

## Trident Convection in a Cube

Masato KODAMA\*, Masaki NOBUHARA\*, Takashi NOGUCHI\*\*, Hirochika TANIGAWA\*\*\* and Katsuya HIRATA\*\*

(Received May 23, 2022)

We numerically investigate thermal convection (or Rayleigh-Bénard convection) in cavity (or container), in the terrestrial-gravity and low-gravity fields with and without a sinusoidal modulation. One of essential and relevant cavities is a cube. Thermal convection in a cube is induced by heating from one wall and chilling from its opposite wall. The gravity and its modulation are set parallel to the temperature gradient. An incompressible fluid with Prandtl number  $Pr = 7.1$  (water) is assumed. And, the Boussinesq approximation is used. We have reported a previously-unidentified flow structure in laminar and steady thermal convection, which consists of a pair of trident currents, namely, three ascending streams and three matching descending streams in a cube heated from a bottom wall and chilled from its opposite top wall. This flow is not so weakly-stable but rather durable, and can be observed not only in a stationary cube under the terrestrial gravity, but also in a modulating cube under the terrestrial gravity and low gravity. From a practical point of view, we can expect that this new flow structure is beneficial to control heat/mass transfer and mixing in various aspects.

**Key Words:** Rayleigh-Bénard convection, natural convection, heat/mass transfer, convective stability, POD

**キーワード:** レイリー・ベナール対流, 自然対流, 熱伝達・物質移動, 対流安定性, 固有直行分解

### 立方体内の三叉対流

児玉 理人, 延原 正起, 野口 尚史, 谷川 博哉, 平田 勝哉

#### 1. はじめに

熱対流は熱伝達や物質移動において重要な現象であり, 例えば, 地質学, 気象学, 原子炉の安全面, 製造業など様々な分野において中心課題の一つである。そのため, 熱対流に関して 1900 年の Bénard の実験<sup>1)</sup>に始まり, これまでに多くの研究がなされてきた。これらの分野では, 熱対流の応用により, 物質混合並びに拡散, 熱伝達の向上などが期待できる。

また, 熱対流は地上重力場のみならず微小重力場でも重要な現象である<sup>2-9)</sup>。具体的には, 微小重力環境下では熱対流の低減または発生が抑制されることで高

品質な結晶や複合材料の製造が可能になると期待される。しかし, スペース・ラボや ISS 内において搭載された機械の振動, 宇宙船の軌道修正, 搭乗員の活動などが原因で *g-jitter* と呼ばれる重力変動が生じる。従って船内での製造工程において, このような予期しない重力変動が対流を引き起こすことで熱・物質伝達過程に影響を与え, 宇宙空間で製造された製品の質の低下をもたらす。結晶成長過程でこのことが特に深刻であり, 自然対流の抑制は結晶製造にとって不可欠である。

底面を加熱した立方体は, 熱対流を考えるうえで最

\*Graduate School of Doshisha University, Kyoto

\*\*Department of Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto

\*\*\*Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Maizuru College, Maizuru

Telephone: +81-774-65-6461, FAX: +81-774-65-6830, E-mail:khirata@mail.doshisha.ac.jp

も簡単なモデルの一つである。そのため、過去に多くの研究者がこの立方体容器を扱っている<sup>2-29)</sup>。特に、Pallares et al.<sup>17, 19, 22)</sup>は、低・中程度のレイリー数  $Ra \leq 6.0 \times 10^4$  において、三次元対流の構造を数値計算で調べている。そこでは、七種類の対流構造が示されている。すなわち、単一のロール構造をなすものが四種類 (S1, S2, S3, S7)、四つのロール構造をなすものが二種類 (S5, S6)、トロイダルに近い構造をなすものが一種類 (S4) である。また、Hirata et al.<sup>29)</sup>では二層のトロイダル構造 (S $\beta$ ) が報告されている。

本研究では、Pallares et al.<sup>17, 19, 22)</sup>及びHirata et al.<sup>20-21, 24, 27-29)</sup>と同様に立方体容器内部の熱対流を考える。境界条件は、底面加熱かつ上面冷却かつ側面完全熱伝導とする。容器を加振する場合、振動方向は、温度勾配と平行方向即ち、重力方向に平行とする。加振に関する変数は、振動レイリー数  $Ra_\eta$  及び無次元角振動数  $\omega$  である。内部流体はプラントル数  $Pr = 7.1$  (水) の非圧縮性流体を想定し、 $Ra$ ,  $Ra_\eta$ ,  $\omega$  の値を変化させる。Hirata et al.<sup>29)</sup>同様に地上重力場において容器を加振する場合の  $Ra$  は  $1.0 \times 10^4$  で一定である。支配方程式は、Boussinesq 近似を用いた三次元の Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式である。これらの支配方程式を、有限差分法を用いて解析する<sup>20-21, 24, 27-29)</sup>。

## 2. 計算方法

### 2.1 モデル、支配方程式と数値解析法

Fig. 1 に本研究の解析モデル及び座標系、境界条件を示す。流れ場は、一辺が  $H^*$  の立方体を満たす流体を考え水平横方向に  $x^*$ 、水平奥行き方向に  $y^*$ 、鉛直方向

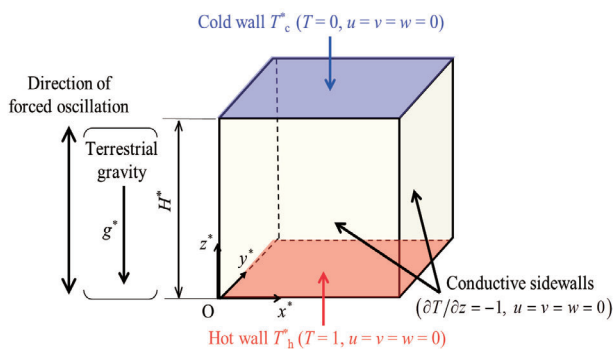


Fig. 1. Computational domain, coordinate system, and boundary conditions.

に  $z^*$  をとる。内部流体は非圧縮性流体を考え、 $Pr=7.1$  (水) とする。加熱面は一様加熱、冷却面は一様冷却とし、一方の温度が他方の温度より高く設定する。以降、それぞれを高温壁と低温壁と呼ぶ。四方の側壁は完全熱伝導とする。容器が振動する場合、温度勾配と平行方向に振動する。

支配方程式は、Boussinesq 近似した無次元 Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式であり、それらを以下に示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + Pr\Delta\mathbf{u} + (Ra + Ra_\eta \sin \omega t) Pr T \mathbf{e}_z. \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \Delta T. \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は速度ベクトル、 $t$  は時間、 $p$  は圧力、 $T$  は温度、 $\mathbf{e}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトル、 $\omega$  は (角) 振動数である。なお、 $Ra_\eta$  と  $Pr$  は、後の 2.2 節で定義する。

計算に一般性を持たせるために、本研究では、独立変数を以下のように無次元化する。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{H^*} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$t = \frac{t^*}{H^{*2} / \alpha^*}. \quad (5)$$

ここで、 $\alpha^*$  は熱拡散率であり、 $H^*$  については後述する。上添字“\*”は有次元量であることを示す。同様に、従属変数は以下のように無次元化する。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{H^*}{\alpha^*} \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix}, \quad T = \frac{T^* - T_c^*}{T_h^* - T_c^*}, \quad p = \frac{p^* H^{*2}}{\rho^* \alpha^{*2}}. \quad (6)$$

ここで、 $T_c^*$  は低温壁温度、 $T_h^*$  は高温壁温度、 $\rho^*$  は平均流体密度である。

### 2.2 支配パラメータ

四つの無次元支配パラメータには、レイリー数  $Ra$  と振動レイリー数  $Ra_\eta$ 、プラントル数  $Pr$ 、無次元角振動数  $\omega$  を用いる。それらの定義を、以下に示す。

$$Ra = \frac{g^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*}. \quad (7)$$

$$Ra_\eta = \frac{\eta^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*}. \quad (8)$$

$$Pr = \frac{\nu^*}{\alpha^*}. \quad (9)$$

$$\omega = \frac{\omega^* H^{*2}}{\alpha^*}. \quad (10)$$

ここで、 $g^*$ は重力加速度、 $\beta^*$ は熱膨張係数、 $\nu^*$ は動粘度、 $\eta^*$ は加速度振幅である。本研究では、内部流体を水 ( $Pr = 7.1$ ) とし、振動レイリー数については  $Ra_\eta = 1.0 \times 10^5$ 、 $1.1 \times 10^5$  で、無次元角振動数については  $\omega = 5$  で、解析を行う。

