルからどのような結果が得られるかを議論する。結論では、モデルから導出された主張を経済学的に解釈し、カタストロフィー理論の有用性について議論する。

4.1 Varian(1979)による景気循環モデル

景気循環理論に対するカタストロフィー理論の応用として、Varian(1979)は代表的なモデルである。Varian(1979)ではくさびカタストロフを用いることで、不況に陥った経済状態が元の水準に戻るまでの回復過程を類別できることが示されている。

Varian(1979)のモデルはカルドア型の投資関数を元にしてしている。Varian(1979)ではその拡張として、「富 wealth」の概念が変数として導入される。この「富」の範疇は極めて広く定義されており、人的資本、将来の雇用への展望、諸資産、その他消費行動を規定するあらゆる要因が例として挙げられている。このような定義はあまりに広大に過ぎる一面もあるが、この「富」を導入することに対する Varian(1979)の狙いは、そのような景気循環に影響を与える何らかの変数を考慮に入れることで可能となる考察を行うことであり、何か特定の変数による分析ではない。また、例示された諸要因は、いずれも(具体的には不明なもの何らかの形で)景気循環に影響を与えるとしても不自然ではない。

「富」は w で表される。

Varian(1979)では、単純な(所得に対して)線形の消費関数が設定される。

$$C(y) = cy + D$$

ここで、 y は所得、 c は限界消費性向、 D は基礎消費(所得のレベルに依存しない消費)である。

Varian(1979)ではさらに、「富」が消費に与える影響が考慮される。限界消費性向は「富」の増加関数と設定され、多様な「富」が増えれば、消費者はより多くの消費をするようになると仮定される。また、「富」が増えれば、消費の所得に依存しない部分も増える。よって、Varian(1979)の議論では限界消費性向 c と基礎消費 D が「富」の増加関数とされる。したがって、前述の消費関数は以下のように再定義される。

$$C(y, w) = c(w)y + D(w) \quad (30)$$

なお、 $C'(w) > 0, D'(w) > 0$ である。

このことは、「富」は消費関数そのものを変更するような効果を持つことを意味する。所得は消費の水準に影響を与えるが、消費関数そのものは変えない。これに対して、「富」は消費関数のパラメータを変更し、消費関数自体を変更する。前述したように、「富」の定義はきわめて一般的であるが、Varian(1979)自身は人的資本や将来の雇用への展望といったものを例示している。こうした要因が、消費者の消費行動のみならず消費の行動様式そのものを変化させると考えるのは一定の妥当性があると考えられる。

したがって、モデルは y 、 k 、 w に関する次のような3次元体系となる。

$$\dot{y} = s\{C(y, w) + I(y, k) - y\} \quad (31)$$

$$\dot{k} = I(y, k) - I_0 \quad (32)$$

$$C(y, w) = c(w)y + D(w) \quad (30)$$

ここで、 $I(y, k)$ はカルドア型のS字型の投資関数と仮定されている。 I_0 は減価償却費である。また、 $\dot{w} = \gamma(w^* - w)$ であり、 γ 及び s は調整速度を表す正のパラメータを表す。

Varian(1979)では、これらの方程式の具体的な形状については言及されていない。また、 w に関する動学方程式は提示されていない。本文で示した \dot{w} はLorenz(1993)第7章による。ただし、くさびカタストロフを導入することから、独立変数 y とパラメータ k 、 w の関係がくさびカタストロフのカタストロフィー平面で表されるような方程式である。補論D及びEを参照。

Varian(1979)の関心は、景気循環の速さの異なる回復過程の区別を行うことにある。そのような手法として、Varian(1979)ではくさびカタストロフによるモデルが導入される。

くさびカタストロフ平面は、図21に示されるような、平面を途中までで折り返したような特徴的な形状をしており、カタストロフィー理論において代表的な例である。なお、折り返した箇所をさらに2次元平面へ射影すると、くさびの形状をしていることから、この名がついている。景気の状態 (k, w, y) がこのくさびカタストロフ平面上を動くことで、景気循環の経路が描かれる。

図21に表現されているように、くさびカタストロフ平面の上の表面は y が高く、好況な局面を表す。下の表面は y が低く、不況の状態と対応している。

Varian(1979)では、景気が不況の状態にあるとき、その回復局面の差異について論じている。図 21 の矢印で表されているように、回復経路が平面の折り目を通る場合、経路は境目を通ってジャンプし、上の面へと移る。したがって、速い回復が実現する。これは景気が悪化したとしても比較的小さな影響で済んだケースを表しており、景気後退 recession に対応している。一方で、回復経路が平面の折り目を通らない場合、経路は大きく迂回して元の水準に到達することになる。このとき、経済の回復は遅く、景気の悪化が深刻な影響を及ぼす不況、恐慌 depression に対応している。

景気後退と恐慌の違いは、何らかのショック²⁴によって w がどの程度減少するかによる。図 21 のように、 w の減少が比較的小さい場合は、折り目の部分を通ることができる。この場合、経路の長さが短くなる上に、折り返しの部分を通ることで、下の面から上の面へのジャンプ(急激な変化)が生じる。したがって、この場合は速い回復が実現する。反対に、 w が大きく減少してしまうと、折り目の部分を通らず、経路は大きく迂回することになり、経路は長くなる。また、下の面から上の面へのジャンプで表されるような急激な上昇も生じず、回復が遅くなってしまう。

また、前述のように w は消費の独立変数であり、 w の減少は消費の減少である。したがって、何らかのショックが消費水準に与える影響の程度によって、その後の不況が軽い程度で済むか、深刻なものになるかが異なってくるのが分かる²⁵。消費水準の変化による不況へのこうした影響は経済学的な解釈としては極めて自然なものであり、これを同一の枠組みで視覚的に分かりやすく示したことが Varian(1979)の 1 つの功績である。

²⁴ Varian(1979)では、このショックの具体的な説明はされていない。また、ここではショックが起きること、そのショックに対する応答が意味を持ち、そのショックの要因がどのようなものかは Varian(1979)の考察の結果に影響しない。

²⁵ このことは、例えば経済に与えるショックが大きくても、消費に与える影響が少なければ、回復は比較的順調に進むということである。

以上が Varian(1979)のモデルの簡潔な説明である。Varian(1979)の特徴は、くさびカタストロフを用いていることであり、その意義は、たとえ長期的には元の水準に戻るとしても、その過程は大きく異なりうるということである。実際、景気の不況からの回復は、比較的短く済むものもあれば、長い時間を要するものもある。両者とも最終的には同じ水準に回復するとしても、その結果に至るまでの過程が全く異なるのであれば、それらは経済現象としては区別されるべきものである。この観点からすると、景気の回復過程の区別とその差異をもたらす要因の分析は重要である。Varian(1979)の考察は、くさびカタストロフ平面を導入すれば、回復の速い経路と遅い経路を区別できること、その差異は「富」の減少の程度及びそれによって引き起こされる消費の減少の程度によって生じると主張している。よって、景気循環の軌道の類別という問題について、Varian(1979)のモデルは大きな知見をもたらすと考えて良いと思われる。

4.2 Varian(1979)モデルの拡張

Varian(1979)の議論では、くさびカタストロフを用いることで、景気循環における変化の類別を議論できると示された。本章では、Varian(1979)の議論を発展させるべく、拡張の道筋を模索する。

拡張の方向としては、Varian(1979)が Kaldor(1940)に対して行ったように、変数の追加という方法が考えられる。すなわち、元のモデルに関連し、かつ新たな結果が得られるような変数を追加する方法である。Varian(1979)は Kaldor(1940)に社会的な「富」 w を導入することで、くさびカタストロフによる景気循環の分析を可能とした。

本章では、所得 y 、資本ストック k 、社会的「富」 w の3つの変数に加え、インフレ率の変化率 π' を考察に加える。その理由は、景気循環理論においてインフレ率がよく使われる変数であること、所得や資本ストック、とりわけ「富」に大きな影響を与えられられることである。よく知られているように、所得や資本ストックとインフレ率には密接な関係がある。「富」に関しても、Varian(1979)の定義に従えば、資産や消費の決定要因が含まれるのであり、これらがインフレ率に影響されると考えるのは自然だと思われる。

なお、インフレ率の値ではなくインフレ率の変化率を取る理由は、本章の関心が景気の良し悪しよりもその変化の「速さ」、変化の程度にあるからである。すなわち、景気が激しい変化を生じる状態にあるのか、緩やかに変化する状態にあるのかに関心を持っていることによる。インフレ率の値を導入する場合、インフレ率の水準や符号が景気に与える影響を考慮することができるが、変化の激しさが与える影響は明示的に扱えない。インフレ率の変化率を取れば、正負どちらの方向に変化しているかに加え、どれだけ変化しているのかを表せる。インフレ率のこのような情報は、景気が安定した状態にあるのか、変化しつつある状態にあるのかを指し示す。

例えば、好況期でインフレ率が正のある程度以上の水準で上昇している状態から、何らかの突発的な不況が生じたとする(例えばリーマンショックのような不況)。インフレ率の値の符号が正から負へと転じるのは、景気が好況から不況へと転換し、下降局面へと変化した後、一定以上の下落を経てからだと思われる。一方で、インフレ率の変化率の符号は、好況から不況への転換に伴い、上昇局面から下降局面へと移った時点で負へと変化する。したがって、景気循環の変化を考察したい本章では、インフレ率の値そのものよりも、インフレ率の変化率を取る方が適当であると考えられる。こうした理由から、本章ではインフレ率の変化率を変数として導入する。以降、インフレ率の変化率を π' と表記する。

(32)式において、消費関数 $C(c$ 及び D からなる)は y の関数であり、そのパラメータとなる限界消費性向と基礎消費は w によって変化すると設定されていた。本章では、これらのパラメータの値は π' にも影響を受けると仮定する。このことは、インフレ率の変化によって価格が影響を受ければ、消費者の行動も変わるということを反映している。インフレ率のより大きな変化は、それだけ大きな影響を及ぼすと考えられる。同様に、インフレ率の変化は、価格や賃金等を通じて投資行動にも影響を与えられられる。例えば、インフレ率が上昇していく過程では、人々は景気が拡大していくと考え、消費を増やすかもしれない。景気の拡大局面だと考えた企業は、投資を増やそうとすることが考えられる。こうした理由で、消費関数 C だけでなく、投資関数 I にも π' が関わっていると仮定する。ここでは、 π' は C 、 I 単純な仮定を置く。

したがって体系は以下のように変更される。

$$\dot{y} = s\{C(y, w, \pi') + I(y, k, \pi') - y\} \quad (33)$$

$$\dot{k} = I(y, k, \pi') - I_0 \quad (34)$$

$$C(y, w, \pi') = c(w, \pi')y + D(w, \pi') \quad (35)$$

ここで、先程と同様に $\dot{w} = \gamma(w^* - w)$ である。また、 $\dot{\pi}' = (\pi^* - \pi)/\pi_0$ と仮定する²⁶。体系の他の部分に変更しておらず、関数の条件も変更されていないが、変数が増えたため、くさびカタストロフによる議論はできない。したがって、異なるアプローチが必要になる。この点を次節で論じる。

4.3 燕の尾カタストロフによるモデリング

Varian(1979)は、Kaldor(1940)を元にした経済モデルを取り上げ、カタストロフィー理論を導入して考察している。Varian(1979)は y と k についてのモデルを最初に取り上げ、その分析において生じる折り目カタストロフについて論じている。折り目カタストロフとは、カタストロフィー理論において最も単純な対象であり、2次元平面に表されるカタストロフである。Varian(1979)は、このモデルの変数を3つに拡張することに伴い、2つの変数の平面に生じる折り目カタストロフの代わりに、3次元空間上のくさびカタストロフの導入を提案した。そのことにより、本章1節で紹介したような興味深い結果が得られることを示した。

本章のモデルでは変数は4つになるため、3つの変数について生じるくさびカタストロフは利用できない。そこで、Varian(1979)の議論に倣い、4つの変数についてのカタストロフを導入する。これは燕の尾カタストロフと呼ばれる。

²⁶まずインフレ率の変化率 π' は $\pi' = (\pi - \pi_0)/\pi_0 = \pi/\pi_0 - 1$ と定義できる。ここで、 π はインフレ率、 π_0 は任意のある初期状態のインフレ率である。 $\dot{\pi}'$ を求めると $\dot{\pi}' = d\pi'/dt = (d\pi/\pi_0)/dt = (d\pi/dt)/\pi_0$ となる。ここで、単純化のため $d\pi/dt = \dot{\pi} = \pi^* - \pi$ と仮定する。ここで、 π^* は均衡インフレ率である。仮定より、 $\dot{\pi}' = (\pi^* - \pi)/\pi_0$ となる。

燕の尾カタストロフは本来4つの変数が必要であるが、4次元空間は図示することができない。しかし、そのカタストロフ集合は3次元空間上に表現できる。 (π', w, k) において、燕の尾カタストロフのカタストロフ集合を取ることができる²⁷。これを示したのが図22である。

図22で表された曲面は、 (π', w, k) 空間をA、B、B'、C、Dの5つの部分空間に分ける²⁸。この部分空間にはそれぞれにアトラクタ(吸引点)とリペラ(反発点)が存在するが、その個数は部分空間ごとに異なっている。アトラクタの近くを通る軌道はアトラクタに吸い込まれ、リペラの近くを通る軌道はリペラに弾かれるため、アトラクタとリペラの位置や個数が、その部分空間内の流れを決定づける。

経済の状態が変動するとき、状態 (π', w, k) が5つの部分空間を移動することになるが、その軌道が各部分空間を行き来する場合、その仕方によって動態に急激な変化、すなわちカタストロフ的变化が起こりうる。

燕の尾カタストロフで区切られた各部分空間における (π', w, k) の軌道は、 π' の符号によってその様態を大きく変える。図23は、 π' の符号について、 (π', w, k) の軌道が到達しうる各部分空間を表している。例えば π' が正の場合、軌道はA、B、B'の3つの部分空間にしか存在できないが、 $\pi' = 0$ を境にその様態は変化し、 π' が負のときはAからDまで全ての部分空間に位置する可能性がある。また、各部分空間におけるアトラクタとリペラの個数は表1にまとめられている。例えば、部分空間Aはアトラクタとリペラの両方とも存在しないのに対し、燕の尾のような曲面で囲まれた部分空間Cはアトラクタとリペラが2つずつ存在している。このようなアトラクタの個数は、各部分空間の流れを大きく特徴づける。

²⁷ 詳細は本章の補論D及びFにて論じている。

²⁸ なお、実際はBとB'は同じ領域である。しかし、カタストロフ集合の形状から、「尾」の部分を含んだ2つの領域を同じ記号で指し示すのは誤解を招く恐れがあると思われるため、便宜上異なる名前表記している。以降の議論ではBとB'は別々の部分空間として扱われるが、当然ながら両者を同一の部分空間として読み替えても問題は生じない。

図 23 及び図 24 に示されているように、この動学は π' の符号によって3つの場合に分けられる。この詳細は次節で論じる。

4.4 結果

(π', w, k) で表される経済状態が取る軌道は、各部分空間のアトラクタ及びリペラの位置や、それらと軌道が各部分空間に移動した地点との位置関係によって決定される。したがって、可能な経済の状態はくさびカタストロフによる考察よりも遥かに多様になる。

既に見たように、 π' の符号によって、軌道の様態は大きく異なる。すなわち、 π' による分岐が生じている。そこで、本節では $\pi' > 0$ 、 $\pi' = 0$ 、 $\pi' < 0$ の3つの場合についてそれぞれ考察していく。

まず、 $\pi' > 0$ の場合について考える。この場合の軌道のイメージは図 24(a)に描かれている。このとき、軌道が行き来する部分空間はA、B、B'の3つである。このとき、表 1 に記されている通り、B 及び B'にはアトラクタとリペラが1つずつ存在し、Aにはどちらも存在しない。したがって、例えばある時点でAにあった軌道がBまたはB'に移動した場合、軌道はリペラに弾かれアトラクタに吸い込まれる流れに乗って、徐々にBまたはB'のアトラクタに近づいていく。軌道がある時点でBまたはB'にあった場合も、同様にリペラとアトラクタの流れに沿ってアトラクタに近づく。図 24(a)で示されているのは、このような軌道の例である。具体的な軌道の形状がどのようなものになるかは、ある時点での (π', w, k) の状態やB 及び B'のアトラクタとリペラの位置関係に依存するが、この場合では、軌道の形状が突如大きく変化するという現象は起きない。したがって、 $\pi' > 0$ のとき、カタストロフ的な変化は生じない。

次に、 $\pi' = 0$ の場合を考察する。軌道がA や B 及び B'のみを移動するならば、最初の場合と変わらない。しかし、この場合ではカタストロフ集合の「尾」の部分に到達しうるのであり、そのときは最初の場合と異なる様相を呈する。

(π', w, k) の軌道がA、B、B'のいずれかから、平面 $\pi' = 0$ と「尾」の先端との接点に到達したとする。この点は燕の尾点と呼ばれ、A、B、B'、Cの4つの部分空間に接している。した

がって、例えばBから燕の尾点に到達した軌道は、A、B'、Cのいずれにも移動しうる。このとき、軌道はこれらの部分空間の流れに捕らえられて、それまでとは大きく異なる動きを生じる可能性がある。図24(b)では、このときのイメージが描かれている。図24(b)では、燕の尾点からAやCに移動した場合、軌道が大きく変化しうることを示されている。ただし、軌道がCへと移動した場合はより複雑な軌道が実現する可能性があるが、この点に関しては第3の場合で後述する。以上をまとめると、 $\pi' = 0$ の場合はカタストロフ的变化が生じうる。

最後の場合は、 $\pi' < 0$ のときである。このとき、 (π', w, k) の軌道はAからDまでのすべての部分空間に存在しうる。

この場合でとりわけ注目すべきは、Cにおける動態である。前述したように、Cはアトラクタとリペラが2つずつ存在している。これらの位置関係によって、C内の流れは他の部分空間よりも複雑になりうる。

図24(c)ではその一例が示されている。図24(c)のように、軌道がC内に侵入した地点とアトラクタ及びリペラとの位置関係によって、多様な経路を取りうる。

これらの経路の中で、2つの特筆すべきケースが存在する。1つ目は、燕の尾点を通るケースである。 $\pi' = 0$ の場合で述べられたように、燕の尾点では軌道が急激な変化を生じることがある。複数のアトラクタとリペラを持つCに侵入した軌道は、特に激しく変化する可能性がある。その結果、図24(c)で描かれているように、軌道はCに入った途端にリペラによって大きく曲げられ、B'へと弾き出されるという例が存在する。

2つ目の特異なケースは、アトラクタとリペラの競合によって生じる極めて強烈的な変化である。前述したように、アトラクタは周りの流れを飲み込み、リペラは周りの流れを弾き飛ばす。Cではこれらが2つずつ存在する。したがって、これらの位置関係によっては、2つのアトラクタが吸い込む領域同士、あるいは2つのリペラが弾き出す領域同士がぶつかり、競合する。その結果、これらの境界線上に、2つのアトラクタあるいはリペラの両方からちょうど等しく力を受ける経路が発生する²⁹。図24(c)及び(d)の例では、太線の矢印で示された曲線上

