

不確実性下における 経済主体の問題を解く確率制御の概観*

辻 村 元 男†

- I はじめに
- II 経済主体の問題とその解き方
- III 粘性解
- IV その他の確率制御
- V まとめ

概要

本稿は不確実性下における経済主体の諸問題を、問題の特徴に応じた確率制御問題として定式化し、それらの解法について概観する。解法の基本となる原理は、Bellman によって導入された動的計画原理と呼ばれる原理である。本稿では、毎時制御を実施する絶対連続制御、制御を実施する時刻を求める最適停止、状態変数がある範囲内に収めるように制御を実施する特異確率制御・インパルス制御の4種類の確率制御問題について概観する。

Keywords : 不確実性, 確率制御, 絶対連続制御, 最適停止, 特異確率制御, 確率インパルス制御

I はじめに

消費者や企業といった経済主体は、それぞれの目的に応じた意思決定を行っている。典型的には、消費者が効用を最大化するために何をどれだけ消費するかという意思決定や、企業が利益を最大とするために財・サービスをどれだけ生産するかという意思決定などが挙げられる。

これらの意思決定は、将来にわたる消費の流列から得られる効用の現在価値の総和や、利益の現在価値の総和を最大とする問題を考えることになる。ここで、経済主体は経済環境の不確実性に直面することになる。例えば、財・サービスの価格や所得などの将来の水準は不確かである。したがって、経済主体は不確実性の下で様々な意思決定を行わなければならない。こうした不確実性下における意思決定を支援するのが確率制御の手法である。

*本研究は JSPS 科研費 JP21K01573 の助成を受けたものである。

†連絡先

住所 : 602-8580 京都府京都市上京区今出川通烏丸東入

E-mail: mtsujimu@mail.doshisha.ac.jp

将来にわたる財・サービスの価格や所得といった状態変数の不確実性は、確率的な振る舞いとして、確率微分方程式によって表現される。確率微分方程式の詳細については、Protter (2005), Øksendal (2013)などを参照されたい。確率微分方程式で表された状態変数に対して、経済主体はその目的に応じて制御を加える。例えば、消費者は、将来にわたる効用を最大とするために、毎時、富の一部を消費する。将来の富は確定しておらず、確率的な振る舞いとして確率微分方程式で表現される。この富の過程に対して、消費という制御を毎時加え、富の一部を抽出する。このように、状態変数に制御を毎時実施する問題は確率制御問題として最も基本的な問題である。不確実性下における効用最大化問題はその代表例である (Merton, 1971; Cox and Huang, 1989)。

本稿は、不確実性下における4つの代表的な経済主体の問題について概観し、それぞれを確率制御問題として定式化する。まず、上述した状態変数に制御を毎時実施する経済主体の問題を考察する。こうした制御問題は絶対連続制御問題と呼ばれ、第II節で考察する。次に、制御を毎時実施するのではなく、最適に制御を実施する時刻を求める最適停止問題を考察する。金融派生商品であるアメリカ型オプションの最適行使問題 (Shreve, 2004) や、企業の設備投資の最適な実施時刻を求める問題 (Dixit and Pindyck, 1994; 辻村, 2008) などが代表的な例として挙げられる。

次に、状態変数がある範囲内に収めるように制御を実施する問題を考察する。この問題は、状態変数がある範囲内に収めるために、状態変数がある範囲を超えようとしたら超えないように制御を実施する場合と、状態変数を大きく範囲の内側に押し戻すように制御を実施する場合で、問題が異なる。前者を特異確率制御問題と呼び、後者を確率インパルス制御問題と呼ぶ。制御の違いが生まれるのは、制御に要する費用を考えると分かり易い。制御に要する費用が制御の規模に比例した費用 (比例費用) のみの場合は、状態変数がある範囲内に収めるために制御を続けて実施したとしても、費用は制御の規模の総和に比例した費用のみとなる。一方、比例費用に加えて、制御の規模とは独立な費用 (固定費用) も掛かるとしよう。2回続けて制御を実施する場合の費用は、固定費用と比例費用の2倍が必要となる。一方、同じ規模の制御を1度で実施したとすると、比例費用は2回分掛かるが、固定費用は1回分だけですむ。したがって、制御実施時に比例費用と固定費用が掛かる場合は、1回の制御で大きく状態変数を範囲の内側に押し戻すことになる。以上より、比例費用だけが掛かる場合は、特異確率制御問題として経済主体の問題が定式化され、固定費用と比例費用が掛かる場合は確率インパルス制御問題として定式化される。それぞれ取引費用を考慮した消費・投資問題 (Davis and Norman, 1990; Shreve and Soner, 1994; Korn, 1998; Øksendal and Sulem, 2002; Altarovici et al., 2017) や、複数回繰り返される設備投資の最適な実施時刻とその規模を求める問題 (Kobila, 1993; Abel and Eberly, 1996; Guo and Pham, 2005; 辻村, 2011; Al Motairi and Zer-

vos, 2017; Federico et al., 2019) などが代表的な例として挙げられる。最適停止問題、特異確率制御問題、確率インパルス制御問題については、第IV節で考察する。

以上のように、直面する問題の種類によって、経済主体の問題は様々な確率制御問題として定式化される。定式化された経済主体の問題は、動的計画原理（dynamic programming principle: DPP）あるいは最適性原理（principle of optimality）とも呼ばれる原理を用いて解かれる。Richard Bellman は、Bellman（1957, p.83）において、次のように記述している。

An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.