なお、支配パラメータとして地球重力場のような一定重力下にあるときは  $Ra_\eta$  と  $Pr$ 、 $\omega$  の三つの代わりに、 $Ra$  と  $Pr$ 、 $\omega$ 、無次元加速度振幅  $\eta$  の四つを用いる<sup>24)</sup>。特に無重力時は、 $Ra = 0$  となり、無加振時は、 $\eta = 0$  となる。ここで、 $Ra$  と  $\eta$ 、 $Ra_\eta$  との関係は、

$$Ra \eta = Ra_\eta. \quad (11)$$

である。

従って立方体の一辺の長さ  $H^*$  は次式より計算される。

$$H^* = \left( \frac{\nu^* \alpha^*}{g^* \beta^* (T_h^* - T_c^*)} \right)^{1/3} Ra^{1/3} \quad (12)$$

例えば、20 °C における水を仮定すると、 $\beta^* = 2.06 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  及び  $\alpha^* = 1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $\nu^* = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $g^* = 9.81 \text{ m/s}^2$  であり、 $Ra = 8.0 \times 10^4$  及び  $T_h^* - T_c^* = 5 \text{ K}$  のとき  $H^* = 10.44 \times 10^{-3} \text{ m}$  となる。

### 2.3 境界条件

流速の境界条件は、以下の通りである。

$$u = v = w = 0. \text{ (on all the walls)} \quad (13)$$

圧力の境界条件は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= Pr \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ (at } x = 0 \text{ and } x = 1) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= Pr \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \text{ (at } y = 0 \text{ and } y = 1) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Pr \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (Ra + Ra_\eta \sin \omega t) Pr T. \text{ (at } z = 0 \text{ and } z = 1)$$

温度の境界条件は、以下の通りである。

$$T = 1, \text{ (at } z = 0), \quad T = 0, \text{ (at } z = 1) \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -1 \text{ (at } x = 0, x = 1, y = 0 \text{ and } y = 1) \quad (16)$$

ここで、式(16)は、四つの側壁が完全熱伝導であることを示す。

### 2.4 計算精度

支配方程式(1)–(3)を、MAC法に基づく有限差分法により近似的に解く。差分スキームはFTCSとし、計算格子は等間隔千鳥格子(スタガード格子)を用い、時間刻み幅  $\Delta t$  は  $5.0 \times 10^{-7}$  とする。更に、主計算のいくつかの場合では、 $\Delta t$  が数値精度に及ぼす影響が小さいことを確認する。なお、本研究では、 $t > 20$  で厳密な周期性が確認できたため、 $t > 20$  での結果を常に議論する。

地上重力場無加振定常状態及び加振状態の計算精度については過去の研究(平田ら<sup>24)</sup>、谷川ら<sup>27)</sup>及び Hirata et al.<sup>28)</sup>によって述べられている。また、微小重力場における加振状態の計算精度についても Hirata et al.<sup>8)</sup>によって述べられている。地上重力場並びに微小重力場のいずれの場合も、 $63^3 \leq M^3 \leq 123^3$  において計算格子数の影響が無視できることが確認されているため、本研究では Fig. 1 の条件に加えて計算格子数を  $M^3 = 83^3$  とする。

### 2.5 状態量

流れ場の状態を示す量として、以下の空間平均運動エネルギー  $\bar{K}$  を考える。

$$\bar{K} = \frac{1}{V} \iiint K dx dy dz. \quad (17)$$

ここで、 $K$  は局所運動エネルギーであり、以下の様に定義する。

$$K = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2). \quad (18)$$

また、 $V (= xyz) = 1$  は立方体容器の体積を示す。なお、状態量に  $\bar{K}$  を用いる理由は、ベジヤン数やヌセルト数、空間平均内部エネルギー(または、空間平均温度)などといった状態量よりも有用だからである<sup>20-21, 24, 27-29)</sup>。具体的には、 $\bar{K}$  のスペクトル・ピークが他の状態量よりも明瞭になるためである。

次に熱の出入りを示すために壁面上の任意の点における局所的なヌセルト数  $Nu$  を考える.  $Nu$  は壁面に対して垂直方向の温度勾配によって求めることができる.

本研究では, 底面加熱, 上面冷却で, 側壁四面に関しては完全熱伝導性を前提としている. 従って, 熱の出入りは底面及び上面に加えて側壁四面上でも生じる. よって, 側壁も含めた壁面六面上の各点で, 局所ヌセルト数が正 ( $Nu > 0$ ) となる点のヌセルト数を足し合わせ一面の面積で平均した量  $\overline{Nu}_{\text{influx}}$  に注目した. 具体的には,  $\overline{Nu}_{\text{influx}}$  は, 以下の式で求められる.

$$\overline{Nu}_{\text{influx}} = \frac{\iint_{Nu \geq 0} Nu|_{Nu \geq 0} dA}{H^2}. \quad (19)$$

ここで,  $A$  は容器一面の面積である.  $\overline{Nu}_{\text{influx}}$  は, 無次元の総熱流入を表す.

空間平均運動エネルギー  $\bar{k}$  及び流入平均ヌセルト数  $\overline{Nu}_{\text{influx}}$  は共に時間  $t$  の関数である.

## 2.6 固有直交分解 (POD)

本研究では, 様々な POD 手法の中でも, スナップショット POD<sup>30-37)</sup> と呼ばれる手法を用いる. また, 各瞬間の計算結果を, 流れ場の一枚のスナップショットとみなす. POD 解析は, 一加振周期中で立方体容器内の全空間を対象とする 25-400 枚のスナップショットで行う.

一般に, POD 解析では, まず, 第零番目の POD モードとして平均流速場を考える. POD 解析は, 変動速度成分を対象として計算を行うためである. しかし, 本研究で調査対象とした流れに関しては, 一加振周期毎に少なくとも, ある一定時間は, 至る所で流体が完全に静止する. よって, この手順を省く. 遷移状態にある流れの変動速度成分の POD の適用に注目するため, 平均流速場 (完全静止状態ではなく対流状態を表す) を, 取り除かないのである.

解析対象として, 速度成分 ( $u'_j, v'_j, w'_j$ ) を扱う. ここで,  $u, v, w$  は三つの速度成分を示す. 添え字  $l$  は  $n$  枚のスナップショットのうちの  $l$  番目であることを示す. 同様に, 添え字  $j$  は, 与えられたスナップショットにおいて  $M^3$  個ある流速ベクトルの  $j$  番目であることを示す. (例えば,  $u_j = u(x_j, y_j, z_j)$ ). ここで,  $M$  は格

子数である.  $n$  枚のスナップショットにおけるすべての変動速度成分は, 以下の行列  $\mathbf{X}$  のように配置する.

$$\mathbf{X} = [\chi(t_1), \chi(t_2), \dots, \chi(t_n)]$$

$$= [\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n] = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{M^3}^1 & u_{M^3}^2 & \dots & u_{M^3}^n \\ v_1^1 & v_1^2 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{M^3}^1 & v_{M^3}^2 & \dots & v_{M^3}^n \\ w_1^1 & w_1^2 & \dots & w_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{M^3}^1 & w_{M^3}^2 & \dots & w_{M^3}^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (20)$$

ここで,  $m = 3 \times M^3$  である.

実際には, 時間あるいは空間の不均一を考慮して,  $\mathbf{X}$  に重み  $c^q$  ( $q = 1, 2, \dots, n$ ) を導入する. この時, 式(20)は,

$$\mathbf{X} = [\sqrt{c^1} \chi(t_1), \sqrt{c^2} \chi(t_2), \dots, \sqrt{c^n} \chi(t_n)] \quad (21)$$

となる. もっとも, 本研究では, 一連のスナップショットを等時間間隔とし, かつ, 空間メッシュも均一としているため重みは考慮しない.