²⁹ このような境界はセパトリックスと呼ばれる。

の経路がそれに当たる。図 24(d)では、アトラクタとリペラの位置が微妙に異なる場合の経路を表しており、アトラクタとリペラの衝突がより分かりやすく描かれている³⁰。

このようなアトラクタ同士、リペラ同士が競合した経路では、どちらのリペラ・アトラクタの流れにも従うことができない。リペラ同士が競合している境界線上の経路では、両方から弾き出す流れが押し寄せ、まるで波がぶつかって跳ね上がるような強い力が作用している。アトラクタ同士が競合している経路は、両者が引き寄せる力を受け、引張破壊において破断する寸前のくびれ部分のような状態となっている。

こうした経路に乗った軌道は、極めて不安定な状態に置かれるのであり、C 内で安定することは無い。このとき、軌道は極めて急激に変化し、D へと急速に離脱する。したがって、C 内から D へのジャンプが起きる。図 24(d)では、この挙動が模式的に表されている。

上述した 3 つの場合の考察をまとめると、以下ようになる。すなわち、 π' の符号によって (π', w, k) の状態に分岐が生じる。さらに $\pi' \leq 0$ の場合は、状態にカタストロフ的な急激な変化が生じうる。

結論

本章では、Varian(1979)を元にカタストロフィー理論を用いた拡張を行った。燕の尾カタストロフを用いることで、様々な結果が得られることを論じた。それらを経済学的に解釈することで、いくつかの結論が導出される。

最初に挙げられるのは、インフレ率の変化率 π' が経済の状態に与える影響である。前節で見たように、 π' の符号によってありうる経済状態は大きく異なる。したがって、インフレ率の変化率は極めて重要な指標であると言える。通常注目されるのはインフレ率であるが、その変化率に着目することで、新たな結果が得られることが分かる。

³⁰ アトラクタとリペラ間では、リペラからアトラクタへの流れが加速するだけであり、競合は生じない。

この点に関して重要なのは、カタストロフ的变化の可能性である。 π' が正のときはカタストロフ的な急激な変化は生じないが、 π' が0もしくは負のときは、突如として経済の軌道が大きく変更されてしまうようなカタストロフ的变化が生じうる。

この結果は、以下のような主張をもたらす。すなわち、景気が上昇局面にあり、インフレが進行しているとき、状態が急激に変わるような変化は生じない。逆に、景気が下降局面にあり、デフレ状態のときは、経済の劇的な変化が起きる可能性がある。このことは、カタストロフは景気の下局面に特有の現象だということを意味しており、回復過程にジャンプが生じうるとした Varian(1979)の主張とはやや異なる結果である。

また、景気が下降局面にあったとしても、カタストロフ的变化が必ず起きるというわけではないという主張も重要である。図3に示されているように、 $\pi' \leq 0$ であったとしても、資本ストック k と社会的「富」 w の値によって状態はAやB及びB'に留まり続けることもありうる。このことは、たとえ景気が下降局面にあったとしても、資本ストックと「富」の水準が一定の範囲を超えなければ、カタストロフは生じず、したがって経済は安定的なままだということを意味する。Varian(1979)の議論では、景気変動にカタストロフ的变化が生じるかどうかは w の大小によって決まっていた。それに対して、本章のモデルでは、 w だけでなく k の大小によっても決定されることが示されており、Varian(1979)の議論を発展させていると言える。

加えて、燕の尾カタストロフを用いた本章の枠組みでは、くさびカタストロフを用いた Varian(1979)よりも非常に多くの軌道が実現しうる。このような違いが生じる要因としては、軌道とカタストロフ集合との位置関係に加えて、カタストロフ集合の形状の細かな違い、各部分空間のアトラクタとリペラの位置の違いといった、カタストロフ集合自体の特徴が挙げられる。経済の多様な軌道を表現できることに加えて、その差異もモデルの中の要素で説明することができる。このような諸要素は、景気循環の仕方に影響を与える何らかの制度的諸構造に対応していると解釈することが可能である。すなわち、カタストロフの特徴によって、経済構造あるいは制度レジームを表現し、分類できる可能性が示唆される。とはいえ、その具体的な意味づけや解釈の妥当性等はあまりに難解な議論となるため、ここではこれ以上論じることはできない。

以上のように、燕の尾カタストロフを用いて拡張することで、本章では多くの結果が得られた。これらの結果はここでの考察によって導出される主張に過ぎず、さらなる理論的な検討や実証的な検証といった多くの課題は残されている。しかし、本章の議論によって、カタストロフィー理論が景気循環のモデルに多くの知見をもたらすことは、十分に示せたのではないと思われる。カタストロフィー理論は景気循環や経済分析にいくつかの応用があるものの、その有用性はあまり注目されていない。それどころか、カタストロフィー理論は過去の1つの流行に過ぎないとさえ見られている。本章で得られた結果は、そうしたカタストロフィー理論への評価を見直し、その有用性を再考することを促している。

終章

非線形動学を用いた景気循環理論について、本稿では「時間スケール」、「周期」、「循環の速さ」という3つの「時間」に注目することで議論した。第1章ではグッドウィン成長循環モデルについて「時間スケール」の効果を論じた。第2章では非線形乗数・加速度モデルを取り上げ、特に外力の「周期」が内生的な振動にどのような影響を与えるのかを示した。第3章及び第4章では「循環の速さ」をカタストロフィー理論によってモデリングした。第3章ではLordon(1997)のモデルをくさびカタストロフによって拡張し、好況と不況の転換や変化の速さについて考察した。また、レギュレーション・アプローチに対するカタストロフィー理論の有用性についても論じた。第4章ではVarian(1979)のくさびカタストロフを用いた景気循環モデルを燕の尾カタストロフによって拡張することで、突如として急激な変化が生じる条件や多様な景気循環の実現について議論した。

序章において取り上げたように、非線形景気循環理論は強力な枠組みである一方で、それによって得られる結果は往々にして単調な振動となってしまう、好況と不況の動態があまりに対称的な形状で表されてしまうという課題を有していると言える。本稿では上記の3つの「時間」に関する概念を導入することで、この課題の解決を試みた。結果として、第1章か

ら第4章までの考察は、それぞれの「時間」概念に着目することで多彩な循環が導出され、好況と不況で異なる様相を持つ景気循環の軌道が実現されることを示している。

本稿で考察した4つの議論によってこの課題が完全に解決されたとは言えないが、「時間」概念の導入という非線形動学からの拡張が、景気循環理論の発展に大きな意味を持つことを示すことはできたと考えられる。

経済学において、短期と長期といった「時間」の区分は極めて基本的であるが、それは多くの場合モデルに異なる制約条件を課すための設定であり³¹、言い換えればこの意味での短期と長期とは、比較静学のために体系の外から課される条件である。この場合の「時間」は、切り分けられ別々に分割された「外在的な時間」である。本稿では、変数の変化の速さや周期の長さ、循環の速さという形で、短期と長期とを体系の中に組み込んで論じた。その議論においては、「時間」は動学体系の中の要素の1つとして現れるのであって、統一され包摂された「内在的な時間」である。

このような対比は、従来の「時間」概念の否定を意味しない。それが景気循環の状態、すなわち成長か危機か、好況か不況かという考察に有効な視点であるのは変わらない。本稿で考慮された「時間」概念の意味は、景気循環の状態の変化の状態、すなわちどの程度の成長/危機なのか、どのくらい続く好況/不況なのかという考察のためには、より適した「時間」の概念が存在するということの提示である。

加えて、本稿のような「時間」概念の導入は、序章で述べた非線形景気循環理論の課題を解決しうる。本稿で扱ったのは非線形動学の手法のほんの一部に過ぎないが、それによって単調でも対称的でもない好況と不況の循環の様態を描き出すことができる。

さらに、本稿では考察したモデルに対して、そのような軌道が実現することへの経済学的な解釈を行った。その意味づけは完全なものではなく、また考えられるものの1つに過ぎない

³¹ 例えば、短期では均衡への調整の途中であるとし、長期では均衡しているとする仮定は一般的であるが、ここでの短期と長期の区別の意味は、均衡条件が成り立つか成り立たないかという場合分けである。

いかかもしれないが、少なくとも一定程度の経済学的解釈が成り立つことは示していると思われる。

本稿では、非線形動学を用いた景気循環理論について、経済学的な意味づけの深化と単調で規則的過ぎる結果の修正という課題を設定した。ここで要約した本稿の結論は、その課題の解決に一定の効果を得られると期待できる。

しかしながら、本稿の議論はあくまでも理論的な観点からのものであり、実証的な検証は行えていない。本稿で導入したモデリングに関する手法や、それによって得られた種々の結論が、実証的にどの程度支持されるかは今後の研究によって検証されなければならない。現時点で本稿が主張できるのは、非線形動学のより積極的な応用がより多くの理論的仮説を生み出すという点についてのみである。

また、そうした理論的仮説のさらなる経済的な意味づけも課題である。例えば、本稿で議論したモデルではしばしば多様な経路の実現可能性が示唆されたが、このような経路の多様性の裏には、諸経済レジームの差異が存在すると考えられる。本稿ではこうした経済レジームあるいは制度的構造の種類の差異と成長経路の多様化の関連は考慮されていない。このような論点に関して、経済的な意味づけの余地が多く残されている。ただし、このような関連は理論面と実証面の両方から検討される必要がある。

補論

補論A 変数の時間スケールの区別と経済分析における意義

力学系において、各変数の調整速度、すなわち変化の速さが大きく異なる場合、「速い」変数と「遅い」変数の区別が体系を考察する上で重要な意味を持つ。力学系の分野ではこの問題を導入する際に、fast/slow dynamics、多重スケール分析、シナジェティクス等と呼ばれる手法がしばしば用いられる。

景気循環理論の分析においてこうした方法はあまり一般的ではないが、Zhang(1991)やLordon(1997)では用いられている。また、2次元グッドウィン成長循環モデルについて多重スケール分析を導入した議論として、Jacobó (2022)がある。ここでは、Zhang(1991)に従って、多重スケール分析の概略を説明する。

本論で述べたように、多重スケール分析の導入は、時間 t に対して、遅いスケールの時間 $T = \epsilon t$ を考慮することで可能になる。 $0 < \epsilon \ll 1$ であり、 T は t に比べて遅い時間を表す。

以下のような3変数の動学体系

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z)$$

が与えられているとする。このとき、 z が他の2変数に比べて「遅い」変数だと考えられるとき、時間 T を用いて

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dT} = f_3(x, y, z)$$

と表すのがより正確である。

第1章で論じたように、微分の連鎖律(チェーン・ルール)により、 $dz/dt = dz/dT \cdot (dT/dt) = \epsilon dz/dT = \epsilon f_3(x, y, z)$ が得られ、動学体系は

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon f_3(x, y, z)$$

となる。

このように、動学体系に多重スケール分析を導入することの意味は、変数の変化の「速さ」に差があるにも関わらずその点を考慮しない場合、間違っただけの解が得られる可能性があることである。動学方程式が高次の微分方程式である場合や、何らかの非線形項を持っている場合は、この可能性が否定できない。ある微分方程式にこのような問題が存在するかという問題は、一般に摂動解析と呼ばれる。もし変数間に「速さ」の差があった場合、解析的な処理は極めて煩雑になる。この問題は特異摂動解析と呼ばれる。

特異摂動解析の詳細な議論はここで論じるにはあまりに難解であるため、その基本的な発想を考察する。この発想は特別にシナジェティクスと呼ばれることもある。

シナジェティクスの手法では、先程の動学体系

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon f_3(x, y, z)$$

は、最初に与えられた体系と比べると、 ϵ の効果によって z の動学のみが異なる時間に支配されている。 $0 < \epsilon \ll 1$ であることから、非常に短い時間を考慮するとき、 z に関する動学は0に近似される。したがって、非常に短い時間についての動学は、以下の式で表される。

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

これらの式の意味は、非常に短い期間を対象とするならば、「遅い」時間に支配される z は一定としても良いということである。

その一方で、非常に長い期間を考慮するならば、逆に dz/dt が支配的になる。時間は t ではなく T のスケールとなる。 $T = \epsilon t \Rightarrow t = T/\epsilon$ であるから、この場合は微分の連鎖律(チェーン・ルール)により、例えば x の動学に関する式は、 $dx/dT = dx/dt \cdot (dt/dT) = (dx/dt)/\epsilon = f_1(x, y, z)/\epsilon$ というように変換される。 y についても同様であるため、体系は

$$\epsilon \frac{dx}{dT} = f_1(x, y, z)$$

$$\epsilon \frac{dy}{dT} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dT} = f_3(x, y, z)$$

となる。 $0 < \epsilon \ll 1$ であるから、 x 及び y に関する動学は以下のように近似される。

$$0 = f_1(x, y, z)$$

$$0 = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dT} = f_3(x, y, z)$$

この体系は、非常に長期の動学は、「遅い」変数である z の動学が支配するということを意味している。したがって、シナジェティクス的手法に従えば、解の長期的な振る舞いを知り

たい場合は、体系のすべての変数を考慮する必要は無く、限られた少数の変数(この場合は z)に関する方程式のみを考えれば良いということになる。この主張はハーケンの隷従化原理と呼ばれる。

ハーケンの隷従化原理は分析を大幅に簡単にするという利点を持つが、それだけでなく、カオス的な振る舞いが生じる場合についても示唆を与える。隷従化原理が機能している場合は、支配的な変数が「秩序」となっているのであり、その他の変数はそれに従属している。したがって系は安定である。しかし、動学の性質や外的なショック等により、隷従化原理が破綻することがありうる。このとき、系は安定性を失い、運動はカオス的になりうる。以上が、シナジェティクスの手法の基本的な着想である。

しかしながら、第1章では、時間の多重スケールを導入したものの、上記のような近似は行わず、3次元の体系として考察した。その理由は、通常シナジェティクスによって想定されている力学系と、景気循環モデルにおける力学系との時間の差異に着目したからである。

シナジェティクスが想定している力学系は、熱力学や発生学、化学の反応速度論といった分野が想定されている。こうした分野では、例えば景気循環理論に比べると、元々設定されている「時間」が速い。このような分野の力学系では、「短い」期間とは一般に1秒未満のスパンや、数秒から数十秒の単位である。考察する期間が数時間や数日に至ると、「長い」期間である。一方で、景気循環を問題とする場合、モデルにもよるものの多くは数ヶ月や数年であれば「短い」期間として扱われ、10年単位で見ると「長い」期間と扱われる。

この相違は当然ながら、問題としている現象のスピードが異なることに起因しているが、この相違は動学体系の分析の過程にも影響している。例えば、熱力学や化学における力学系のシミュレーションでは、考察する時間 t の期間は数千期から数万期に及ぶが、景気循環の分析では数十期から数百期程度である。その理由は、暗黙の了解として設定される t の尺度が大きく異なるからである。化学反応等では、 t の尺度を1秒未満の小さな値と考えるのが自然であるのに対し、マクロ経済分析では、例えば金融取引といった例外を除けば、1日や1ヶ月、1年という尺度で取るのがより適切であるからである。

マクロ経済の動学を考察するにあたって、時間 t の尺度を具体的にどの程度の長さとして設定すれば良いのか、またその設定にはどのような経済学的意味づけが考えられるのかという

問題はあまり議論されないと思われるが、経済変数に変化の「速さ」の違いを導入する場合は、どの程度の時間までであれば「短い期間」なのか、どの程度の時間から「長い期間」なのかを議論することが大きな意味を持つてくる。

本稿の議論は、この問題に何らかの主張を行うまでには至っていない。ただし、第1章では、短期と長期というように体系を区別せず、「速い」変数と「遅い」変数の両方を変化するものとして動学を考察した。この理由は、景気循環理論において「短期」と「長期」の具体的な長さに対する一致した見解が、管見の限り見られないからである。言い換えれば、景気循環の分析においてどの程度の期間が経過するまでを「短期」として、「遅い」変数を除外しても良いのか、どの程度の期間が経過したら「長期」として「速い」変数を考慮しなくても良いのかという明確な基準を見つけられなかったからである。そこで、本稿では折衷案として、「遅い」変数と「速い」変数のどちらも動学に影響を与える状況を想定した。いわば、「遅い」変数を一定としても良い「短期」でも、「速い」変数を考慮しなくて良い「長期」でもない、「遅い」変数の変化も「速い」変数の変化のどちらも体系の動学に影響を与える「中期」のような期間を設定した。第1章と第2章のシミュレーションでは、特に(経済分析においては)かなり長い期間を取っているものもあるが、これは t の尺度を長く取った場合でも短く取った場合でも「中期」と呼んで良いような期間の動態を算出するためである。

多重スケール分析やシナジェティクスといった変数の「速さ」に関する手法を導入することは、景気循環理論に豊富な知見をもたらし、さらなる発展に繋がると期待できる。一方で、その応用に際しては「時間」という概念を改めて検討する意義があると思われる。

補論B Lordon(1997)における成長率 g と雇用率 v の動学

第3章で述べた $\dot{v} = 0$ は形状は変わらないが、 $\dot{g} = 0$ は5つの場合が存在し、本文ではそのうちの1つの場合が考慮されている。ここでは5つの形状を概説する。

$\dot{g} = 0$ のとき、

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow \Psi(v, g) = \phi(g)$$

が成り立つ。

(g, v) 平面上にこれを図示するとき、 $\frac{dv}{dg}$ を考慮することで $\dot{g} = 0$ の傾きが得られる。

$$\frac{dv}{dg} = \frac{\left(\frac{d\phi}{dg} - \frac{\partial\Psi(v, g)}{\partial g}\right)}{\frac{\partial\Psi(v, g)}{\partial v}}$$

$\partial\Psi(v, g)/\partial v > 0$ より、 dv/dg の符号すなわち $\dot{g} = 0$ の傾きは $d\phi/dg$ と $\partial\Psi(v, g)/\partial g$ の大小関係で決まることになる。また、ここで $\partial\Psi(v, g)/\partial g = d\delta/dg$ であり、Lordon(1997)では、 $\delta(g) = \delta g$ と仮定される。このとき、 $d\delta/dg = \delta$ となる。また、表記の簡単化のため $d\phi/dg = \phi'$ とする。