式(20)より, 以下の式を得る.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b}^q = \lambda^q \mathbf{b}^q, \mathbf{b}^q \in \mathbb{R}^m, n \ll m. \quad (22)$$

式(22)の固有値を, 以下の様に, 値の大きな順に並べ替える.

$$\lambda^1 > \lambda^2 > \dots > \lambda^n = 0. \quad (23)$$

式(22)の固有ベクトル  $\mathbf{b}^l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) は, 以下の様に POD モード  $\boldsymbol{\phi}^l$  を構成する基底の一つなので,

$$\boldsymbol{\phi}^l = \frac{\sum_{j=1}^n b_j^l \chi^j}{\left\| \sum_{j=1}^n b_j^l \chi^j \right\|} \in \mathbb{R}^m, l = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

ここで,  $b_j^l$  は, 式(22) の固有値  $\lambda^l$  に対応する固有ベクトルの  $j$  番目の要素である. また, ‘ $\| \cdot \|$ ’ は自乗和の平方根を示す. それぞれのスナップショットは, POD モード  $l$  に対する展開係数  $a_l$  を持つ一連の POD モードに展開できる.  $a_l$  は, POD 係数とも呼ばれる. 以下に示す様に, POD モード上に速度場の変動部分を投影することで, 次式を得る.

$$\mathbf{a}^l = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\chi}^l \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

ここで,  $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\phi}^1, \boldsymbol{\phi}^2, \dots, \boldsymbol{\phi}^n]$  である. 以上から, スナップショット  $l$  の変動部分の展開式は, 以下の式となる.

$$\chi^l = \sum_{j=1}^n a_j^l \phi^j = \Psi \mathbf{a}^l \in \mathbb{R}^m. \quad (26)$$

速度変動成分の総運動エネルギーの中で、ある一つの POD モードに関する部分は、その POD モードに対応する固有値に比例する<sup>30)</sup>。それゆえ、式(23)の様に並べ替えた固有値と固有ベクトルを考える限り、エネルギーの観点から最も影響力のあるモードはいくつかの POD モードのみとなる。このことは、いくつかの POD モードのみが大規模流れ構造に関する可能性を示唆する。従って、もし支配的な流れ構造が存在するなら、これらの流れ構造はいくつかの POD モードによく反映されており、よって、与えられたスナップショットは少数の POD モードのみを用いることで充分再構成できる。

### 3. 結果と考察

#### 3.1 既知の対流構造

まず初めに、これまでに報告されている  $Ra \leq 1.2 \times 10^5$  での立方体の流れ構造を要約し、Table 1 に示す。対流構造 S1-S7 は Pallares et al.<sup>17, 19)</sup> によって定義されたもので、S $\beta$ は Hirata et al.<sup>29)</sup> によって報告された対流構造である。表中の容器中央平面 ( $z = 0.5$ ) における図の灰色部は上昇流 ( $z$  方向) を示し、白色部は下降流 ( $-z$  方向) を示す。鎖線は流れ構造の回転軸を示し、薄い実線は垂直な ( $z$  方向) 対称面を表す。対称関係から回転軸、そして上昇下降域は立方体容器の垂直な対称軸に関してそれぞれ Table 1 の図から  $\pi/2$  または  $\pi, 3\pi/2$  だけ回転した図も取り得る。S1 は対流の回転軸が、側面壁に対して垂直な方向を持つ一つのロール構造である。S2 は対流の回転軸が、向かい合う二辺の対角に対して垂直な方向を持つ一つのロール構造である。つまり、S2 は S1 と同様な単一ロール構造であるが、S1 を容器中心垂直軸に関して  $45^\circ$  回転したものである。S3 は S1 と同様な一つのロール構造であるが、ミッドプレーンでの上昇流及び下降流が二又となっているものである。S4 はトロイダルな構造を持ち、初期条件によって、中心上昇流かつ周辺下降流の構造若しくは中心下降流かつ周辺上昇流の構造のどちらか一つが現れる<sup>7)</sup>。S5 は四つの主要な流れが支配的な流れと二つの対称的なトーラスによって特徴付けられ

る構造である。四つの主要な流れのうち、二つは、容器の向かい合う対角の辺に沿う上昇流、残りの二つは、もう一組の向かい合う対角の辺に沿う下降流となる。Pallares et al.<sup>17, 19)</sup> によって、S5 は、四つのロールを持つ構造であると報告されている。S6 は S5 を垂直軸中心に  $45^\circ$  回転させた形の構造である。すなわち、四つの主要な流れのうち、四つは、ある垂直中心断面上に沿う対称的な上昇流、残りの四つは、他の一つの垂直中心断面上で対称的な下降流である。この S5 と S6 の関係は、S2 と S1 の関係と同様であると説明できる。S7 は S1 と同様な一つのロール構造であるが、ミッドプレーンでの上昇流若しくは下降流のどちらか一方が二又であり、他方が一つとなっているものである。S $\beta$ はトロイダルな構造を持ち、 $z$  軸に対して上半分と下半分で上昇流と下降流が入れ替わるダブルデッカー構造である。

#### 3.2 対流構造 S $\alpha$

Fig. 2 は、 $Ra = 8.0 \times 10^4, Pr = 7.1$  での立方体容器内に生じる流れについての俯瞰図である。この図では運動エネルギーについて  $0.38 \times K_{\max}$  での等値面を可視化している。なお、ここでいう  $K_{\max}$  は運動エネルギー  $K$  の最大値である。表面の明暗は  $w$  を表しており図の右下

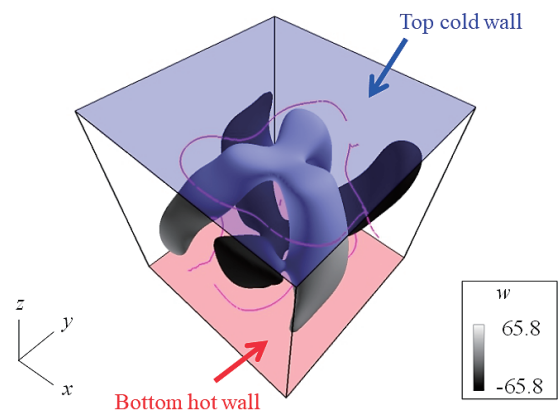


Fig. 2. Perspective view (look-down view) of the flow structure visualised by iso-kinetic-energy surfaces of  $0.38 \times K_{\max}$  for  $Ra = 8.0 \times 10^4$  and  $Pr = 7.1$ . The value of  $w$  is represented by gray scale. Pink dots denote the vortex core<sup>38, 39)</sup>.

Table 1. Definitions of flow structures S1 – S7 and S $\beta$ . The S1–S7 are according to Pallares et al. <sup>17, 19, 22</sup>). The S $\beta$  was found by Hirata et al. <sup>29</sup>). Gray zones of schematic diagrams represent ascending ( $z$ -ward) fluid, and white zones represent descending ( $-z$ -ward) fluid. Chained lines in the schematic diagrams denote the roll axes of flow structures, and solid thin lines denote vertical ( $z$ -ward) symmetry planes. Owing to symmetry, it should be noted that the roll axes, the symmetry elements and the ascending and descending regions shown in these schematic diagrams can be rotated by  $\pi/2$ ,  $\pi$  or  $3\pi/2$  with respect to the vertical centre axis of the cube. All the structures have symmetry under the reversal of flow velocity.



| Flow Structure   | Definitions  | Schematic diagram on the midplane (at $z = 0.5$ )  |
|--|--|--|
| S1 (including S3 and S7 with twisted axis of rotation) | A single roll. (For the difference among the S1, S3 and S7, we have to consider the hysteresis of $Nu$ with increasing $Ra$ . See Pallares et al. <sup>22</sup> .) |  |
| S2   | A single diagonally-oriented roll.   |  |
| S4   | A nearly-toroidal roll.  |  |
| S5   | Four rolls. Each one is with its axis perpendicular to one sidewall.   |  |
| S6   | Four rolls. Each one is with its axis perpendicular to one vertical ( $z$ -ward) edge.   |  |
| Hirata et al. (2013b) (S $\beta$ )                     | Double-decker nearly-toroidal rolls.   |  <br>On the upper-quarter plane (at $z = 0.75$ )      On the lower-quarter plane (at $z = 0.25$ ) |

Table 2. Definition of flow structure S $\alpha$ .

| Flow Structure            | Definition | Schematic diagram on the midplane (at $z = 0.5$ ) |
|---------------------------|------------|---|
| The present (S $\alpha$ ) | Six rolls. |   |

部に凡例を示した。また、桃色の点線は渦中心を示す<sup>38, 39)</sup>。なお、 $K$ に基づいた流体の可視化は層流の三次元構造で特徴をつかむという点において、他のどの状態量（流れベクトル、温度、渦度、速度勾配テンソルの第二不変量）よりも最適である<sup>17)</sup>（このフロー構造とよく似た構造は Puigjaner et al. <sup>40)</sup>に確認されるが、S2 と S $\alpha$ の両方を同じフロー構造 B2 に分類している）。

Fig. 3 は Fig. 2 と同じ解析結果について表したものであり、立方体容器のミッドプレーン( $z = 0.5$ )につい

て流速の  $w$  方向要素の等値線を示している。等値線の色は  $w$  を示しており図の右下部に凡例を示した。Fig. 2, Fig. 3 から三つの上昇流及び対応する三つの下降流から成る三叉フォーク状流れのペアが確認できる。立方体におけるこのタイプの三叉対流は今日まで報告されていない。過去の研究<sup>17, 18)</sup>では  $Ra = 8.0 \times 10^4$  かつ  $Pr = 7.1$  のとき、著者らは二つの上昇流と二つの下降流に代表される流れ S5 (Table 1 参照) を想定していた。実際、 $Ra$  を 0 からゆっくり上昇させる場合また