このとき、 $\dot{g} = 0$ は次の5つの形状に区別される。ここで、 $g_{max} = 1/\sigma$ であり、 \bar{g} は ϕ' が最大となるときの g である。

$$(1) \delta < \text{Min}\{\phi'(0), \phi'(g_{max})\}$$

このとき、 $\delta = \phi(\bar{g})$ となるような g の値 \bar{g} は存在しない。また、すべての g について $dv/dg > 0$ であるから、 $\dot{g} = 0$ は単調増加である。

$$(2) \Psi'(0) < \delta < \Psi'(g_{max})$$

このとき、 $\delta = \phi(\bar{g})$ となるような \bar{g} が存在する。また、 $g < \bar{g}$ のとき、 $dv/dg > 0$ であり、 $g > \bar{g}$ のとき、 $dv/dg < 0$ である。したがって、 $\dot{g} = 0$ は \bar{g} で最大値を取るような逆U字型の曲線となる。

$$(3) \Psi'(g_{max}) < \delta < \Psi'(0)$$

このとき、 $\delta = \phi(\bar{g})$ となるような \bar{g} が存在する。また、 $g < \bar{g}$ のとき、 $dv/dg < 0$ であり、 $g > \bar{g}$ のとき、 $dv/dg > 0$ である。したがって、(2)の場合とは逆に、 $\dot{g} = 0$ は \bar{g} で最小値を取るようなU字型の曲線となる。

$$(4) \text{Max}\{\phi'(0), \phi'(g_{max})\} < \delta < \phi'(\bar{g})$$

このとき、 $\delta = \phi(\bar{g})$ となるような \bar{g} は2つ存在する。それぞれ \bar{g}_1 、 \bar{g}_2 とおき、 $\bar{g}_1 < \bar{g}_2$ とすると、 \bar{g}_1 は $\dot{g} = 0$ の最小値であり、 \bar{g}_2 となる。また、この2つの点で dv/dg は符号を変えるが、 $g < \bar{g}_1$ で負、 $\bar{g}_1 < \bar{g}_2$ で正、 $\bar{g}_2 < g$ で負となる。したがって $\dot{g} = 0$ は2回符号を変え、第13図のようになる。Lordon(1997)及び本章第3章で議論されているのは、この場合である。

$$(5) \phi'(\bar{g}) < \delta$$

このとき、 $\delta = \phi(\bar{g})$ となるような g の値 \bar{g} は存在しない。また、すべての g について $dv/dg < 0$ であるから、(1)の場合と逆に、 $\dot{g} = 0$ は単調減少である。

補論C Lordon(1997)における技術進化の程度 β の動学

Lordon(1997)では、技術進化の程度を表す β は $\dot{\beta} < 0$ とされている。これはLordon(1997)の分析がフォーディズム体制の崩壊の様態に限られているためである。以下、Lordon(1997)による β の想定を概説する。なお、表記はすべてLordon(1997)に準拠している。

β はまず、財の多様性 N の減少関数とされる。

$$\beta(t) = \Gamma(N(t))$$

$$\Gamma' < 0$$

このことは、生産すべき財が多様になればなるほど、技術進化の速度が遅くなることを意味する。この想定は、少品種大量生産・大量消費で特徴づけられるフォーディズム体制を反映している。生産技術の進歩はある限られた財の生産に集中しているがゆえに進められているのであり、多様な財を生産するようになると、その分多くの財について異なる技術開発を進めなくてはならず、進歩自体は遅くなるという含意がある。

また、財の多様性 N は長期所得の増加関数と設定される。

$$N(t) = \Omega(\bar{R}(t))$$

$$\Omega' > 0$$

ここで \bar{R} は、長期所得を表す指標であるが、財需要の選好の多様化を促す力と理解される。少品種大量生産・大量消費に特徴づけられるフォーディズム体制の崩壊の一因として、財需要の多様化が挙げられるが、この N に関する定式化はそのことを反映している。長期的に見て所得が増加していくならば、消費者は同じ種類の財に飽きてしまい、より多くの種類の財を求めるようになる。

また、所得の移動平均を対数変換したものを R とすると、 \bar{R} は R の関数とされる。さらに $R(t) = \int_{-\infty}^t g(s) ds$ と設定される。選好の多様化は長期的な所得に影響を受け、長期的な所得は経済成長率の関数である。なお、 s は時間である。

\bar{R} は $R(t)$ によってこのように表される。

$$\bar{R}(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} g(s)ds \right\} d\tau$$

なお、 τ は時間であり、 $\mu(t-\tau)$ はラグである。さらに、

$$\mu(t-\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right)$$

と仮定される。

上述の式を順々に代入していくと $\beta = \Gamma(\Omega(\bar{R}))$ が得られ、 $\dot{\beta}$ の式が以下のように求まる。

$$\dot{\beta} = \frac{d\bar{R}}{dt} \Omega'(\bar{R}) \Gamma'(\Omega(\bar{R})) = \frac{1}{T} (R(g) - \bar{R}) \Omega'(\bar{R}) \Gamma'(\Omega(\bar{R})) = \epsilon P(g)$$

\bar{R} は長期所得を表す指標であり、 $d\bar{R}/dt > 0$ 、すなわち長期では所得は増加していると仮定すると、上記の Γ' 及び Ω' の符号から、 $\dot{\beta} < 0$ となる。

補論D くさびカタストロフ及び燕の尾カタストロフの概説

カタストロフィー理論の文脈では、カタストロフはそれぞれポテンシャル関数によって表される。この補論では、本論で取り上げた、くさびカタストロフ及び燕の尾カタストロフのポテンシャル関数について簡単に説明する。なお、ここでの議論はThom(1972)や野口(1973)を参考としている。

くさびカタストロフのポテンシャル関数 V は、以下の式によって表される。

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (1)$$

図21で示されているような平面は一般にはカタストロフィー平面と呼ばれ、このポテンシャル関数を x について微分し、0と等しいと置くと得られる。したがってくさびカタストロフ平面を表す式はこのようになる。

$$4x^3 + 2ax + b = 0 \quad (2)$$

(a, b, x) 空間上で、この式は図21で示されているような折り目を持つ平面を描く。

また、(2)式と、それを更に x について微分して右辺を0と置いた式

$$12x^2 + 2a = 0 \quad (3)$$

とを同時に満たす (a, b) はカタストロフ集合と呼ばれる。くさびカタストロフのカタストロフ集合は、図 21 において (w, k) 平面に射影されているようなくさび状の図形になり、以下の式で与えられる。

$$4a^3 + 27b = 0 \quad (4)$$

Varian(1979)ではこれらの式に関しては言及されていないが、その議論と整合的な定式化を考えると、ポテンシャル関数、カタストロフィー平面、カタストロフ集合の式における3つの変数 (k, w, y) の対応はそれぞれ以下のようになる。

$$V = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}wy^2 + ky \quad (5)$$

$$4y^3 + 2wy + k = 0 \quad (6)$$

$$4w^3 + 27k = 0 \quad (7)$$

本章で扱った燕の尾カタストロフについても、ポテンシャル関数、カタストロフィー平面、カタストロフ集合が存在する。それぞれ以下のように表される。

$$V = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + wx \quad (8)$$

$$x^4 + ux^2 + vx + w = 0 \quad (9)$$

$$256u^4w^2 - 48u^3v^2 + 27v^4 = 0 \quad (10)$$

(10)式はやや複雑であるが、 x についてパラメータ表示すると、このようになる。

$$u = -6x^2 \quad (11)$$

$$v = 8x^3 \quad (12)$$

$$w = -3x^4 \quad (13)$$

燕の尾カタストロフに関して主に議論されるのはこのカタストロフ集合であり、本章の考察で取り上げられているのもカタストロフ集合である。燕の尾カタストロフのカタストロフ集合は (u, v, w) 空間に表されるため、図示が可能である。これは図 22 に描かれているような図形となる。燕の尾カタストロフの名前の由来は、このカタストロフ集合が燕の広げた羽と尾のような形をしているからである。

本章では、できるだけ Varian(1979)に倣った定式化を行った。上記のポテンシャル関数、カタストロフィー平面、カタストロフ集合の式と本章の変数 (π', w, k, y) とは、以下のように対応している。

$$V = \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{3}\pi'y^3 + \frac{1}{2}wy^2 + ky \quad (14)$$

$$y^4 + \pi'y^2 + wy + k = 0 \quad (15)$$

$$256\pi'^4k^2 - 48\pi'^3w^2 + 27w^4 = 0 \quad (16)$$

また、(16)式の y によるパラメータ表示は

$$\pi' = -6y^2 \quad (17)$$

$$w = 8y^3 \quad (18)$$

$$k = -3y^4 \quad (19)$$

である。

Varian(1979)の定式化と見比べると当然ながら式の形は異なっているが、 y や w 、 k といった変数の対応はなるべく崩れないように定式化されている。

補論 E Varian(1979)のモデルの導出

第4章では Varian(1979)のくさびカタストロフを用いたモデルを考察した。本補論では、Varian(1979)の動学体系(本論第4章(30)、(31)、(32)式)及びくさびカタストロフへの導入を概説する。

Varian(1979)の投資に関する設定はカルドアの想定であり、S字型の投資関数が仮定されている。すなわち、財市場に3つの均衡が存在するのであり、その個数はS字型の $\dot{y} = 0$ と増加関数の $\dot{k} = 0$ との交点の数に対応する。第25図は、Varian(1979)による $\dot{y} = 0$ と $\dot{k} = 0$ の例であり、交点が1つの場合である。

Varian(1979)の議論は、ここにパラメータ w の次元を加えることで、議論を3次元空間へと拡張している点に特徴がある。本論で述べたように、 w は消費関数 $C(y, w)$ の形状を変化させるのであり、その結果 $\dot{y} = 0$ と $\dot{k} = 0$ の形状に影響を与える。

w の動学はこのように与えられる。

$$\dot{w} = \gamma(w^* - w)$$

したがって、 w が w^* と乖離していればいるほど、 \dot{w} は大きくなる。 $w = w^*$ の場合は均衡点であり、 $\dot{y} = 0$ と $\dot{k} = 0$ が交わる点である。Varian(1979)では不況の状態に関心があるため、社会的「富」が均衡状態を上回る $w > w^*$ の場合は考慮しないこととする。 $w < w^*$ の場合、 w が w^* の近くにある場合、 $\dot{y} = 0$ はS字であり、折り目の部分が存在する。逆に、 w が w^* から大きく離れると $\dot{y} = 0$ の折り目の部分は消失し、均衡点は1つとなる。

くさびカタストロフのこのような導入の仕方は、第3章で検討したLordon(1997)に関するくさびカタストロフを用いた拡張とも同様である。

補論F カタストロフィー理論を用いたモデルの意義

第3章及び第4章では、カタストロフィー理論を用いて動学を考察した。第3章や第4章では、それぞれのモデルでカタストロフィー理論を用いた考察を行ったが、ここではより一般に、カタストロフィー理論を用いた分析がどのような特徴を持つのかについて考察する。

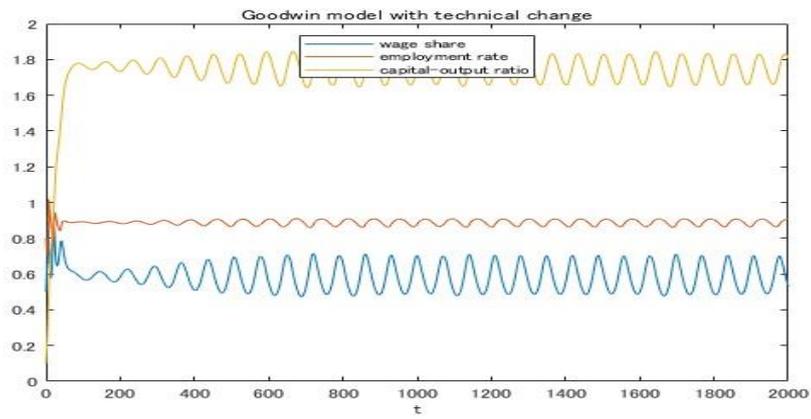
カタストロフィー理論の基本的な発想は幾何学的制御系であり、分岐理論である。例えば、くさびカタストロフについて言えば、カタストロフィー平面は $4x^3 + 2ax + b = 0$ という式で表され、この折り目のついた平面は (a, b, x) の3次元空間に表現される。このとき、 a, b は制御パラメータであり、 x が独立変数である。通常、微分方程式による動学の解軌道は、例えば時間 t と所得 y のように、時間と独立変数を座標軸に取った空間か、所得 y と資本ストック k の2次元空間のように独立変数同士を座標軸に取った空間によって表されるのが一般的であると思われる。これに対して、くさびカタストロフは制御パラメータと独立変数を座標軸に取った空間で表される。これは、制御パラメータ (a, b) の様々な組み合わせに対して x が取る値をプロットするという発想である。くさびカタストロフによる分析は、諸経済構造をそれぞれの制御パラメータに対応させることによって、系の安定的か不安定かを考慮できる上に、それをくさびカタストロフ平面という形で視覚的に明瞭な形で表せることが特徴である。

燕の尾カタストロフに関しても同様であるが、カタストロフィー平面はすべて制御パラメータである (u, v, w) 空間に表される。したがって燕の尾カタストロフの場合、解軌道は直接には表現されないが、3つの制御パラメータが表す座標のみで、系の安定性が視覚的に表示できる。

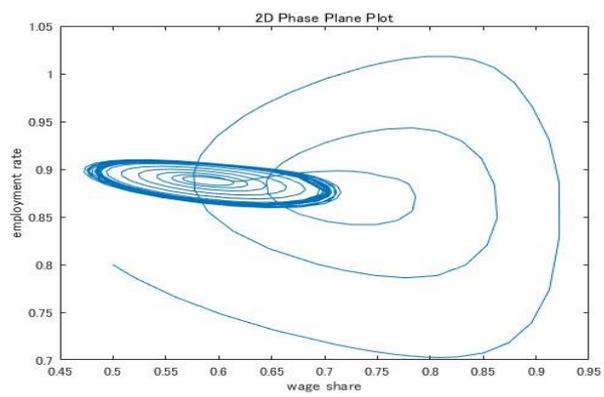
付図・付表

第1章

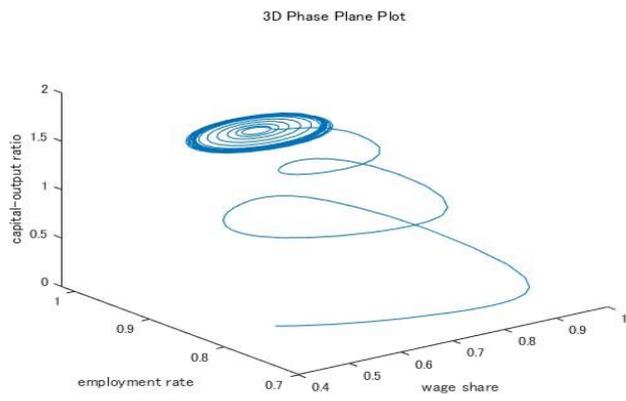
(a)



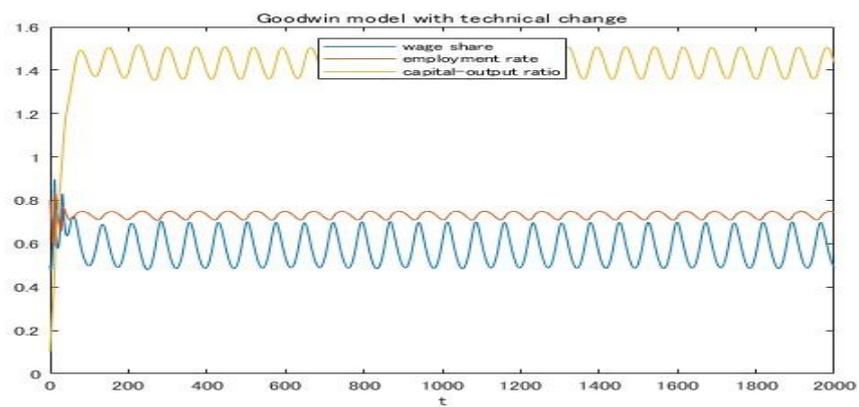
(b)



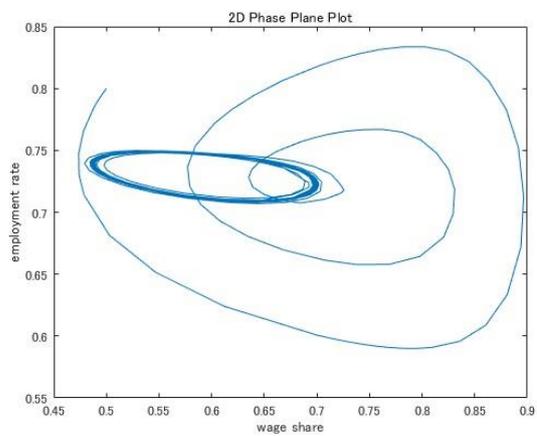
(c)



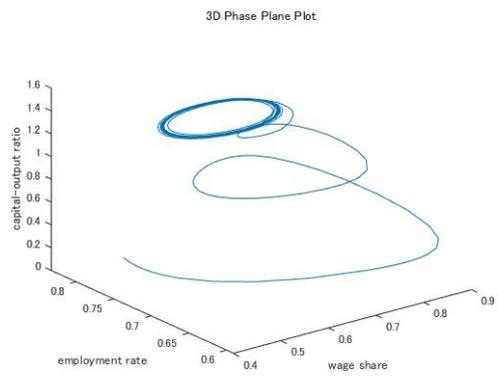
(d)



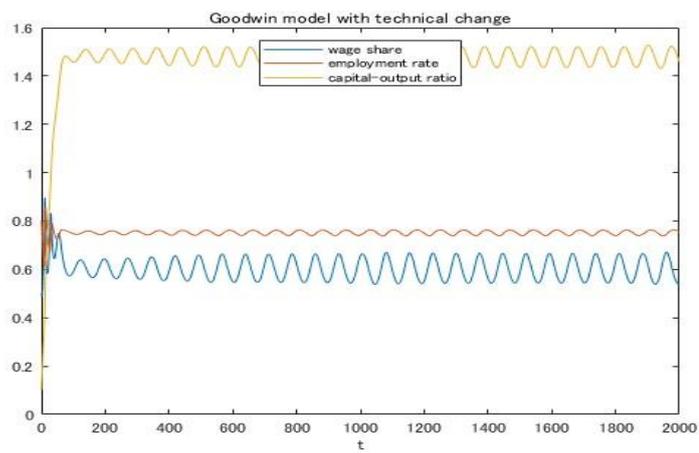
(e)



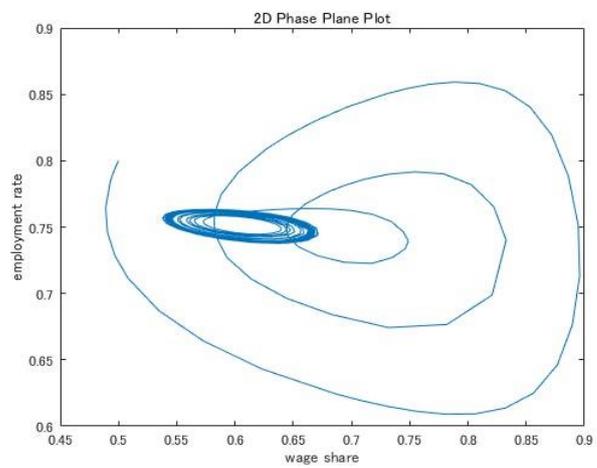
(f)