は  $Ra$  を十分大きい値からゆっくり減少させる場合には S5 が確認できた。しかし、この初期値依存は必ずしも三又構造の弱安定を意味するものではない。このことを示す例を Fig. 4 を示す。Fig. 4 は  $Ra = 8.0 \times 10^4$ ,  $Pr = 7.1$  において  $\bar{K}$  の時間発展を表している。解析では定常解である S2 ( $Ra = 1.0 \times 10^4$  かつ  $\bar{K} = 20.3$ ) を初期値として用いており、前述した S5 や熱伝導状態を初期値として用いていない。Fig. 4 から単一ロール構造である S2 構造が支配的となる初期の遷移過程を経て、 $t > 0.06$  の範囲で三又の対流構造  $S\alpha$  が安定かつ恒久に

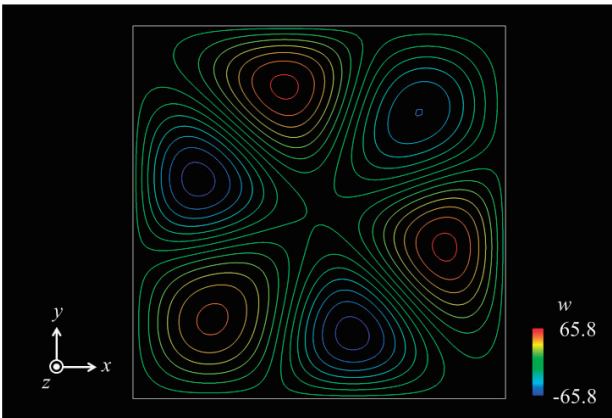


Fig. 3. Contours of vertical component  $w$  in the horizontal midplane for  $Ra = 8.0 \times 10^4$  and  $Pr = 7.1$ . The value of  $w$  is represented by colour scale.

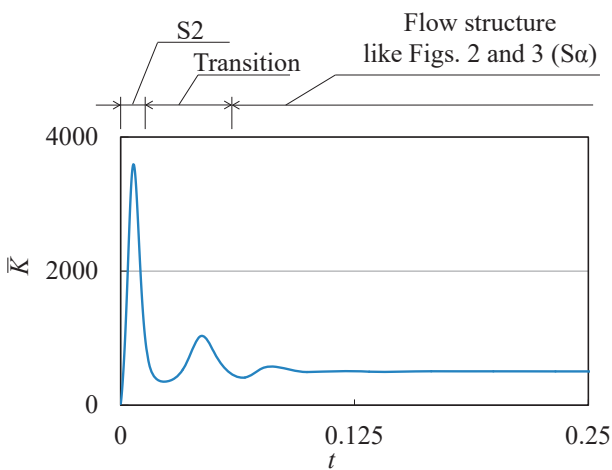


Fig. 4. Time development of  $\bar{K}$  for  $Ra = 8.0 \times 10^4$  and  $Pr = 7.1$ . Before  $t = 0$ , the system was kept for  $Ra = 1.0 \times 10^4$ ,  $Pr = 7.1$  to bring to a steady state with S2 and  $\bar{K} = 20.3$  and then  $Ra$  was instantly increased up to  $8.0 \times 10^4$ .

確認できる。Table 1 と同様に  $S\alpha$  の定義を Table 2 に示す。

すべての計算を同じ初期値で開始した場合、対流構造は  $Ra$  の関数として表せる。具体的な例を Fig. 5 に示す。Fig. 5 は  $Ra = 1.0 \times 10^4 - 1.0 \times 10^5$  における重力場無加振状態 ( $Ra > 0, Ra_\eta = 0, \omega = 0$ ) での同じ初期条件で計算した結果を対流構造毎にまとめたものである。このときの初期条件はいずれの点においても流速、圧力、温度すべてが 0 の完全静止状態 (CSS 条件) である。

Fig. 5 では横軸に  $Ra$ 、縦軸に  $\bar{Nu}_{influx}$  を取り、各  $Ra$  に対応する対流構造を示す。確認された結果は定常解を持ち、対流構造は一意的に決定できる。

Fig. 5 から  $Ra = 1.0 \times 10^4 - 1.5 \times 10^4$  では S2,  $Ra = 2.0 \times 10^4 - 2.5 \times 10^4$  では S1,  $Ra = 4.0 \times 10^4 - 5.0 \times 10^4$  では S3,  $Ra = 5.5 \times 10^4 - 7.0 \times 10^4$  では S5,  $Ra = 7.5 \times 10^4 - 8.5 \times 10^4$  では  $S\alpha$ ,  $Ra = 9.0 \times 10^4 - 1.0 \times 10^5$  では S6 が確認できる。S1 と S3 との間及び S5 と S6 との間ではそれらの中間体がそれぞれ見られた。また、臨界レイリー数  $Ra_c$  以下では立方体容器内は熱伝導状態となる。底面加熱及び上面冷却での立方体容器内熱対流に関する  $Ra_c$  は Puigjaner et al.<sup>40)</sup> によれば  $Ra_c = 6,799$  であり、Fig. 5 に実線で示す。

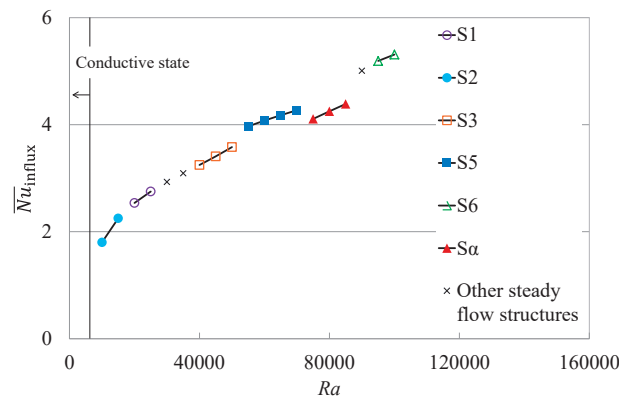


Fig. 5. Influx-averaged Nusselt number  $\bar{Nu}_{influx}$  together with corresponding flow structures for  $Ra \leq 1.0 \times 10^5$  and  $Pr = 7.1$  as a function of  $Ra$ , in such as an initial condition as a completely-stationary state CSS. A black solid line denotes to be the border of a conductive state (Puigjaner et al.<sup>40)</sup>).

Table 3. Test cases and their parameters.

|         | $Ra \left( \equiv \frac{g^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*} \right)$ | $Ra_\eta \left( \equiv \frac{\eta^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*} \right)$ | $Pr$ | $\omega \left( \equiv \frac{\omega^* H^{*2}}{\alpha^*} \right)$ |
|---------|--|--|------|---|
| Case I  | $1.0 \times 10^4$<br>(under the terrestrial gravity)                                 | $1.0 \times 10^5$  | 7.1  | $5.0 \times 10^0$   |
| Case II | 0<br>(under zero gravity)  | $1.1 \times 10^5$  | 7.1  | $5.0 \times 10^0$   |

### 3.3 重力場強制加振状態及び無重力場強制加振状態

#### 3.3.1 空間平均運動エネルギー $\bar{K}$ と流入平均ヌセルト数 $\bar{Nu}_{influx}$

重力場強制加振状態及び無重力場強制加振状態について、本研究では二つのテストケースを調べる。Table 3 にこれらのテストケースについて、支配パラメータと共に示す。

Fig. 6 (a) に、地上重力場加振状態 (Case I) の一例を示す。より詳しく述べると、図中の青線は  $Ra = 1.0 \times 10^4$  及び  $Pr = 7.1$  における  $Ra_\eta = 1.0 \times 10^5$  及び  $\omega = 5$  の温度勾配に平行な重力変動下での  $\bar{K}$  の時間発展を示す。赤線は、 $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  を示す。また、Fig. 6 (b) に、微小重力場加振状態 (Case II) の一例を示す。より詳しく述べると、図中の青線は  $Ra = 0$  及び  $Pr = 7.1$  における  $Ra_\eta = 1.1 \times 10^5$  及び  $\omega = 5$  の温度勾配に平行な重力変動下での  $\bar{K}$  の時間発展を示す。赤線は、 $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  を示す。

両方の例において、 $t < 2\pi/\omega$  でみられる初期の計算開始期間を除いて厳密な周期性を有する変動を表す。従って、以降では各図の  $t \in [4\pi/\omega, 6\pi/\omega]$  での三番目の周期のみを考える。周期毎に  $\bar{K} = 0$  となる (熱伝導状態) 時間間隔が存在する。また、対流は各周期で常に S4 から始まる。Fig. 6 (a) での  $t \in [(4\pi+1.01)/\omega, (4\pi+2.07)/\omega]$  及び Fig. 6 (b) での  $t \in [(4\pi+1.49)/\omega, (4\pi+2.95)/\omega]$  において S2, S4, S5 等の他の対流構造と共に  $S\alpha$  が確認された。どちらの例でも  $S\alpha$  は一周期中において非常に長い間  $\bar{K}$  の値が大きい。

Fig. 7 (a) に地上重力場加振状態 (Case I) の一例を示す。より詳しく述べると、図中の青線は  $Ra = 1.0 \times 10^4$  及び  $Pr = 7.1$  における  $Ra_\eta = 1.0 \times 10^5$  及び  $\omega = 5$  の温度勾配に平行な重力変動下での  $\bar{Nu}_{influx}$  の時間発展を示す。赤線は、 $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  を示す。また、Fig. 7 (b) に、

微小重力場加振状態 (Case II) の一例を示す。より詳しく述べると、図中の青線は  $Ra = 0$  及び  $Pr = 7.1$  における  $Ra_\eta = 1.1 \times 10^5$  及び  $\omega = 5$  の温度勾配に平行な重力変動下での  $\bar{Nu}_{influx}$  の時間発展を示す。赤線は、 $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  を示す。各図の青い破線は  $\bar{Nu}_{influx} = 1.0$  を示し、対流のない純粋な熱伝導状態を示す。両方の例において、 $t < 2\pi/\omega$  でみられる初期の計算開始期間を除いて厳密な周期性を有する変動を表す。各周期で高周波の非周期変動が観察される。これは、S2 及び S4 の対流構造の発生に対応する。どちらの例においても、 $\bar{K} = 0$  となる様な各周期の後半の時間間隔は、 $\bar{Nu}_{influx}$  が 1 に等しい時間間隔とよく一致する。これはどちらも対流のない純粋な熱伝導状態を示す。 $\bar{Nu}_{influx}$  の時間発展は  $\bar{K}$  の時間発展と一致しており、 $\bar{Nu}_{influx}$  と  $\bar{K}$  が  $Ra$  の変化に応答することを確認した。 $S\alpha$  の出現時間において、S4 や S2 の場合とは対照的に波形に高周波の非周期変動がないことが注目される。従って、 $S\alpha$  は  $\bar{Nu}_{influx}$  の値を抑制する効果があることを示唆している。

#### 3.3.2 固有直行分解 (POD)

##### 3.3.2.1 固有値

$S\alpha$  の安定性を定量的に評価するために Case I 及び Case II について POD 解析を行った。ここで、Case I 及び Case II は 3.3.1 節で示した解析条件のことであり、それぞれ地上重力場中での加振定常状態 ( $Ra = 1.0 \times 10^4$ ,  $Pr = 7.1$ ,  $Ra_\eta = 1.0 \times 10^5$  かつ  $\omega = 5$ )、微小重力場での加振定常状態 ( $Ra = 0$ ,  $Pr = 7.1$ ,  $Ra_\eta = 1.1 \times 10^5$  かつ  $\omega = 5$ ) に対応している。過去の研究結果<sup>28)</sup>より、スナップショット数は  $n \geq 50$  で充分と見做せそうであるので、本研究の POD 解析では  $n = 100$  で解析を行う。

Fig. 8 は、縦軸を固有値  $\lambda^k$  とし、横軸をモード数  $k$  と



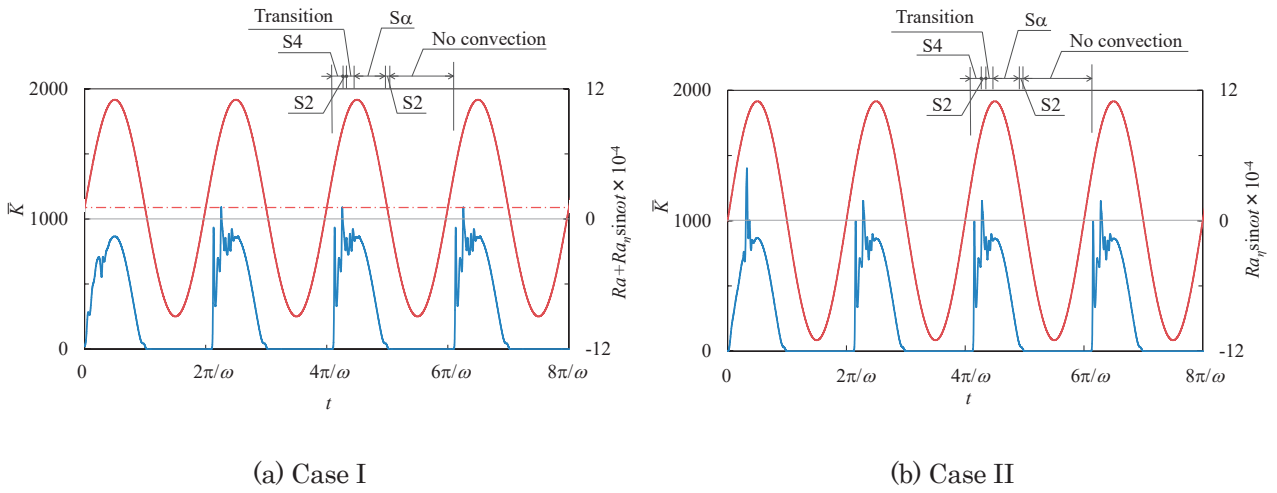


Fig. 6. Time development of  $\bar{K}$ , together with  $Ra+Ra_\eta\sin\omega t$  in figure (a) and  $Ra_\eta\sin\omega t$  in figure (b). In each figure, a blue line denotes  $\bar{K}$ , and a red line denotes  $Ra+Ra_\eta\sin\omega t$  or  $Ra_\eta\sin\omega t$ . The chained red line in figure (a) denotes  $Ra = 1.0 \times 10^4$ .

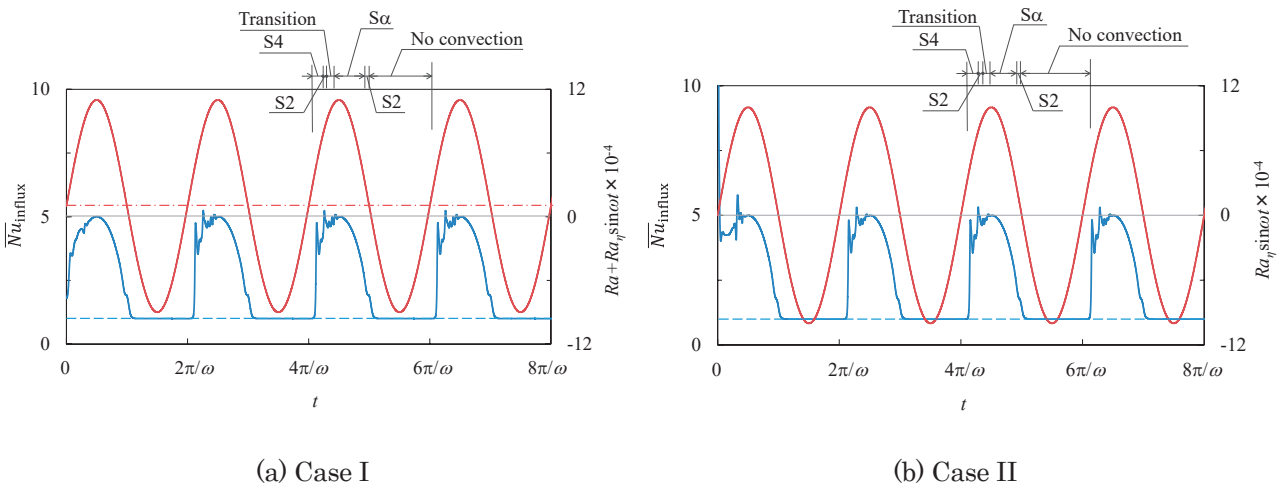


Fig. 7. Time development of  $\bar{Nu}_{influx}$ , together with  $Ra+Ra_\eta\sin\omega t$  in figure (a) and  $Ra_\eta\sin\omega t$  in figure (b). In each figure, a blue line denotes  $\bar{Nu}_{influx}$ , and a red line denotes  $Ra+Ra_\eta\sin\omega t$  or  $Ra_\eta\sin\omega t$ . The chained red line in figure (a) denotes  $Ra = 1.0 \times 10^4$ . A dashed blue line in each figure is at  $\bar{Nu}_{influx} = 1.0$ , which represents the state of purely conduction with no convection.