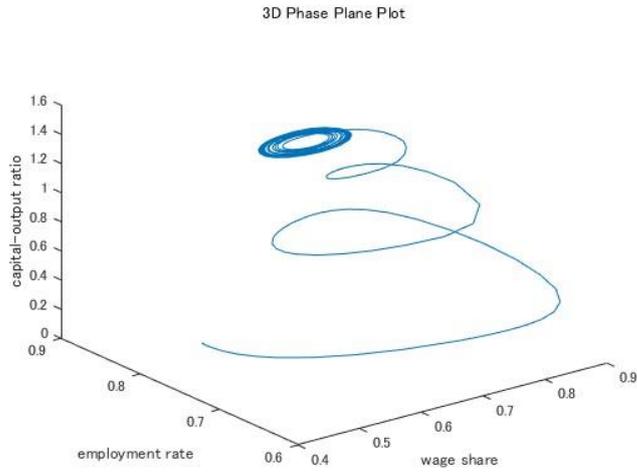
(g)



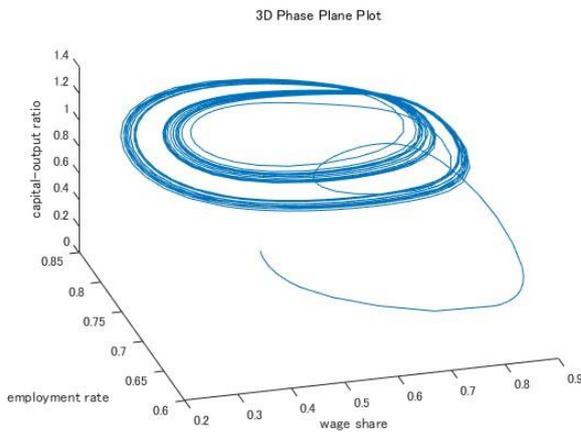
(h)



(i)



(j)

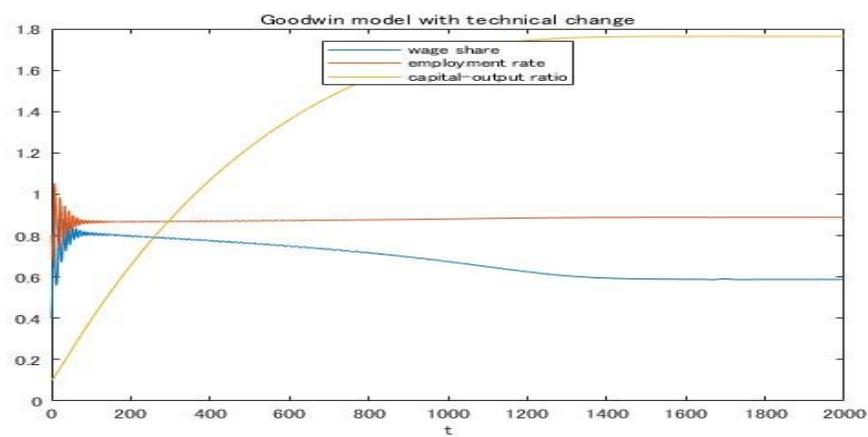


第1図:体系(7),(8),(9)のシミュレーション結果($t=2000$)。(a),(d),(g)は数値解、(b),(e),(h)は u と v について、(c),(f),(i)は ω, v 及び σ についての位相図である。ここで、(a),(b),(c)のパラメータは $r=0.85, K=5.0, b=7.0, c=7.7, k_1=8.0, \eta=1.1, s=0.1, \alpha_1=0.02, d=0.04, k_2=0.12, \alpha_2=0.03$ であり、(d),(e),(f)のパラメータは $r=0.7, K=5.0, b=7.0, c=7.7, k_1=10.0, \eta=1.1, s=0.1, \alpha_1=0.02, d=0.04, k_2=0.12, \alpha_2=0.03$ であり、(g),(h),(i)のパラメータは $r=0.7, K=5.0, b=6.8, c=7.7, k_1=10.0, \eta=1.1, s=0.1, \alpha_1=0.02, d=0.04, k_2=0.12, \alpha_2=0.03$ である。リミットサイクルを生じるという結果には変更が無いが、パラメータの変更によって解の軌道は鋭敏に変化することが分かる。実際、(g),(h),(i)で $\alpha_1=0.025$ とおくと、(j)のような軌道となる。これは1つのリミットサ

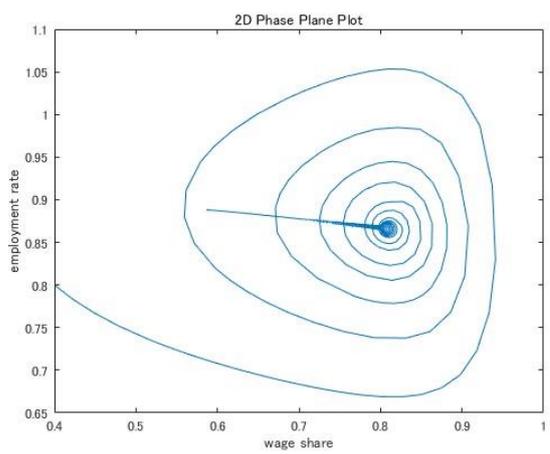
イクルが二重に重なったような形状となっている。このような形状のリミットサイクルは2次元体系では見られず、3次元体系の興味深い現象である。

適当な初期状態から出発した軌道は、 $(\omega, v, \sigma) = (0.6, 0.9, 1.8)$ 付近で安定的なリミットサイクルに収束することが示される。

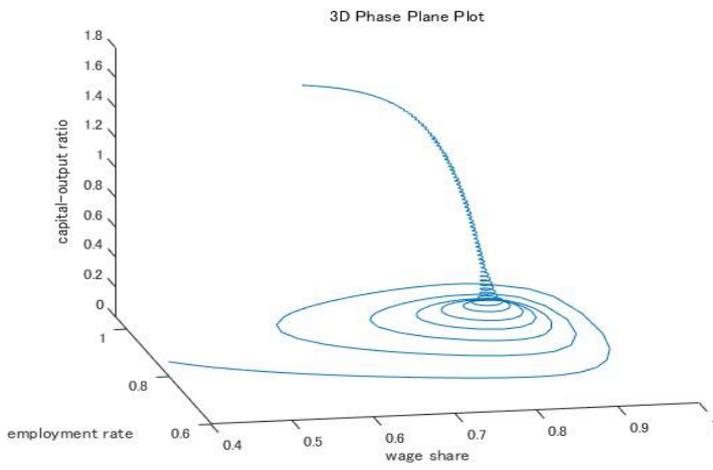
(a)



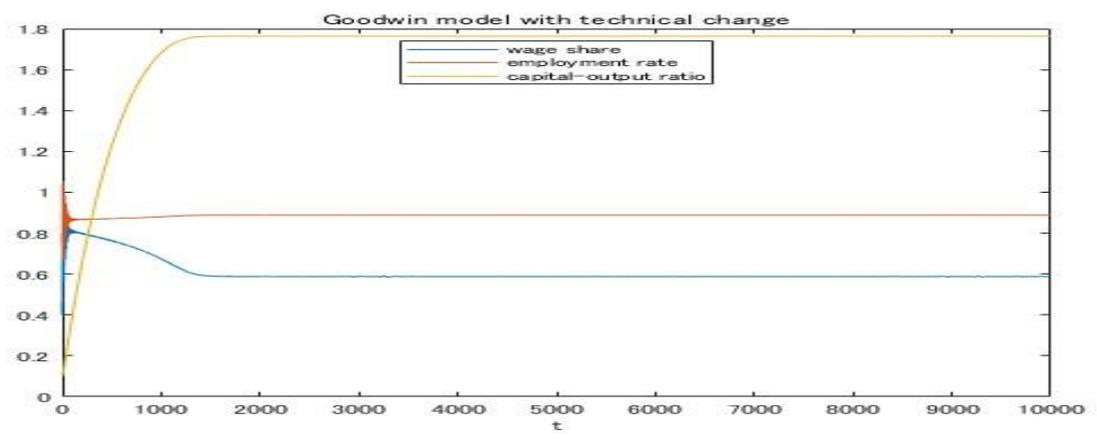
(b)



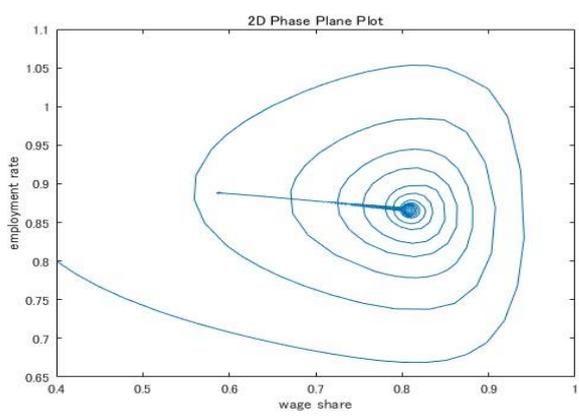
(c)



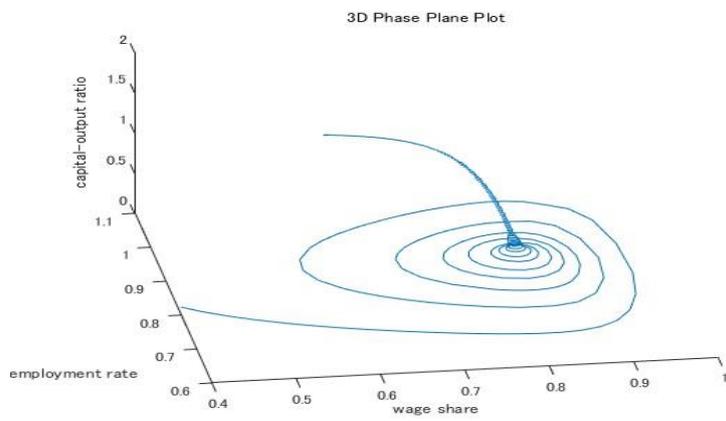
(d)



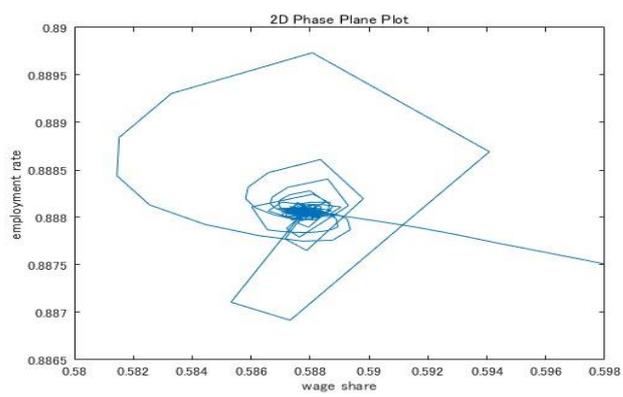
(e)



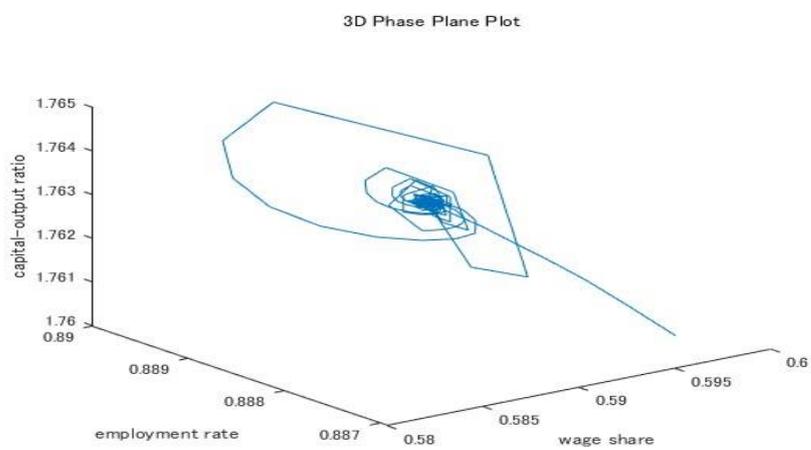
(f)



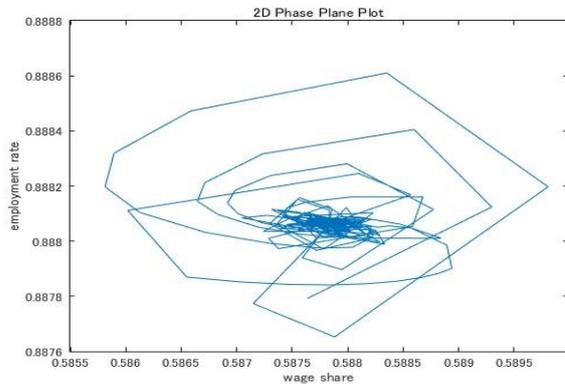
(g)



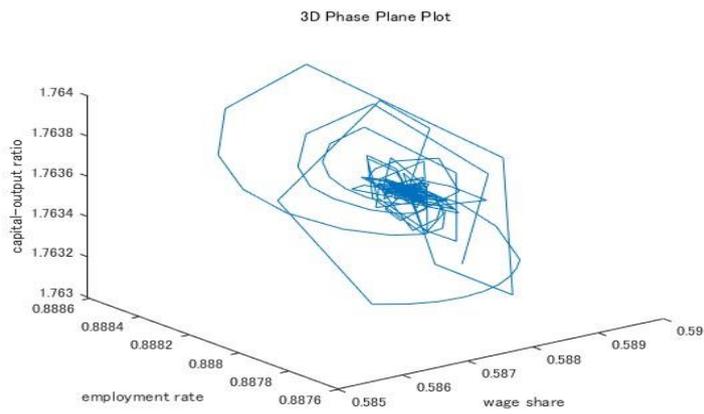
(h)



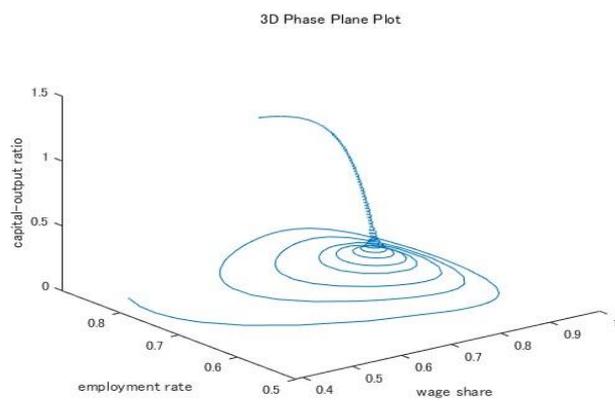
(i)



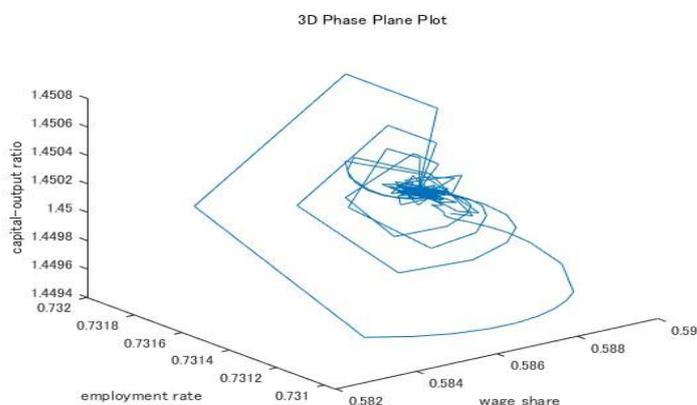
(j)



(k)



(l)

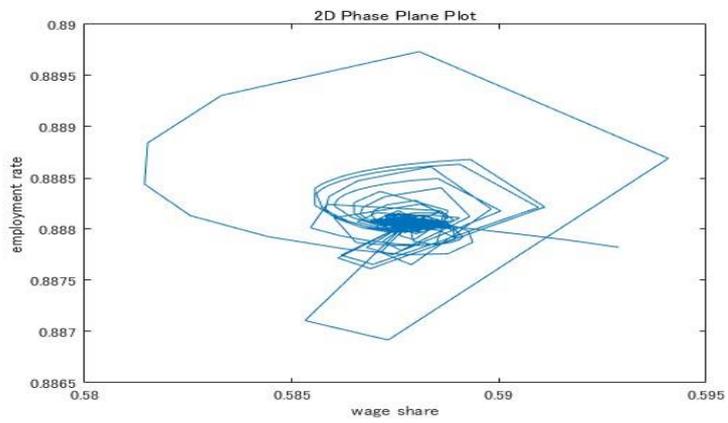


第2図:体系(13),(14),(15)についてのシミュレーション結果。(a)-(j)のパラメータの値は図1のものと同様に、 $r=0.85$, $K=5.0$, $b=7.0$, $c=7.7$, $k_1=8.0$, $\eta = 1.1$, $s=0.1$, $\alpha_1 = 0.02$, $d=0.04$, $k_2 = 0.12$, $\alpha_2 = 0.03$ であり、また $\epsilon = 0.05$ である。(a)-(c)は $t=2000$, (d)-(h)は $t=10000$ で計算した結果である。(e)及び(f)は $t=0$ から $t=10000$ までを図示しているが、(g)及び(h)は $t=750$ から $t=10000$ まで、(i)及び(j)は $t=5000$ から $t=10000$ までの結果を抜粋したものである。第1図と同様に、(a)及び(d)は数値解、(b)、(e)、(g)及び(i)は ω と v について、(c)、(f)、(h)及び(j)は ω, v 及び σ についての位相図である。

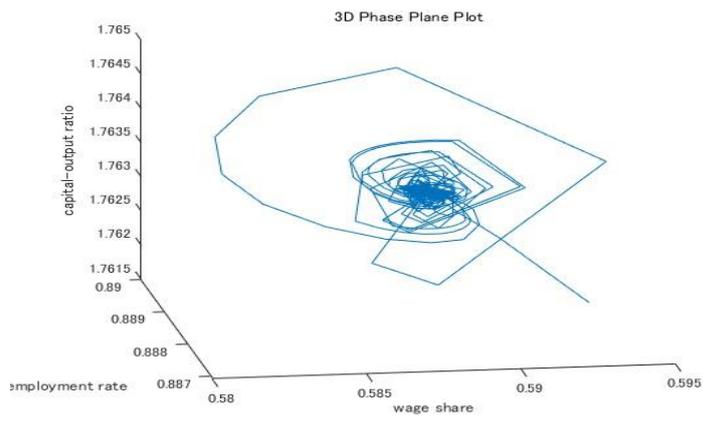
第1図のケースとの差異は形式上 ϵ が含まれるかどうかだけであり、パラメータの組み合わせ及び初期状態に変更は無いにもかかわらず、非常に異なる結果が得られる。このケースではリミットサイクルは生じず、最終的には均衡点に収束するように見えるが、その軌道はやや複雑である。初期は大きな振幅の循環を描きながら $(\omega, v, \sigma) = (0.85, 0.9, 0.3)$ の近傍に近づいていくが、その後は細かな振幅の螺旋を描きながら $(\omega, v, \sigma) = (0.6, 0.9, 1.8)$ へと緩やかに移動していく。しかし、これは単に収束していくのではなく、ある時点からその軌道はより乱雑になる。(e)、(f)の位相図からも僅かに読み取ることができるが、その部分を抜粋した(g)、(h)、(i)、(j)で明確に確認できる。

(k),(l)は第1図にならい、パラメータの値を $r=0.7$, $k_1=8.0$ と変更したものである。どちらも $t=10000$ までを図示しているが、(l)は $t=5000$ から $t=10000$ までを抜粋している。第1図のときとは違い、パラメータの変更ではあまり変化が生じていない。

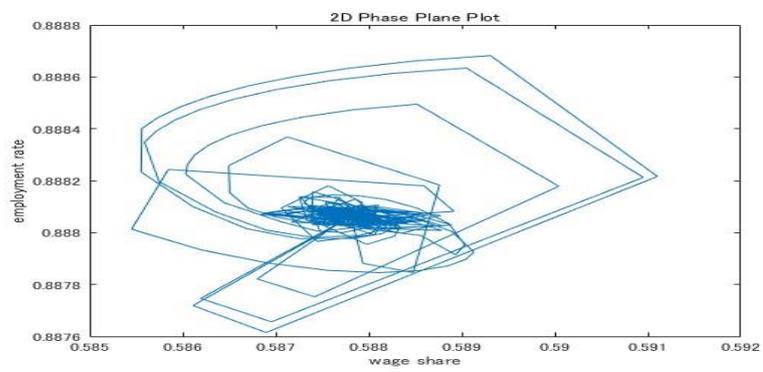
(a)



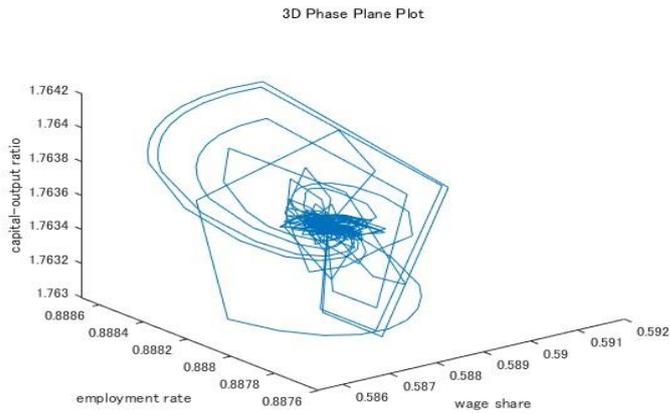
(b)



(c)



(d)

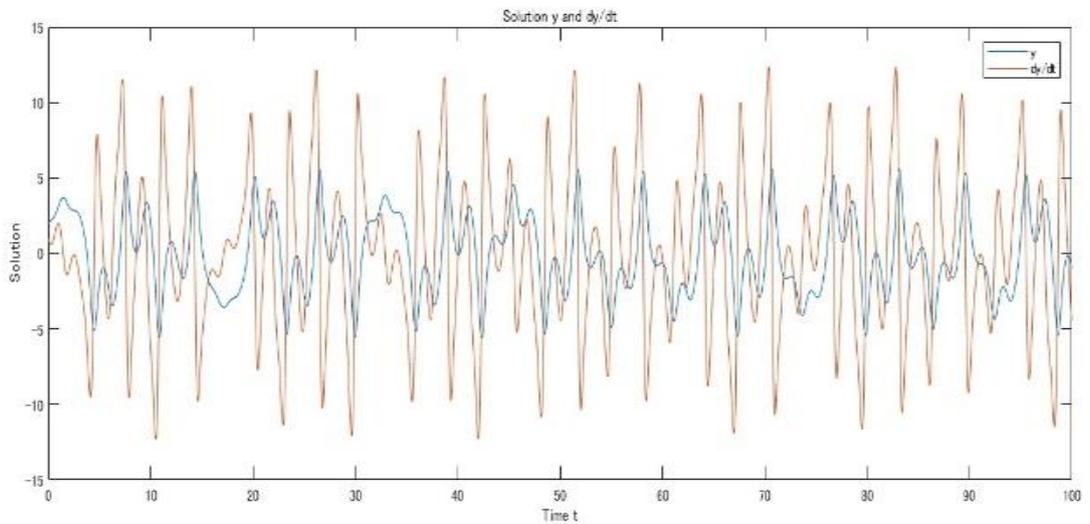


第3図:体系(13),(14),(15)を $t=20000$ でシミュレーションした結果。パラメータの値は図2のものと同様、 $r=0.85, K=5.0, b=7.0, c=7.7, k_1=8.0, \eta = 1.1, s=0.1, \alpha_1 = 0.02, d=0.04, k_2 = 0.12, \alpha_2 = 0.03, \epsilon = 0.05$ である。(a)、(b)は $t=780$ から $t=20000$ まで、(c)、(d)は $t=10000$ から $t=20000$ までの数値解を抜粋したものである。

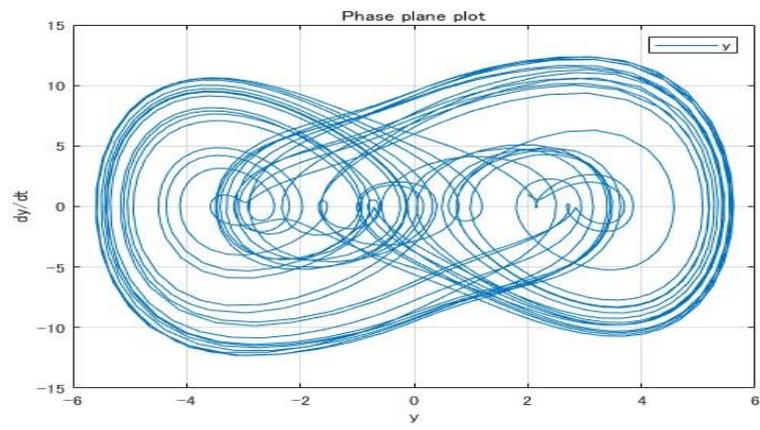
第2図よりさらに長い期間の数値解を求めることで、数値解は均衡点やリミットサイクルに収束していくのではなく、カオスの挙動を取っていることがうかがえる。

第2章

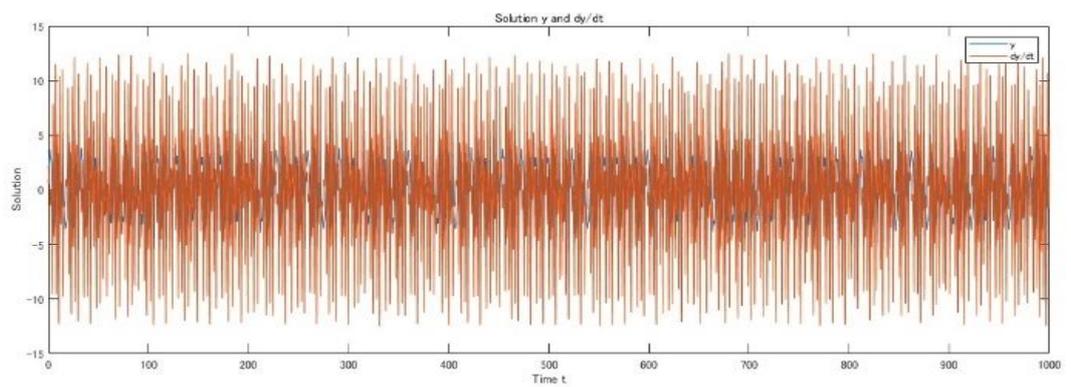
(a)



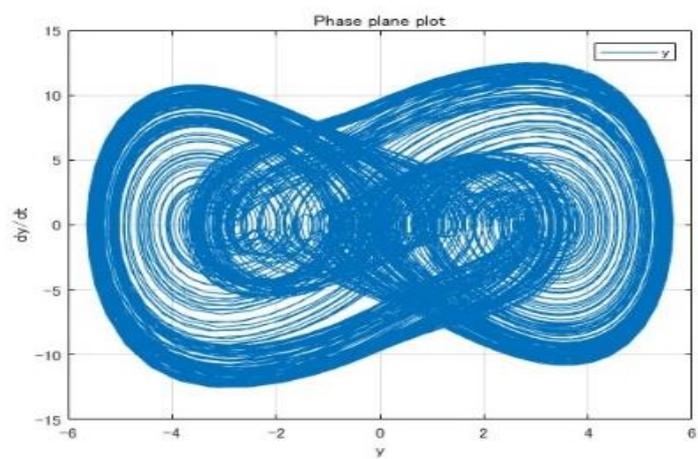
(b)



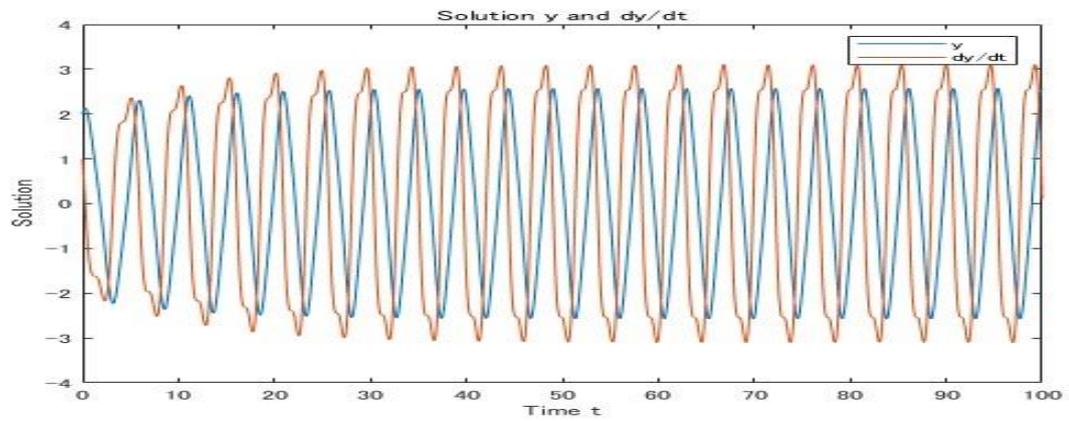
(c)



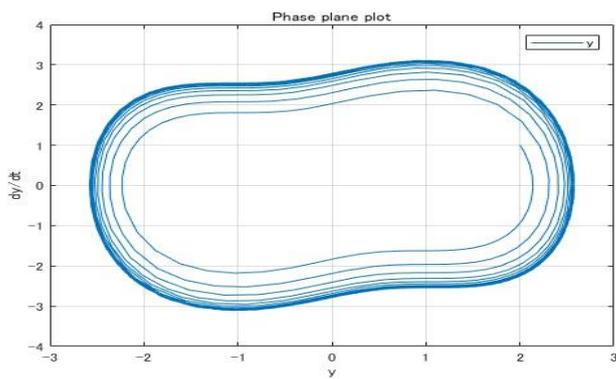
(d)



(e)

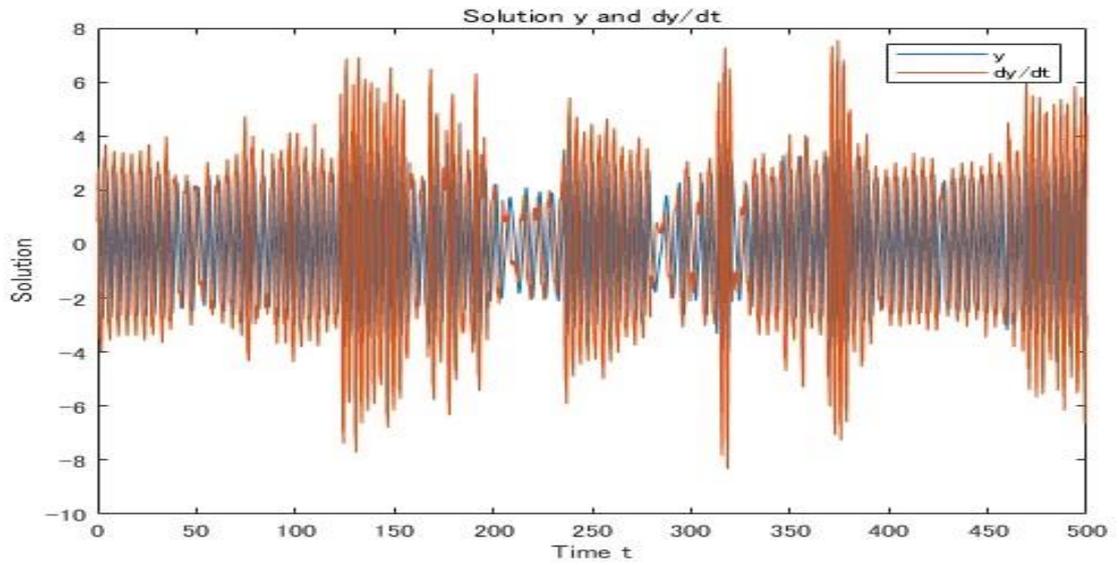


(f)

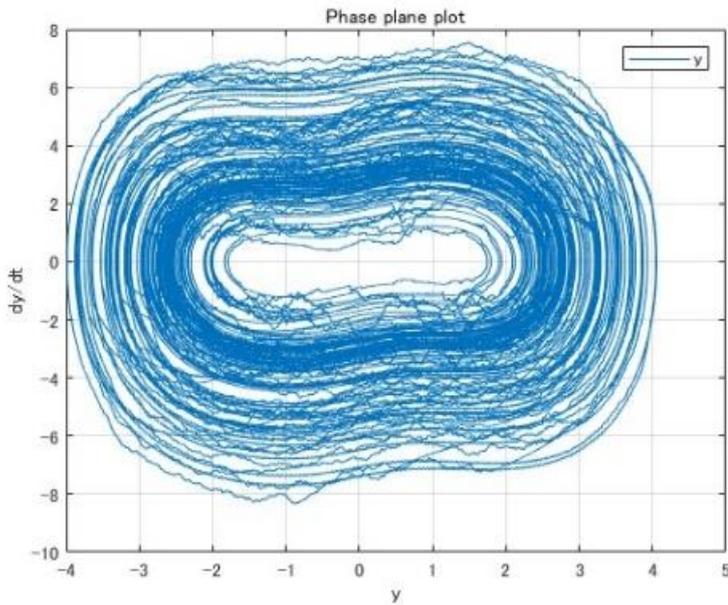


第4図:(17)式の解と位相図。なお、パラメータの条件は Lorenz and Nusse(2002)の設定に従って作成。ここで、 $a = 0.5, b = 0.5, c = 17$ である。また、(a)及び(b)はそれぞれ $t=100$ での解と位相図, (c)及び(d)は $t=1000$ での解と位相図である。(a)及び(c)は、規則的な周期解を示している。(b)及び(d)では、カオス・アトラクタの存在が確認できる。なお、(e)及び(f)は $c \sin(t) = 0$ 、すなわち外力が無い場合の(2)式の解と位相図である。

(a)



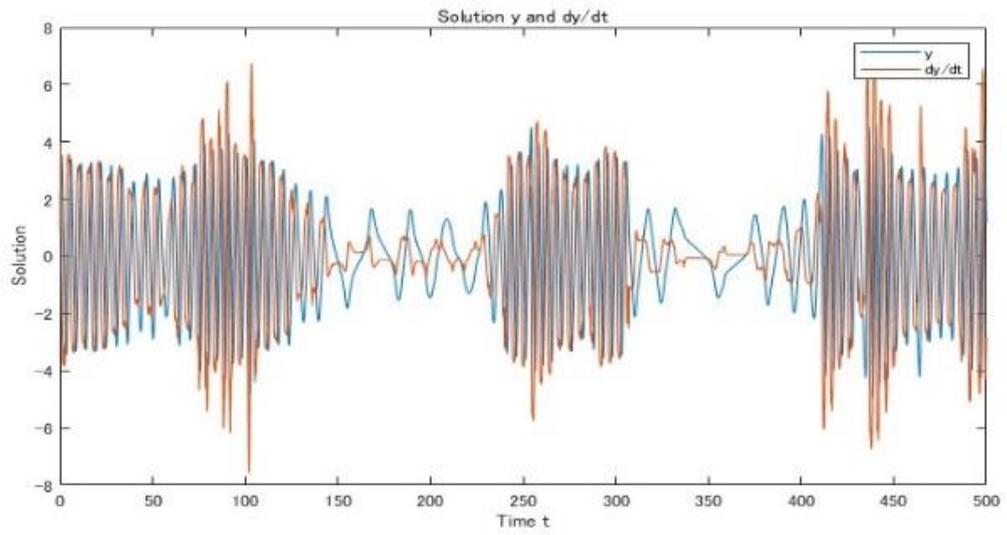
(b)



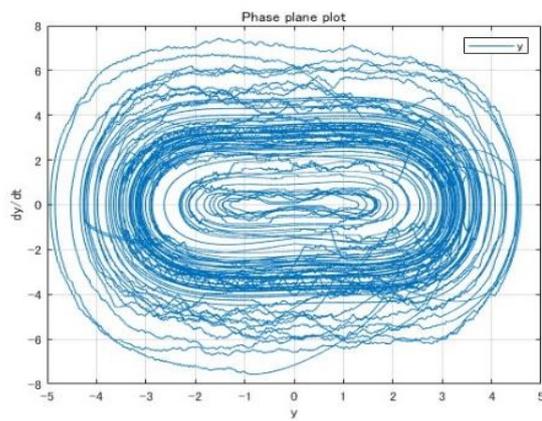
第5図: (18)式及び(19)式の解(a)と位相図(b)。ここで、 $a=0.5$ $b=0.5$ $c=17$ $\theta=15$ $t=500$ である。

第6図、第7図と比較すると、このケースでは波の密度が大きく、より変化が速いと言える。

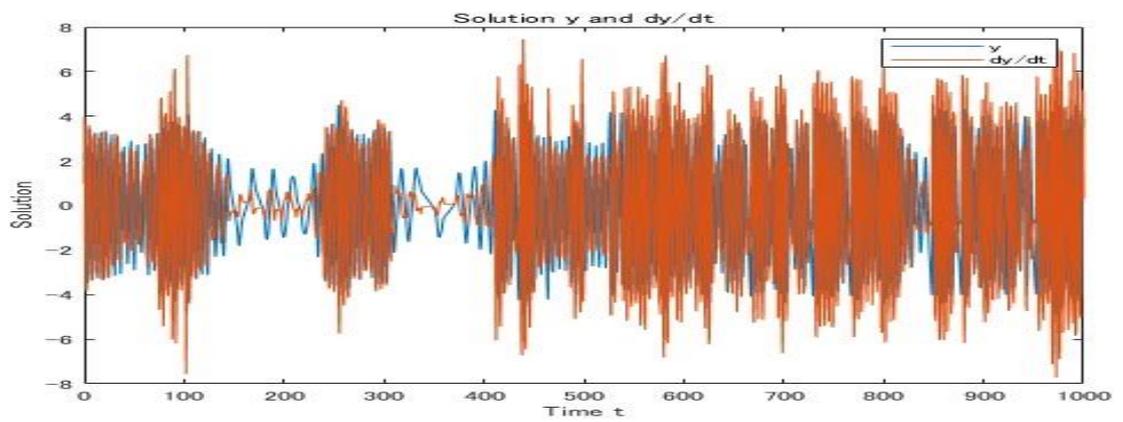
(a)