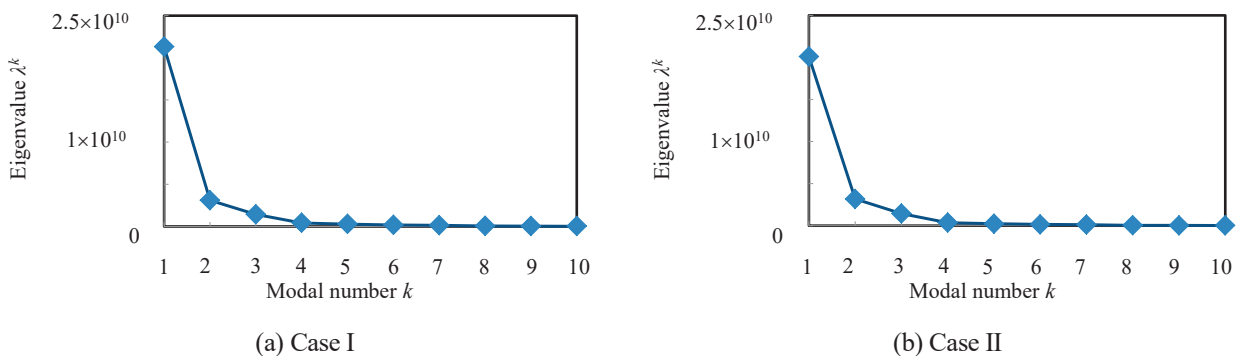


Fig. 8. Eigenvalues of the first 10 POD modes (at  $n = 100$ ).

Table 4. Normalised eigenvalues  $\lambda^k / \sum_{i=1}^n \lambda^i$  of the first 5 POD modes (for  $n = 100$ ).

| Modal number $k$ | 1      | 2      | 3     | 4     | 5     |
|------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| Case I           | 80.41% | 11.67% | 5.36% | 1.56% | 1.01% |
| Case II          | 75.86% | 11.95% | 5.41% | 1.33% | 0.83% |

して、十個の POD モードについて示す。図の (a)と(b) はそれぞれ、Case I と Case II を示す。Table 4 は、Fig. 8 の結果の内、POD モードの一番目から五番目までについて固有値の値を定量的に示す。

Fig. 8 から Case I では、 $\lambda^k$  の値について一番目から三番目までの POD モードのみが卓越 (5%以上) することが分かる。これは対流構造と一番目から三番目までの POD モードの空間構造とが関連付けられることから説明できる (3.3.2.2 節で後述)。同様に、Case II でも、 $\lambda^k$  の値について一番目から三番目までの POD モードのみが卓越することが分かる。定量的観点からは、正規化された固有値において、支配的な POD モードは概ね5%以上に該当することが Table 4 から分かる。ただし、すべての解析条件において、一番目の POD モードの固有値は、他の POD モードの固有値よりも明らかに大きい値を示す。

### 3.3.2.2 POD モード

本節では主な POD モードの空間構造について、考える。Fig. 9 と 10 は、それぞれ Case I と Case II の POD モードを示す。(a), (b), (c) 並びに (d) はそれぞれ、一番目、二番目、三番目並びに四番目の POD モードを示している。これらの POD モードは、 $z=0.25, 0.5$  及び  $0.75$  の三つの平面上で、速度ベクトルの  $z$  方向成分  $w$  の固有関数の俯瞰図として可視化されている。さらに、各図の右上には、POD モードの等運動エネルギー面による可視化を示す。平面上の色と等運動エネルギー面上の色は、 $w$  の値に対応し、その値を各図の右下に凡例として示す。

Fig. 9 と 10 に示す POD モードの空間構造は、地上重力場かつ無加振状態で現れる対流構造とよく似ている。Table 1 及び Table 2 より、Case I での Mode 1

(Fig. 9 (a)) 及び Case II での Mode 1 (Fig. 10 (a)) は  $S\alpha$  に似た形である。同様に、Case I での Mode 2 (Fig. 9 (b)) 及び Case II での Mode 2 (Fig. 10 (b)) は  $S2$  に似た形である。Case I での Mode 3 (Fig. 9 (c)) 及び Case II での Mode 3 (Fig. 10 (c)) は  $S4$  に似た形である。よって、以降、以上の類似した POD モードを、Pseudo- $S\alpha$  あるいは Pseudo- $S2$ , Pseudo- $S4$  と呼ぶ。

### 3.3.2.3 対流構造の時間変化

POD 係数  $a$  の意味を考えるためには、 $\bar{k}$  に直接関係する  $a^2$  を用いるのが便利である (式(25)参照)。Fig. 11 に、最初の四番目までの POD モードに対する  $a^2$  を、横軸を無次元時間  $\omega t$  として一加振周期分だけ示す。また、Fig. 12 に、Fig. 6 で示した  $\bar{k}$  の時間発展において  $t = 4\pi/\omega$  から一加振周期分だけを拡大した図を示す。なお、横軸は Fig. 11 との比較のために無次元時間  $\omega t$  とする。まず、Fig. 11 と Fig. 12 を比較する。Case I と Case II の両方で四番目までの  $a^2$  の合計値の波形は  $\bar{k}$  の波形 (Fig. 12) によく似ている。次に、 $\bar{k}$  の波形の円でマークされたピークに着目すると、 $a^2$  における Mode 3 のピークに対応していることがわかる。同様に、 $\bar{k}$  の波形の三角でマークされたピークに着目すると、 $a^2$  における Mode 2 のピークに対応している。最後に、Fig. 11 の  $\omega t \in [0.4\pi, \pi]$  及び Fig. 12 の  $\omega t \in [4\pi+0.4\pi, 4\pi+\pi]$  に示される“安定した”区間では、Mode 1 (Pseudo- $S\alpha$ ) に対応する  $a_1^2$  のみが  $\bar{k}$  に対応していることがわかる。

Table 4 より、Case I 及び Case II のそれぞれで Mode 1 (Pseudo- $S\alpha$ ) の POD 係数が 80% 及び 76% と支配的であり、安定していることがわかる。これらの Mode 1 (Pseudo- $S\alpha$ ) の安定性は、 $S\alpha$  が他の POD モードと比較して安定していることを示している。

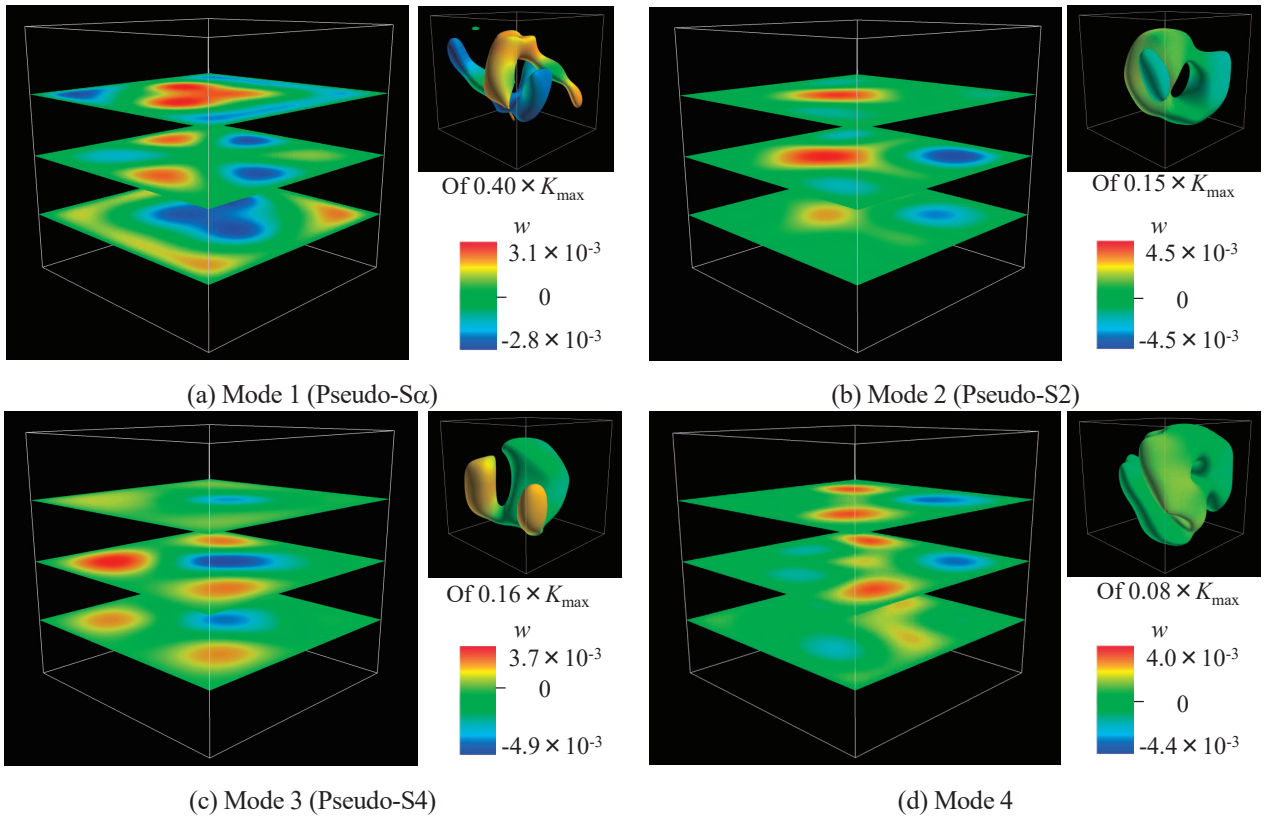


Fig. 9. The first four POD modes in Case I; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ .