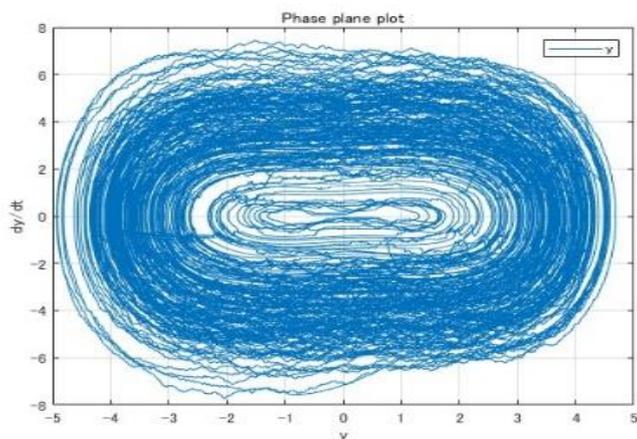
(b)



(c)

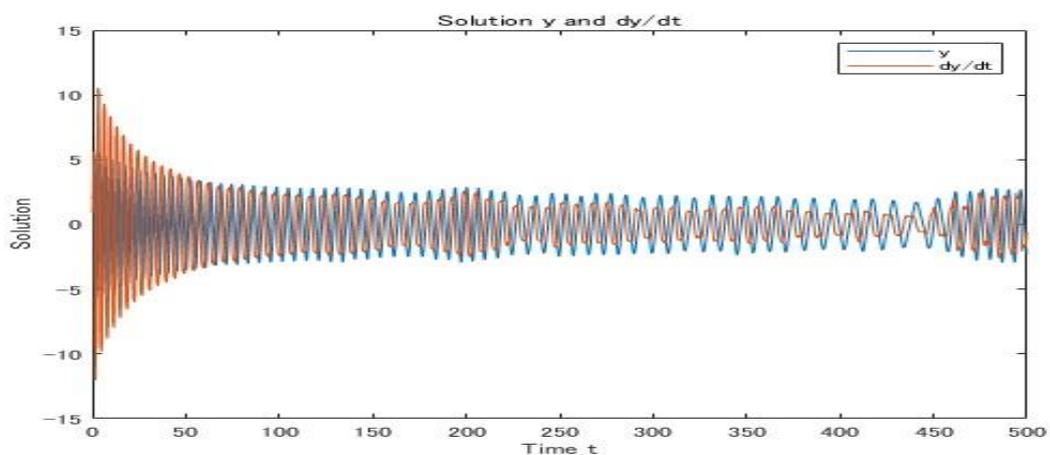


(d)

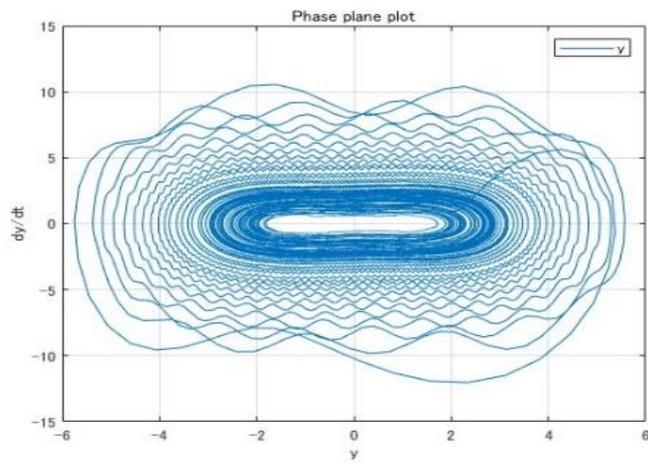


第6図: (18)式及び(19)式の解と位相図。ここで、パラメータの値は $a=0.1$ $b=0.2$ $c=17$ $\theta=15$ であり、(a) (b)の期間は $t=500$ 、(c)(d)は $t=1000$ である。このケースでは、(a)(b)の期間では変化は比較的緩やかであり、位相図の軌道もややまばらである。しかし(c)(d)の期間で見ること、長期的にはより激しい変化の局面が存在することも分かる。位相図もそれに応じて、かなり稠密になっている。なお、図ではやや見づらいが、より変化が激しくなる $t=500$ 以降においても、変化が穏やかな箇所(波の密度が薄い)が存在する。

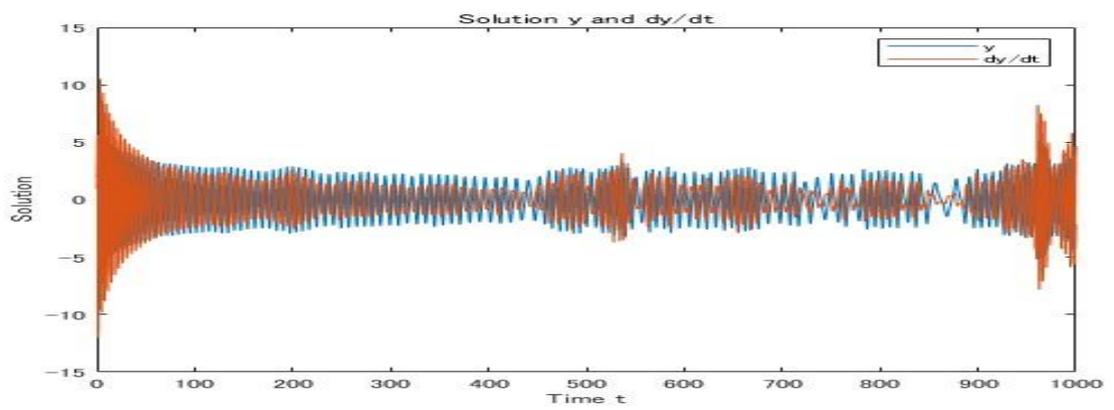
(a)



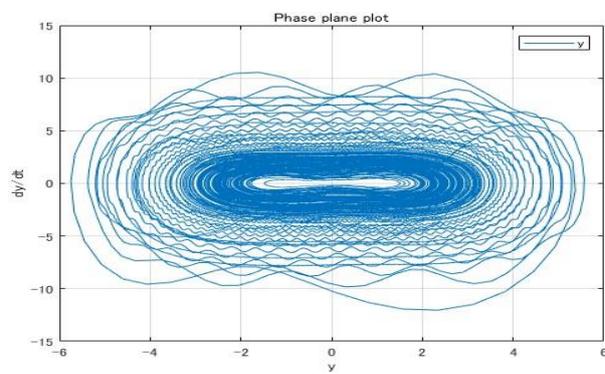
(b)



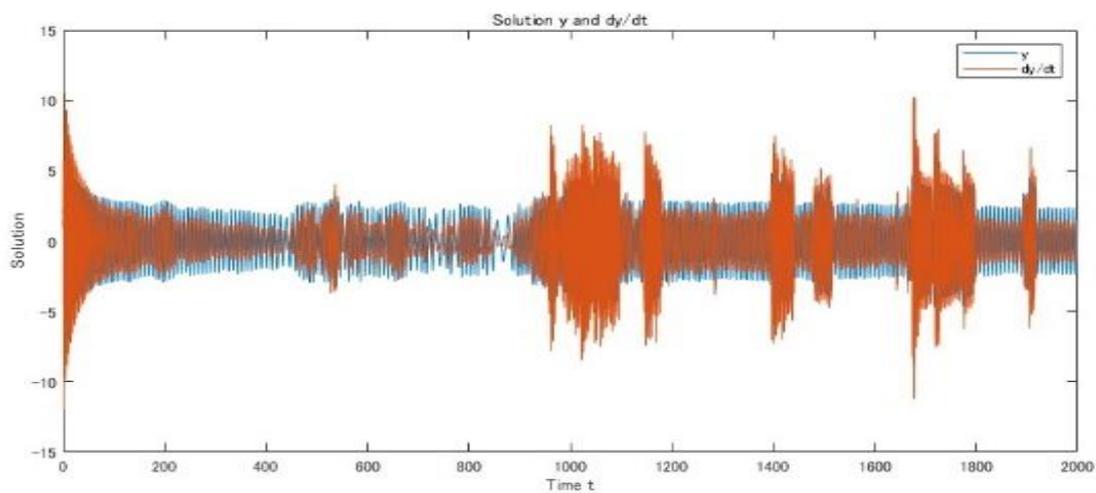
(c)



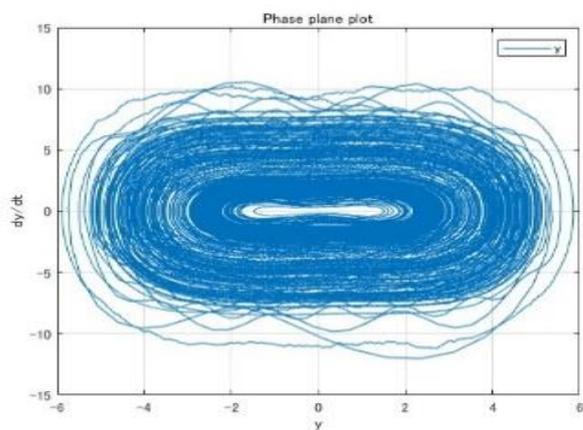
(d)



(e)



(f)

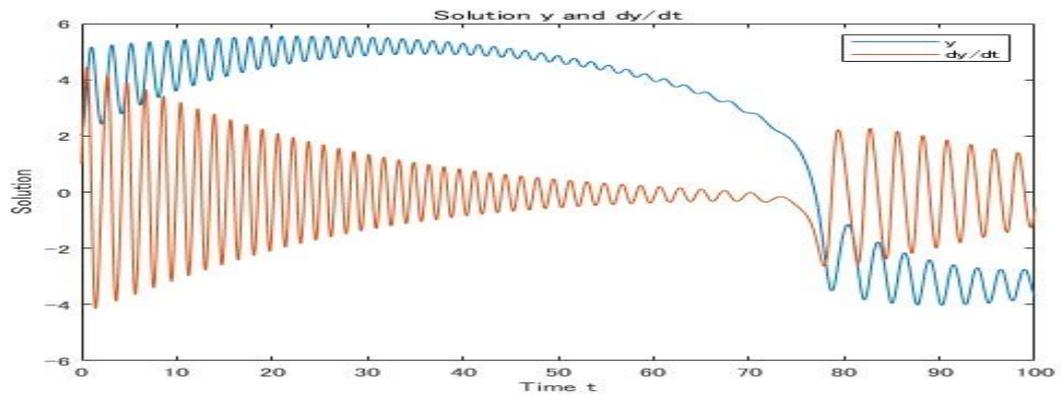


第7図: (18)式及び(19)式の解と位相図。ここで、パラメータは $a=0.1$ $b=0.2$ $c=17$ $\theta=2$ である。

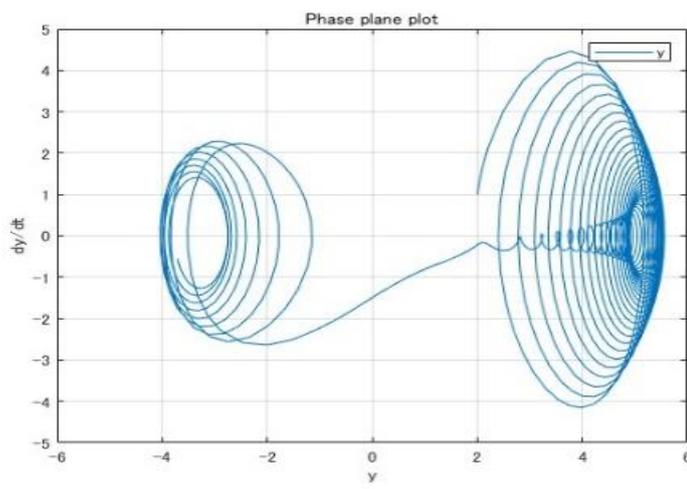
(a)(b)の期間は $t=500$, (c)(d)は $t=1000$ 、(e)(f)は $t=2000$ である。期間が比較的短い

(a)(b)(c)(d)では、 θ の値が小さいため、第5図、第6図と比べると波の振幅や速さはそれほど大きくない。位相図も比較的規則的である。しかし、より長期的なスパンで見た(e)(f)では、第5図や第6図のケースと同程度の振幅が生じていること、位相図の軌道もかなり稠密になっていることが分かる。

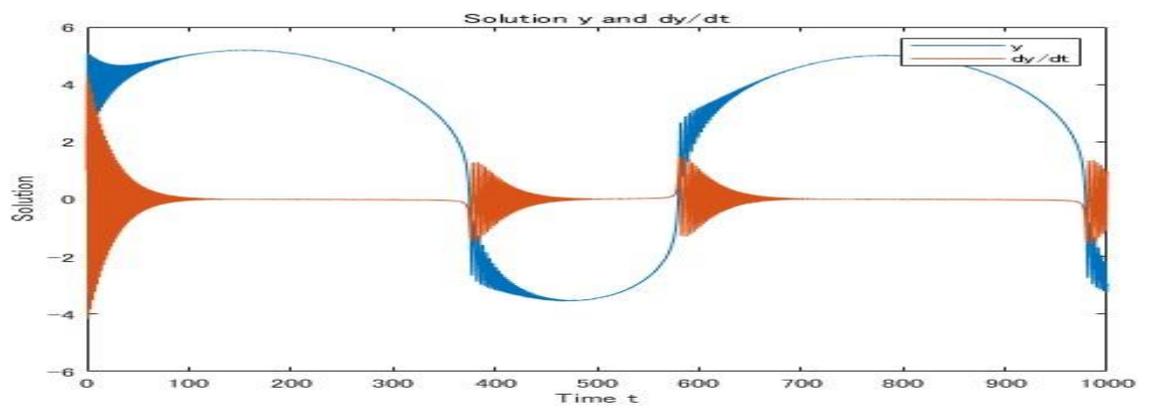
(a)



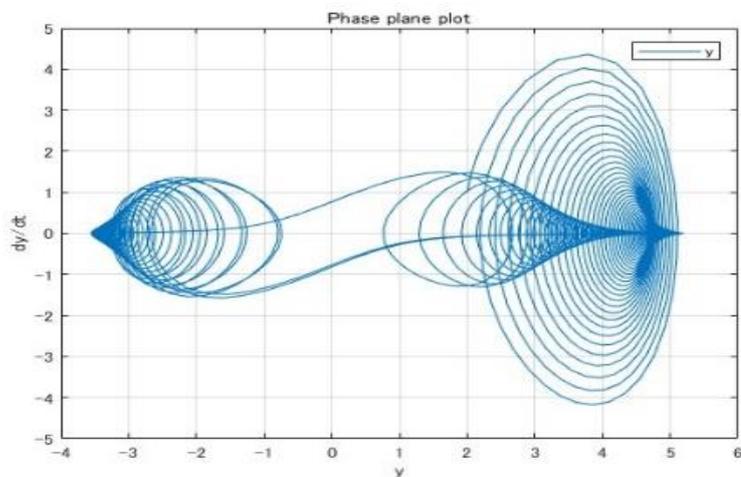
(b)



(c)

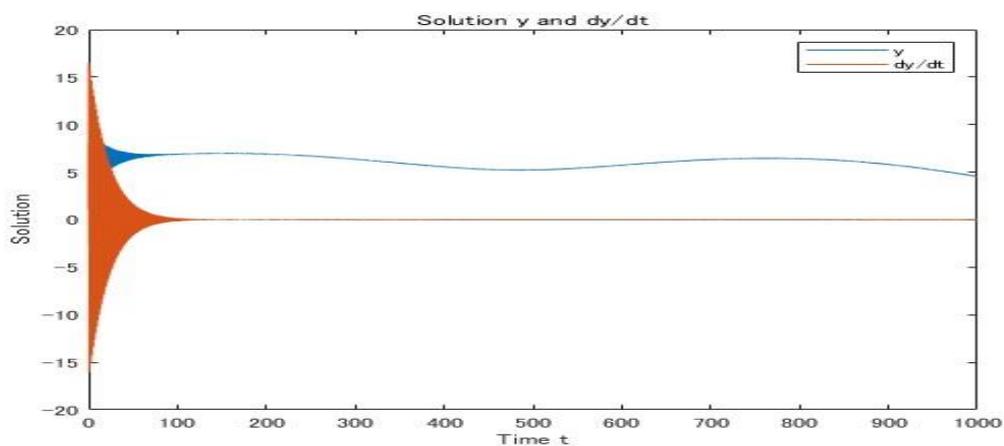


(d)

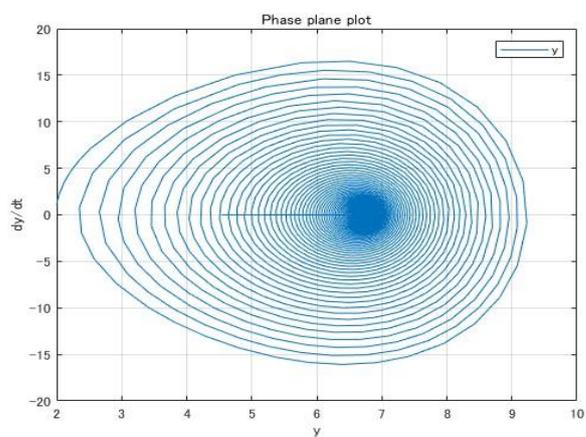


第8図: (20)式の解と位相図。パラメータは $a=0.1$ $b=0.2$ $\omega_1=0.05$ $d_1=17$ $d_2=10$ であり、シミュレーション期間はそれぞれ(a)(b) $t=100$ 、(c) (d) $t=1000$ である。長期($t=1000$)では、短期($t=100$)では読み取れなかったアトラクタやより長い周期の波動が観察される。一方で、長期の結果だけでは、アトラクタの発生に順序があることは読み取れない。長期の結果だけでは短期の振る舞いを完全に理解することはできない。