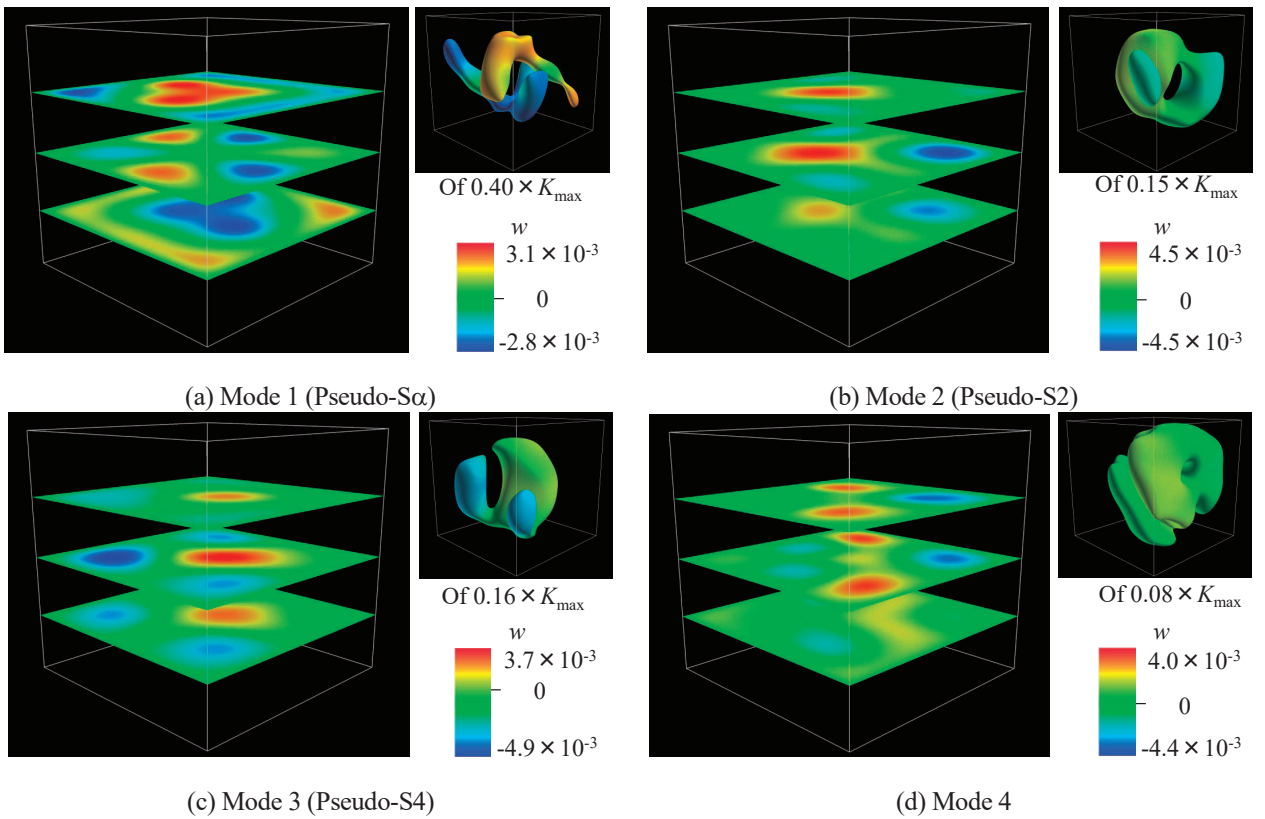


Fig. 10. The first four POD modes in Case II; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ .

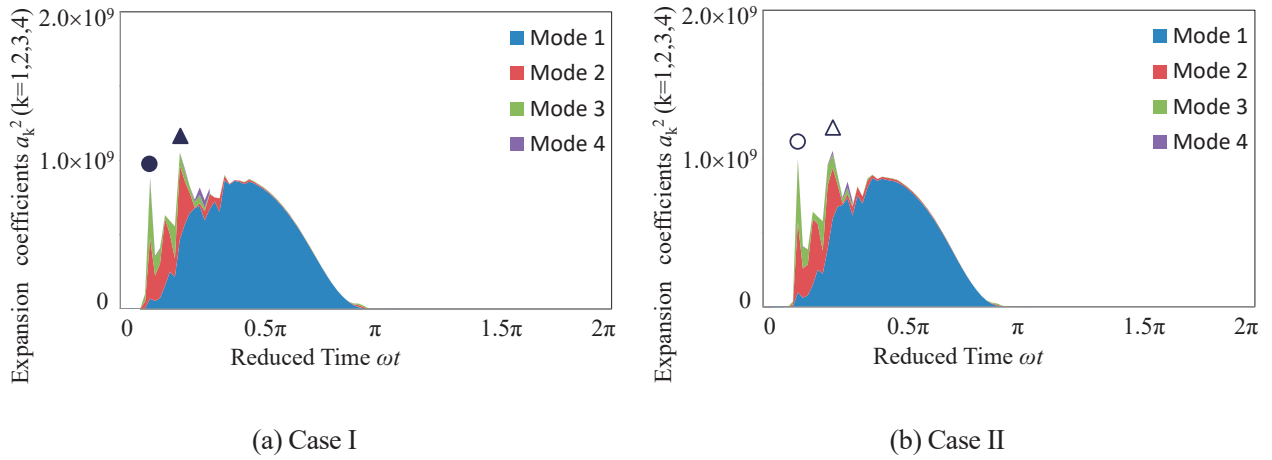


Fig. 11. Stacked area plot of square of expansion coefficient of the first four POD modes (at  $n = 100$ ).

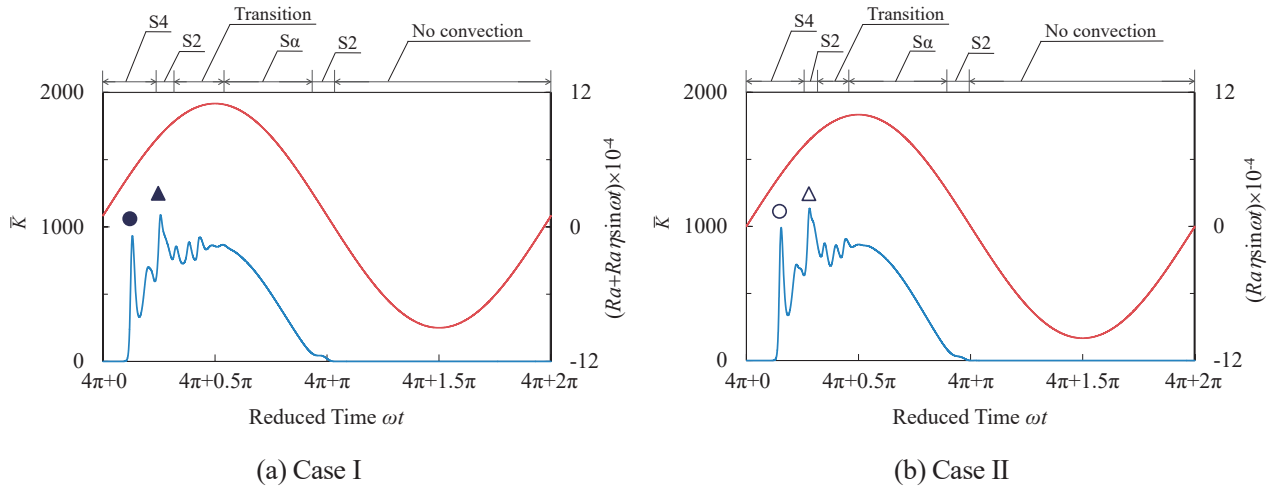


Fig. 12. Close-up view of Fig. 6: time development of  $\bar{K}$ , together with  $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  in figure (a) and  $Ra_\eta \sin \omega t$  in figure (b). In each figure, a blue line denotes  $\bar{K}$ , and a red line denotes  $Ra + Ra_\eta \sin \omega t$  or  $Ra_\eta \sin \omega t$ . A chained red line in figure (a) is at  $Ra = 1.0 \times 10^4$ .