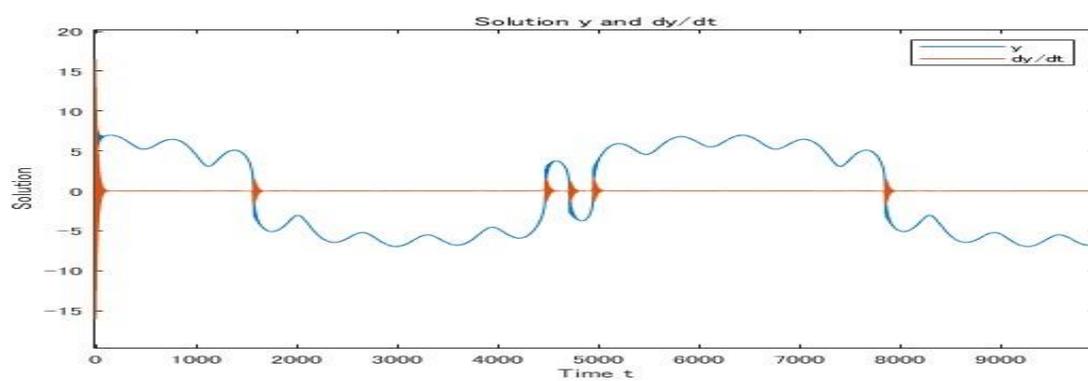
(a)



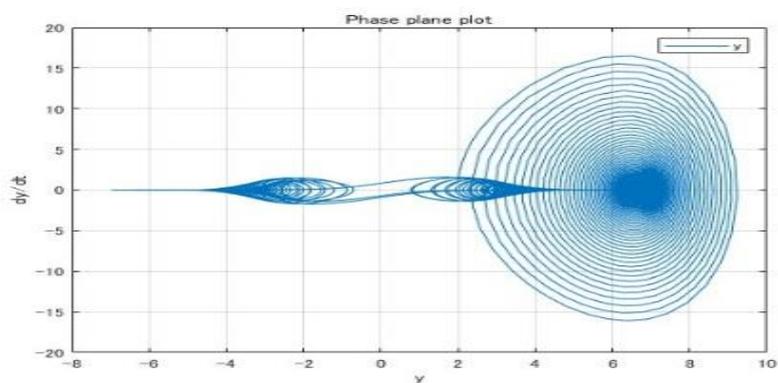
(b)



(c)



(d)

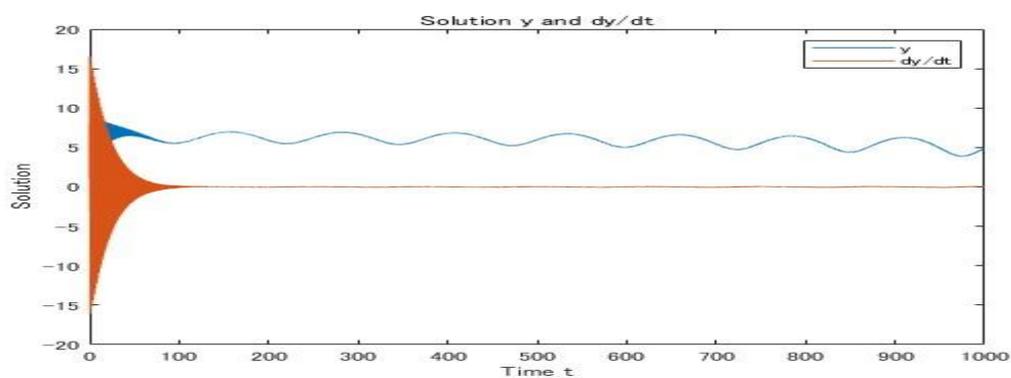


第9図: (20)式の解と位相図。パラメータは $a=0.1$ $b=0.2$ $\omega_1=0.01$ $d_1=17$ $d_2=10$ である。

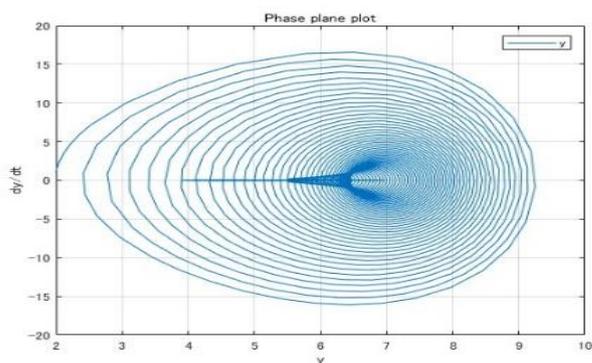
(a)(b)の期間は $t=1000$ 、(c)(d)の期間は $t=10000$ である。(a)を見る限り、最初($t=100$ まで)の激

しい挙動以降、動学は安定な収束点に向かうように思われる。しかし、非常に長期で見た(c)によれば、動学は短い周期の波と長い周期の波を重ね合わせたような軌道を示し、更に突発的な不規則な変化も生じうる($t=5000$ 付近)。位相図に関しても、(b)ではカオスの挙動を生じず、アトラクタに吸引されるように見えるが、(d)ではアトラクタが3つ発生しており、さらに後に発生した2つはカオス・アトラクタである。

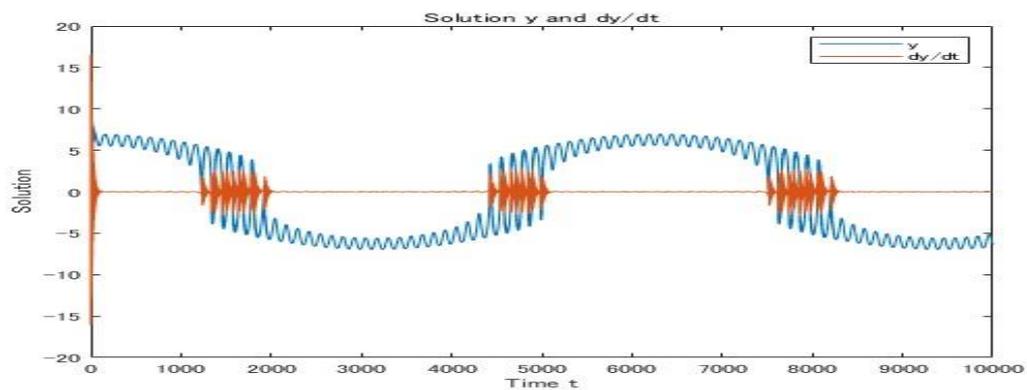
(a)



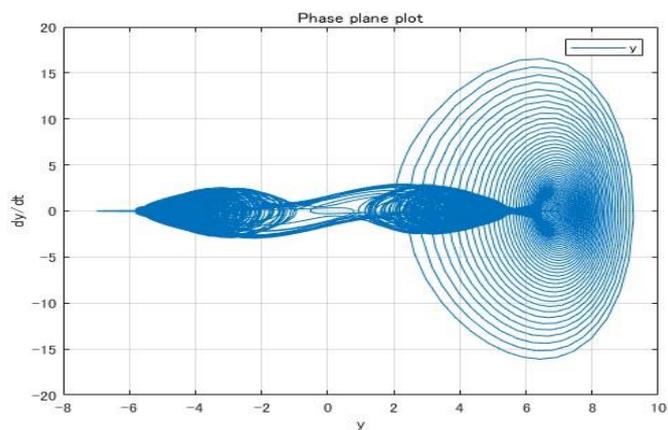
(b)



(c)

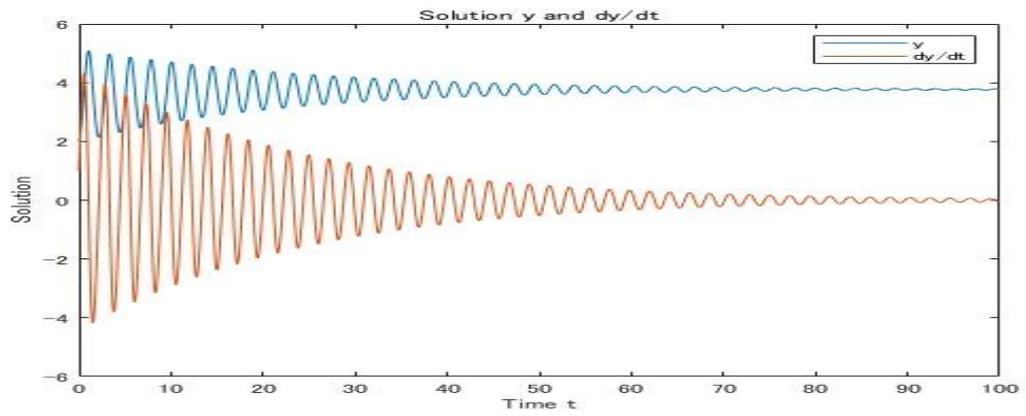


(d)

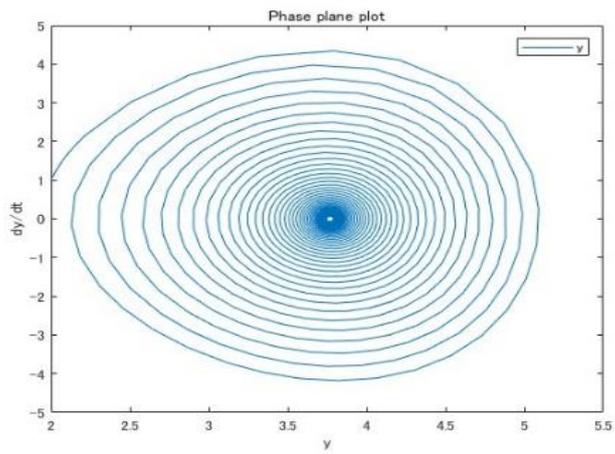


第 10 図: (20)式の解と位相図。パラメータは $a=0.1$ $b=0.2$ $\omega_1=0.05$ $d_1 = 17$ $d_2 = 50$ である。(a) (b) の期間は $t=1000$ 、(c)(d)の期間は $t=10000$ である。図9と同様に、非常に長いスパンで見れば、短い波と長い波とが合成されたような解軌道が実現する。位相図についても、 $t=1000$ の場合では見られなかった挙動が、 $t=10000$ では生じることが分かる。

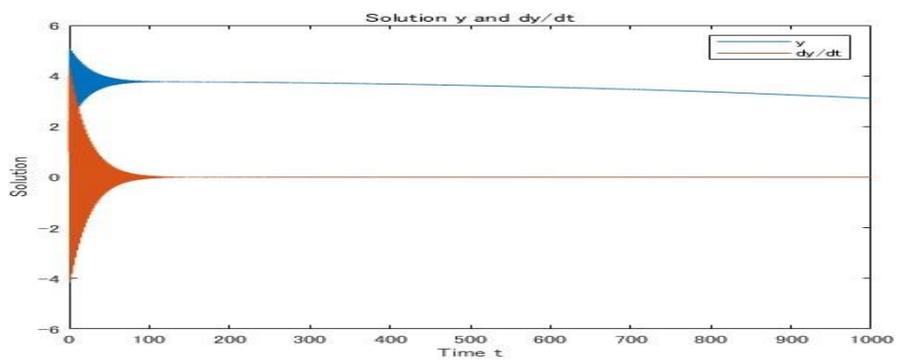
(a)



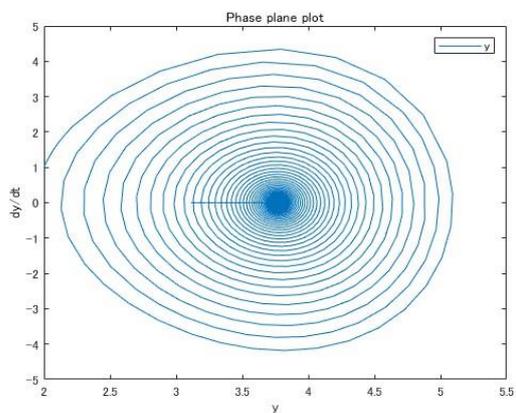
(b)



(c)

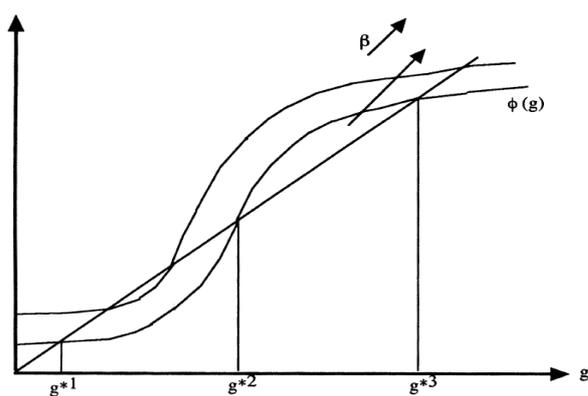


(d)

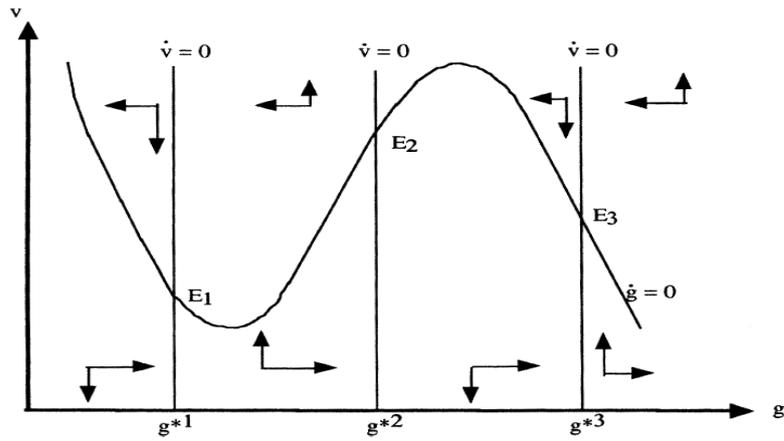


第 11 図: (20)式において、 $d_1 \sin(\omega_1 t) = 0$ の場合。他のパラメータは $a=0.1$ $b=0.2$ $d_2 = 10$ で、(a)(b)の期間は $t=100$ 、(c)(d)は $t=1000$ である。このケースは長期的な外力 $d_2 \cos(\omega_2 t)$ のみを導入したものである。第 8 図、第 9 図、第 10 図とはかなり異なった結果となっており、長期的な外力を導入したからと言って、動学に長期的な波動が生じるわけではないことが示唆される。

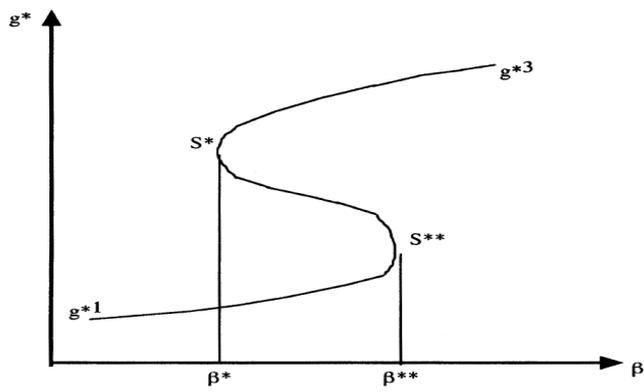
第 3 章



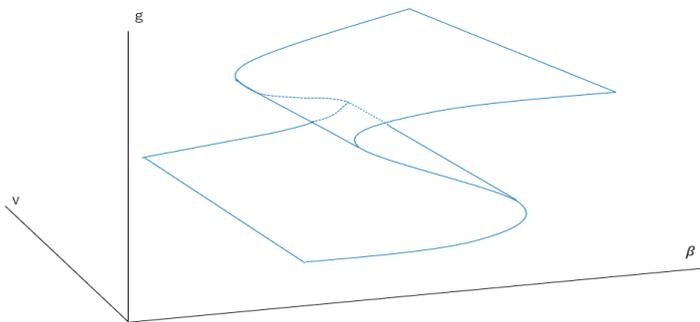
第 12 図: ϕ の形状。Lordon(1997)より抜粋。



第 13 図: $\dot{v} = 0$ と $\dot{g} = 0$ の位相図。Lordon(1997)より抜粋。

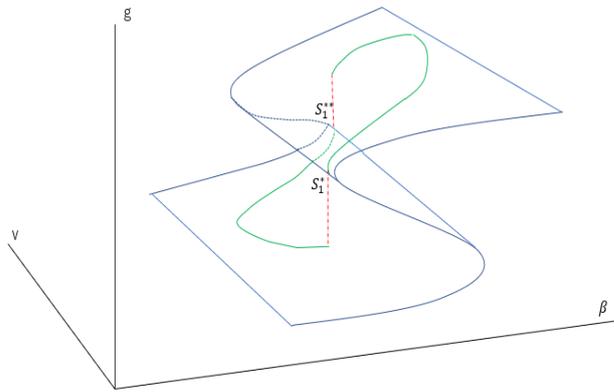


第 14 図: g^* と β の解軌道。Lordon(1997)より抜粋。

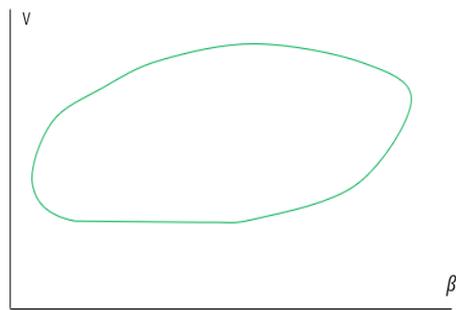


第 15 図: Lordon(1997)の v を含んだ 3 次元体系への拡張の一例。第 14 図に示された S 字状の軌道に v 軸方向の奥行きを加えたような図形となっている。

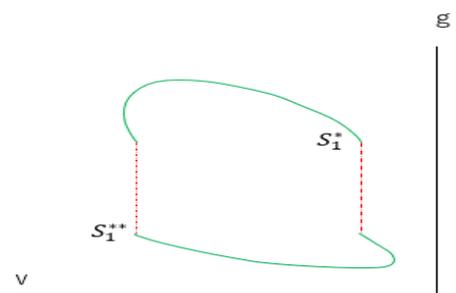
(a)



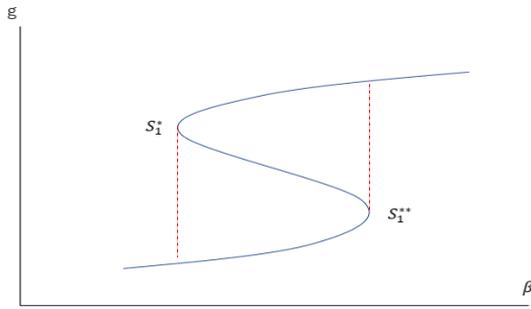
(b)



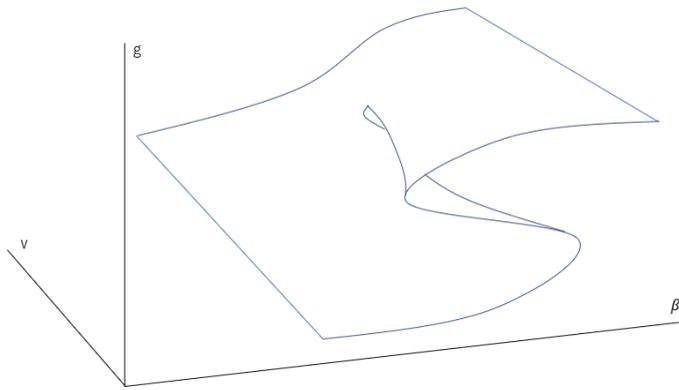
(c)



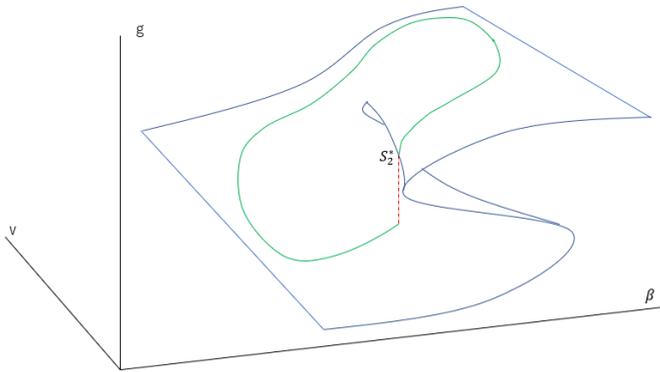
(d)



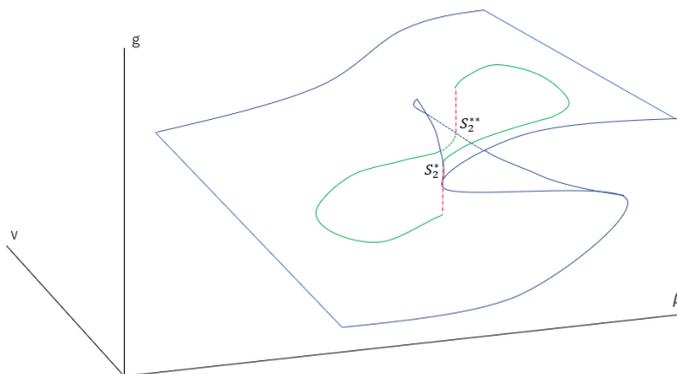
第 16 図:第 15 図で示された 3 次元曲面上を通る成長軌道の一例。軌道は緑色の実線で示されている。 S_1^* 及び S_1^{**} は g のジャンプが生じる点を示し、赤い点線はそのジャンプの軌跡を表す。(a)は 3 次元曲面上に成長軌道を表示したものである。(b)及び(c)は、それぞれ (β, v) 平面、 (v, g) 平面から見た成長軌道のイメージ図であり、ジャンプは g についてのみ生じることが見て取れる。(d)は 3 次元曲面を (β, g) 平面から見た図であり、ジャンプの軌跡が明確に表されている。



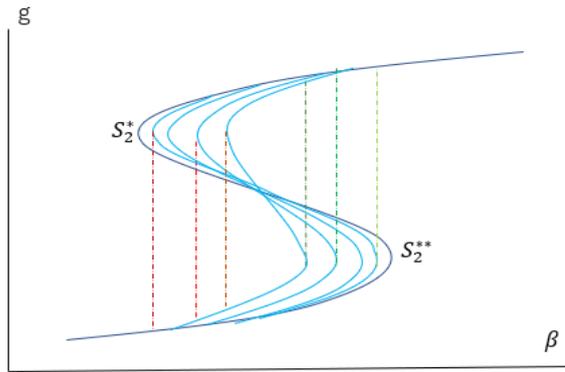
第 17 図: くさびカタストロフ曲面。第 15 図に描かれた図形と違い、曲面上には折り目がついている部分とついていない部分が存在している。



第 18 図: くさびカタストロフ曲面上を通る成長軌道の一例。成長軌道は緑の実線で、ジャンプの軌跡は赤い点線で描かれている。 S_2^* は g の下方へのジャンプが生じる点である。第 16 図と比較すると、上昇局面では g のジャンプが生じていないことが分かる。

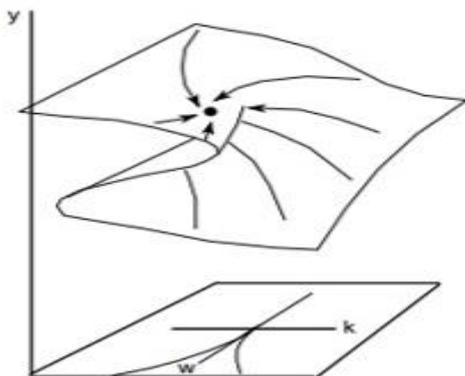


第 19 図: くさびカタストロフ曲面上を通る成長軌道の、第 18 図とは異なる例。 S_2^* 及び S_2^{**} はそれぞれ g の下方へのジャンプが生じる点、上方へのジャンプが生じる点である。第 18 図と異なり、上昇局面においても g のジャンプが生じる。この点は第 16 図(a)と同様であるが、くさびカタストロフの形状によって第 16 図とは異なる軌道を描いていることが分かる。

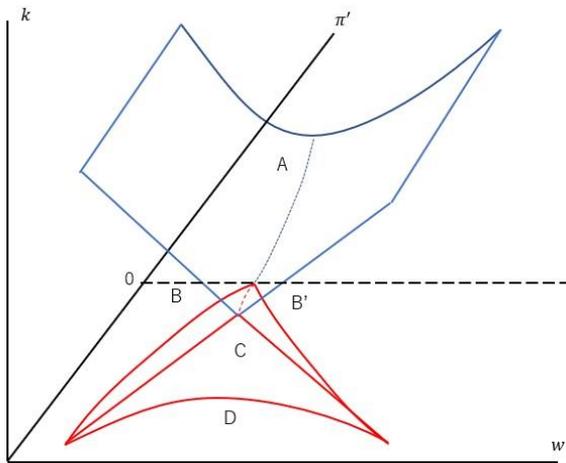


第 20 図: 第 19 図を (β, g) 平面から見たイメージ図。第 16 図(d)と比較すると、下降局面と上昇局面の両方で g のジャンプが生じることは共通しているが、どのような成長経路であってもジャンプは必ず β の特定の値で生じる第 16 図(d)とは対照的に、成長経路によってジャンプが生じる β の値は異なる。したがって、実現しうる成長経路はより多様である。

第 4 章

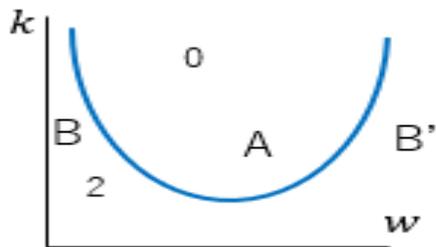


第 21 図: くさびカタストロフによる回復過程の類別。Varian(1979)より抜粋。

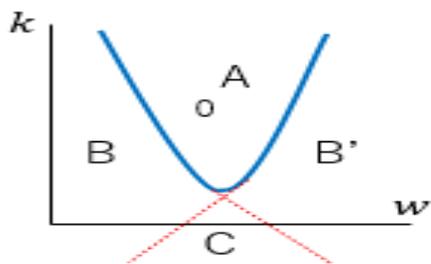


第 22 図: (π', w, k) 空間の燕の尾カタストロフ。青色の実線で囲まれた「羽」の曲面と、赤色の実線で囲まれた「尾」の曲面からなる。「尾」の部分の先端と平面 $\pi' = 0$ は接しており、その接点は燕の尾点と呼ばれる。

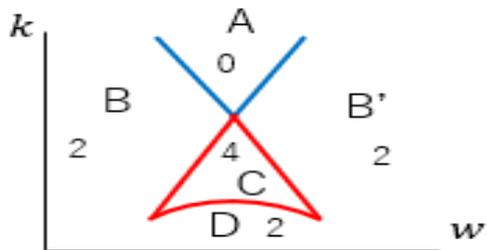
(a)



(b)

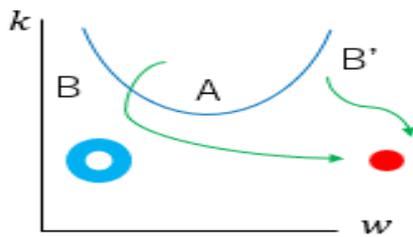


(c)

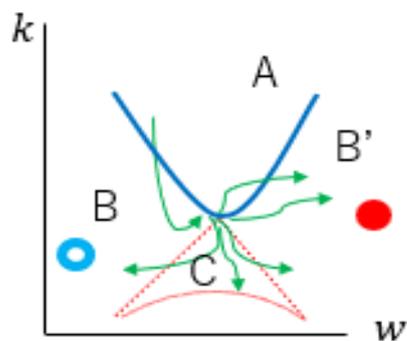


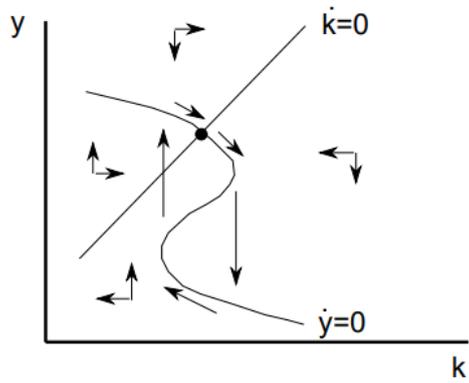
第 23 図: π' の符号による状態の分岐。(a)は $\pi' > 0$ 、(b)は $\pi' = 0$ 、(c)及び(d)は $\pi' < 0$ のときの図である。それぞれの場合について、部分空間とそれらが持つアトラクタとリペラの個数の合計が図によって示されている。それらの対応は表 1 にもまとめられている。

(a)



(b)





第 25 図: $\dot{y} = 0$ と $\dot{k} = 0$ の例。この例では交点は 1 つ存在している。Varian(1979)より抜粋。

表 1: 各部分空間のアトラクタとリペラの個数。

	A	B	B'	C	D
アトラクタ	0	1	1	2	1
リペラ	0	1	1	2	1
合計	0	2	2	4	2

参考文献

- 小野俊夫(1995) 「経済システムの移動均衡とカタストロフィー ——1 カタストロフィー理論序説——」 『早稲田社会科学研究』 (51), 89-126.
- 野口広(1973) 『カタストロフィーの理論』 講談社
- 野口広(1976) 『カタストロフィーの話——現代数学の社会的応用』 日本放送出版協会
- 堀田悠生(2020) 「微分位相幾何学を用いたレギュレーション理論」 『経済学論叢』 72(1), 103-125.
- Asada, T. (2006) Stabilization policy in a Keynes–Goodwin model with debt accumulation. *Structural Change and Economic Dynamics*, 17(4), 466-485.
- Barunik, J., and Kukacka, J. (2015) Realizing stock market crashes: stochastic cusp catastrophe model of returns under time-varying volatility. *Quantitative Finance*, 15(6), 959-973.
- Duménil G., and Lévy, D. (1993) *The Economics of the Profit Rate*, Edward Elgar, London.
- Fischer, E. O., and Jammerneegg, W. (1986) Empirical investigation of a catastrophe theory extension of the Phillips curve. *The Review of Economics and Statistics*, 9-17.
- Foley, D. K. (2003) Endogenous technical change with externalities in a classical growth model. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 52(2), 167-189.
- Ghaleb, A. F., Abou-Dina, M. S., Moatimid, G. M., and Zekry, M. H. (2021) Analytic approximate solutions of the cubic–quintic Duffing–van der Pol equation with two-external periodic forcing terms: Stability analysis. *Mathematics and Computers in Simulation*, 180, 129-151.
- Gong, W., Li, Y., Wang, C., Zhang, H., and Zhai, Z. (2022) The Catastrophe Analysis of Shanghai Crude Oil Futures Price from the Perspective of Volatility Factors. *Complexity*, 2022, 1-12
- Goodwin, R.M. (1951) The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, *Econometrica* 19(1), 1-17.

- Goodwin, R.M. (1955) A Model of Cyclical Growth, International Economic Association Series, In Erik Lundberg (ed.) , *The Business Cycle in the Post-War World*, 203-221, Palgrave Macmillan.
- Goodwin, R.M. (1967) A growth cycle, In Feinstein, C. H. (Ed.) , *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, 54-58, Cambridge University Press.
- Goodwin, R.M. (1982) *Essays in Economic Dynamics*, London: Macmillan.
- Goodwin, R.M. (1990) *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford University Press.
- Han, X., and Bi, Q. (2012) Complex bursting patterns in Van der Pol system with two slowly changing external forcings. *Science China Technological Sciences*, 55(3), 702-708.
- Hicks, J. R. (1950) *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford, Clarendon Press.
- Huu, A. N., and Costa-Lima, B. (2014) Orbits in a stochastic Goodwin–Lotka–Volterra model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419(1), 48-67.
- Jacobo, J. (2022) A multi time-scale theory of economic growth and cycles. *Structural Change and Economic Dynamics*, 62, 143-155.
- Jungeilges, J., and Ryazanova, T. (2017) Noise-induced transitions in a stochastic Goodwin-type business cycle model. *Structural Change and Economic Dynamics*, 40, 103-115.
- Kakmeni, F. M., Bowong, S., Tchawoua, C., and Kaptoum, E. (2004) Strange attractors and chaos control in a Duffing–Van der Pol oscillator with two external periodic forces. *Journal of sound and vibration*, 277(4-5), 783-799.
- Kaldor, N. (1940) A model of the trade cycle, *Economic Journal*, 50(192), 78-92.
- Kalecki, M. (1943) Political Aspects of Full Employment, In Kalecki, M. (1971) *Selected Essays on the Dynamics of The Capitalist Economy 1933-1970*, Ch.12, 138-145, Cambridge at the university press.
- Krugman, P. (1996) *The Self Organizing Economy*. John Wiley and Sons.
- Kuwamura, M., and Chiba, H. (2009) Mixed-mode oscillations and chaos in a prey-predator system with dormancy of predators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(4), 043121.

- Li, S., Li, Q., Li, J., and Feng, J. (2011) Chaos prediction and control of Goodwin's nonlinear accelerator model. *Nonlinear analysis: Real world applications*, 12(4), 1950-1960.
- Lorenz, H. W. (1987) Goodwin's nonlinear accelerator and chaotic motion. *Journal of Economics*, 413-418.
- Lordon, F. (1997) Endogenous structural change and crisis in a multiple time-scales growth model. *Journal of Evolutionary Economics*, 7(1), 1-21.
- Lorenz, H.W. (1993) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, 2nd, Revised and Enlarged Edition. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag
- Lorenz, H.W., and Nusse, H. E. (2002) Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13(5), 957-965.
- Lordon, F. (1997) Endogenous structural change and crisis in a multiple time-scales growth model. *Journal of Evolutionary Economics*, 7(1), 1-21.
- Matsumoto, A. (2009) Note on Goodwin's 1951 nonlinear accelerator model with an investment delay. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(4), 832-842.
- Matsumoto, A., Merlone, U., and Szidarovszky, F. (2018) Goodwin accelerator model revisited with fixed time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 58, 233-248.
- Matsumoto, A., Nakayama, K., and Szidarovszky, F. (2018) Goodwin accelerator model revisited with piecewise linear delay investment. *Advances in Pure Mathematics*, 8(2), 178-217.
- Matsumoto, A., and Szidarovszky, F. (2015) Nonlinear multiplier–accelerator model with investment and consumption delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, 33, 1-9.
- McIsaac, F. (2021) Testing Goodwin with a stochastic differential approach—The United States (1948–2019), *Metroeconomica*, 72(4), 696-730.
- Naimzada, A. K., and Pecora, N. (2017) Dynamics of a multiplier–accelerator model with nonlinear investment function. *Nonlinear Dynamics*, 88(2), 1147-1161.

- Puu, T. (1986) Multiplier-accelerator models revisited. *Regional Science and Urban Economics*, 16(1), 81-95.
- Puu, T. (1993) *Nonlinear Economic Dynamics. 3rd edition*, Springer.
- Rosser, J. B. (1991) *From catastrophe to chaos: a general theory of economic discontinuities*. Springer Science and Business Media.
- Rosser Jr, J. B. (2007) The rise and fall of catastrophe theory applications in economics: Was the baby thrown out with the bathwater ?, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(10), 3255-3280.
- Rosser, J. B. (2021) *Foundations and Applications of Complexity Economics*, Springer.
- Ryoo, S. (2010) Long waves and short cycles in a model of endogenous financial fragility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 74(3), 163-186.
- Ryoo, S. (2013) Bank profitability, leverage and financial instability: a Minsky–Harrod model. *Cambridge journal of economics*, 37(5), 1127-1160.
- Sasaki, H. (2013) Cyclical growth in a Goodwin–Kalecki–Marx model. *Journal of Economics*, 108(2), 145-171.
- Shah, A., and Desai, M. (1981) Growth cycles with induced technical change. *The Economic Journal*, 91(364), 1006-1010.
- Sportelli, M. C. (1995) A Kolmogoroff generalized predator-prey model of Goodwin's growth cycle. *Journal of Economics*, 61(1), 35-64.
- Sportelli, M., and De Cesare, L. (2022) A Goodwin type cyclical growth model with two-time delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, 61, 95-102.
- Sturis, J., and Brøns, M. (1995) Chaos and chaotic transients in a forced model of the economic long wave: The role of homoclinic bifurcation to infinity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(03), 741-749.
- Sportelli, M., and De Cesare, L. (2022) A Goodwin type cyclical growth model with two-time delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, 61, 95-102.

- Tavani, D. (2012) Wage bargaining and induced technical change in a linear economy: Model and application to the US (1963–2003). *Structural Change and Economic Dynamics*, 23(2), 117-126.
- Tavani, D. (2013) Bargaining over productivity and wages when technical change is induced: implications for growth, distribution, and employment. *Journal of Economics*, 109(3), 207-244.
- Tavani, D., and Zamparelli, L. (2015) Endogenous technical change, employment and distribution in the Goodwin model of the growth cycle. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 19(2), 209-216.
- Thom, R. (1972) Stabilité structurelle et morphogénèse—Essai d’une théorie générale des modèles. *Reading Mass.*
- van der Ploeg, F. (1987) Growth cycles, induced technical change, and perpetual conflict over the distribution of income. *Journal of Macroeconomics*, 9(1), 1-12.
- Varian, H. R. (1979) Catastrophe theory and the business cycle. *Economic Inquiry*, 17(1), 14-28.
- Woodcock, A. E. R., and Davis, M. (1978) *Catastrophe theory*. Dutton Adult.
- Yoshida, H., and Asada, T. (2007) Dynamic analysis of policy lag in a Keynes–Goodwin model: stability, instability, cycles and chaos. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 62(3), 441-469.
- Yu, Y., Zhao, M., and Zhang, Z. (2017) Novel bursting patterns in a Van der pol-Duffing oscillator with slow varying external force. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 93, 164-174
- Zamparelli, L. (2015) Induced innovation, endogenous technical change and income distribution in a labor - constrained model of classical growth. *Metroeconomica*, 66(2), 243-262.
- Zeeman, E. C. (1974) On the unstable behaviour of stock exchanges. *Journal of mathematical economics*, 1(1), 39-49.

Zhang, W. B. (1991) *Synergetic economics: time and change in nonlinear economics*, Springer Science and Business Media.

Zhang, L., Liu, X., Li, D., and Fu, Z. (2013) Evaluation of the rural informatization level in four Chinese regions: A methodology based on catastrophe theory. *Mathematical and Computer Modelling*, 58(3-4), 868-876.