#### 4. 結言

本研究では、変動重力下における立方体容器内の熱対流について報告した。様々な対流構造の中で、一對の三叉対流を示した。これまで未解明だったこの対流構造は、一時的に現れるものではなく安定しており、地上重力場無加振定常状態、微小重力場/地上重力場での強制加振状態での立方体容器内で観察された。POD解析より、ある条件下で  $S\alpha$  の固有値及び POD 係数  $a$  が他の対流構造のものよりも支配的であり、 $S\alpha$  が安定した構造であることを定量的に示した。これらの結果より、非常に単純な境界条件の立方体容器内流れの定常状態における、三次元 Rayleigh-Bénard 対流の多様性が示された。このような多様性から、 $Ra \geq 2.5 \times 10^5$  においては、より複雑なカオス挙動が期待されるが、本研究では範囲外とする。

同志社大学山田貴太氏及び衣川竜世氏の技術的支援を受けた。ここに記して謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) M. H. Bénard, “Étude Expérimentale des Courants de Convection dans une Nappe Liquide. – Régime Permanent: Tourbillons Cellulaires”, *J. de Phys.*, 3<sup>e</sup> Série, 513–524 (1900).
- 2) Y. Kamotani, A. Prasad and S. Ostrach, “Thermal Convection in an Enclosure due to Vibrations Aboard Spacecraft”, *AIAA Journal*, **19**, 511–516 (1981).
- 3) G.Z. Gershuni and D.V. Lyubimov, *Thermal Vibrational Convection*, (Wiley & Sons Ltd, Germany, 1998).
- 4) K. Hirata, T. Sasaki and H. Tanigawa, “Vibrational Effects on Convection in a Square Cavity at Zero Gravity”, *J. Fluid Mech.*, **445**, 327–344 (2001).
- 5) A. Mialdun, I.I. Ryzhkov, D.E. Melnikov and V. Shevtsova, “Experimental Evidence of Thermal Vibrational Convection in a Nonuniformly Heated Fluid in a Reduced Gravity Environment”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 084501 (2008).
- 6) G. Z. Gershuni and Y. M. Zhukhovitskiy, “Vibrational-induced Thermal Convection in Weightlessness”, *Fluid Mech. – Sov. Res.*, **15**, 63–84 (1986).
- 7) D. E. Melnikov, I. I. Ryzhkov, A. Mialdun and V. Shevtsova, “Experimental Evidence of Thermal Vibrational Convection in a Nonuniformly Heated Fluid in a Reduced Gravity Environment”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 84501.1–84501.4 (2008).
- 8) K. Hirata, K. Tatsumoto, M. Nobuhara and H. Tanigawa, “On G-jitter Effects on Three-dimensional Laminar Thermal Convection in Low Gravity”, *Mech. Eng. J.*, **2** (5), 15–00268 (2015).
- 9) V. Shevtsova, Y. A. Gaponenko, V. Sechenyh, D. E. Melnikov, T. Lyubimova and A. Mialdun “Dynamics of a Binary Mixture Subjected to a Temperature Gradient and Oscillatory Forcing”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 767 (2015), pp. 290–322.
- 10) S. H. Davis, “Convection in a Box: Linear Theory”, *J. Fluid Mech.*, **30**, 465–478 (1967).
- 11) P. M. Gresho and R. L. Sani, “The Effect of Gravity Modulation on the Stability of a Heated Fluid Layer”. *J. Fluid Mech.*, **40**, 783–806 (1970).
- 12) K. Stork and U. Müller, “Convection in a Box: Experiments”, *J. Fluid Mech.*, **54**, 599–611 (1972).
- 13) S. Biringen and L. J. Peltier, “Numerical Simulation of 3-D Bénard Convection with Gravitational Modulation”, *Phys of Fluids*, **2**, 754–764 (1990).
- 14) M. P. Arroyo and J. M. Saviron, “Rayleigh-Bénard Convection in a Small Box: Spacial Features and Thermal Dependence of the Velocity Field”. *J. Fluid Mech.*, **235**, 325–348 (1992).
- 15) W. S. Fu and W. J. Shieh, “A Study of Thermal Convection in an Enclosure Induced Simultaneously by Gravity and Vibration”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**, 1695–1710 (1992).
- 16) R. J. A. Janssen, R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, “Transition to Time-periodicity of a Natural-convection Flow in a 3D Differentially Heated Cavity”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **36**, 2927–2940 (1993).
- 17) J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau and F. Giralt, “Natural Convection in a Cubical Cavity Heated from Below at Low Rayleigh Numbers”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **39**, 3233–3247 (1996).
- 18) P.C. Matthews, A.M. Rucklidge, N.O. Weiss and M.R.E. Proctor, “The Three-dimensional Development of the Shearing Instability of Convection”, *Phys of Fluids*, **8**, 1350–1352 (1996).
- 19) J. Pallares, F. X. Grau and F. Giralt, “Flow Transitions in Laminar Rayleigh-Benard Convection in a Cubic Cavity at Moderate Rayleigh Numbers”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **42**, 753–769 (1999).
- 20) 宮西貴子, 平田勝哉, 谷川博哉, “重力振動場における円筒容器内自然対流に関する数値解析”, 日本機械学会論文集 B 編, **65** [637], 118–125 (1999).
- 21) 谷川博哉, 宮西貴子, 平田勝哉, “重力振動場にお

- ける二次元正方容器内自然対流に関する数値解析”, 日本機械学会論文集 B 編, **66** [759], 1053–1060 (2000).
- 22) J. Pallares, I. Cuesta and F. X. Grau, “Laminar and Turbulent Rayleigh-Bénard Convection in a Perfectly Conducting Cubical Cavity”, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **23**, 346–358 (2002).
- 23) B.A.V. Bennett and J. Hsueh, “Natural Convection in a Cubic Cavity: Implicit Numerical Solution of Two Benchmark Problems”, *Numer. Heat Transf.*, **50**, 99–123 (2006).
- 24) 平田勝哉, 伯井涼子, 石原健太郎, 谷川博哉, 舟木治郎, “底面加熱立方体における流体の周波数応答”, 日本機械学会論文集 B 編, **72** [714], 279–284 (2006).
- 25) R. Hernandez and R. L. Frederick, “Spatial and Thermal Features of Three Dimensional Rayleigh-Bénard Convection”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **37**, 411–424 (1994).
- 26) L. Valencia, J. Pallares, I. Cuesta and F. X. Grau “Rayleigh-Bénard Convection of Water in a Perfectly Conducting Cubical Cavity: Effects of Temperature-dependent Physical Properties in Laminar and Turbulent Regimes”, *Numer. Heat Transf., Part A: Applications*, **47**, 333–352 (2005).
- 27) 谷川博哉, 中村憲通, 藤田識司, 舟木治郎, 平田勝哉, “加振した底面加熱立方体内流れへの振幅の影響”, 日本機械学会論文集 B 編, **75** [759], 2106–2114 (2009).
- 28) K. Hirata, H. Tanigawa, N. Nakamura, S. Fujita and J. Funaki, “On the Effect of Forced-oscillation Amplitude upon the Flow in a Cubic Cavity Heated Below”, *J. Fluid Sci. Technol.*, **8**, 106–119 (2013a).
- 29) K. Hirata, S. Fujita, A. Okaji and H. Tanigawa, “Thermal Convection in an Oscillating Cube at Various Frequencies and Amplitudes”, *J. Therm. Sci. Technol.*, **8**, 309–322 (2013b).
- 30) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part I: Coherent Structures”, *Q. Appl. Math.*, **45**, 561–571 (1987).
- 31) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part II: Symmetries and Transformations”, *Q. Appl. Math.* **45**, 573–582 (1987).
- 32) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part III: Dynamics and Scaling”, *Q. Appl. Math.*, **45**, 583–590 (1987).
- 33) K. E. Meyer, J. M. Pedersen and O. Özcan, “A Turbulent Jet in Crossflow Analysed with Proper Orthogonal Decomposition”, *J. Fluid Mech.*, **583**, 199–227 (2007).
- 34) 平 邦彦, “固有直交分解による流体解析: 1.基礎”, 日本流体力学会誌, **30**, 115–123 (2011a).
- 35) 平 邦彦, “固有直交分解による流体解析 : 2.応用”, 日本流体力学会誌, **30**, 263–271 (2011b).
- 36) K. Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, 2nd Edn, (Academic Press, United States, 1990).
- 37) K. Tatsumoto, M. Nobuhara, H. Tanigawa and K. Hirata, “Thermal Convection inside an Oscillating Cube Analysed with Proper Orthogonal Decomposition”, *Mech. Eng. J.*, **2**, 1–15 (2015).
- 38) D. Sujudi and R. Haines, “Identification of Swirling Flow in 3-D Vector Fields”, *AIAA paper*, 95-1715 (1995).
- 39) R. Haines and D. Kenwright, “On the Velocity Gradient Tensor and Fluid Feature Extraction”, *AIAA paper* 99-3288 (1999).
- 40) D. Puigjaner, J. Herrero, C. Simo and F. Giralt, “Bifurcation analysis of steady Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity with conducting sidewalls”, *J. Fluid Mech.*, **598**, 393–427 (2008).