すなわち、最適政策の部分系列も最適政策となる（飯田, 2006）。この原理を制御された状態変数過程（制御過程）について解釈すると、初期時刻で最適に制御された制御過程は、以降のいかなる時刻における最適な制御過程も包含している、という原理である（辻村・前田, 2016, 3.1 節）。

DPP のごく僅かな変化として導出される Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（HJB 方程式）は、経済主体の問題の解が満たすべき必要条件となる。さらに、verification 定理によって HJB 方程式の解の十分性が示される。このように、HJB 方程式は確率制御問題を解く強力な解法であるが、注意しなければいけないことがある。経済主体の問題を定式化した評価関数（価値関数）が十分に滑らかであることが仮定されていることである。価値関数の滑らかさについては、必ずしも満たされているとは限らない。むしろ、状態変数の離散的な挙動を考慮するなど、より現実の問題を扱うと、その条件が満たされないことの方が多くなる。価値関数が十分に滑らかで無い場合に確率制御問題を解く手法として導入されたのが、Crandall と Lions によって開発された粘性解である（Crandall and Lions, 1983）。より詳しくは、Crandall et al. (1992), Fleming and Soner (2006), Pham (2009), Touzi and Tourin (2013) などを参照されたい。

本稿の構成は以下である。第II節では、経済主体の問題を確率制御問題として定式化し、その問題を解く基本原理である動的計画原理を示し、HJB 方程式を導出した後、verification 定理を示す。次に、第III節では、価値関数が十分に滑らかで無い場合に確率制御問題を解く手法として導入された粘性解について考察する。第IV節では、第II節で定義した経済主体の問題とは異なる種類の問題について考察する。各問題は、最適停止問題、特異確率制御問題、確率インパルス制御問題として定式化される。最後に、第V節で本稿をまとめる。

II 経済主体の問題とその解き方

本節では、不確実性下において制御が毎時実施される経済主体の問題を考察する。そのために、まず経済主体の問題を定式化する。次に、定式化された経済主体の問題を解く基本原理となる動的計画原理を示す。次に、経済主体の問題が満たすべき必要条件である HJB 方程式を導出する。最後に、HJB 方程式の十分性を示す verification 定理を確認する。

II.1 経済主体の問題

無限計画期間における経済主体の問題を定式化する。経済主体は何らかの経済活動によって便益 $f(X_t, u_t)$ を得ているとしよう。 X_t は状態変数を、 u_t は制御変数を表す。例えば、富の一部を消費することで効用を得たり、資源の一部を利用することで利益を得たりすることが考えられる。状態変数 X_t の将来の振る舞いは確率的であり、確率微分方程式

$$dX_t = \mu(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0 \quad (2.1)$$

に従っているとする。ただし、 μ はドリフト関数を、 σ 拡散関数を表す。 W_t は通常¹の条件を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ 上の標準ブラウン運動である。ここで、 \mathcal{F}_t は、標準ブラウン運動 W_t によって生成される。すなわち、 $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ である。 $u = \{u_t\}_{t \geq 0}$ は発展的¹可測過程で、 u は $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ に値を取る。 μ と σ は次を満たすと仮定する。

仮定 2.1. 任意の $x, x', u \in \mathbb{R}$ に対して、次を満たす C が存在する。

$$|\mu(x, u) - \mu(x', u)| + |\sigma(x, u) - \sigma(x', u)| \leq C(|x - x'|) \quad (2.2)$$

$$|\mu(x, u) + \sigma(x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|) \quad (2.3)$$

制御過程 u は次を満たす。

仮定 2.2. 任意の t, x に対して、次が成り立つ。

¹ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は完備であり、 \mathcal{F}_0 は \mathcal{F} における \mathbb{P} -零集合を含み、右連続である。

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (|\mu(x, u_s)|^2 + |\sigma(x, u_s)|^2) ds \right] < \infty \quad (2.4)$$

仮定 2.2 を満たす制御過程 u の集合を \mathcal{A}_0 とする。次が成り立つ (Touzi and Tourin, 2013; Pham, 2009)。

定理 2.1. (2.2) が満たされており, $u \in \mathcal{A}_0$ とする。この時, 初期値を $X_0 = x_0$ とする確率微分方程式 (2.1) は一意な強解 $\{X_t^{x_0}\}_{t \geq 0}$ を持つ。さらに, 次を満たす定数 C が存在する。

$$\mathbb{E}[|X_t^{x_0}|^2] \leq C|x_0|^2 + C e^{Ct} \mathbb{E} \left[\int_0^t |x_0|^2 + (|\mu(x, u_s)|^2 + |\sigma(x, u_s)|^2) ds \right] \quad (2.5)$$

便益関数 f は次を満たすと仮定する。

仮定 2.3. 便益関数 f は 2 次成長条件

$$|f(x, u)| \leq C(1 + |u| + |x|^2) \quad (2.6)$$

を満たす。ただし, C は定数である。

経済活動によって得られる便益の割引期待現在価値 J は次である。

$$J(x; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t, u_t) dt \right] \quad (2.7)$$

ただし, $r > 0$ は割引率である。意味のある問題を考えるためにも, J が発散しないような制御を考えなくてはならない。そのような制御を許容制御と呼び許容制御の集合を \mathcal{A} とすると, \mathcal{A} は次のように与えられる。

$$\mathcal{A} := \left\{ u \in \mathcal{A}_0; \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} |f(X_t, u_t)| dt \right] < \infty, \forall x_0 \right\} \quad (2.8)$$

以上より, 経済主体の問題は, 便益の割引期待現在価値 J を最大とするように制御 u を選択する問題として定式化される。

問題 2.1 (経済主体の問題)。

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} J(x; u) = J(x, u^*) \quad (2.9)$$

ただし, V は経済主体の問題の価値関数を, u^* は最適な制御過程を表す。

このようにして、経済主体の問題は確率制御問題として定式化された。取り分け、制御が毎時実施される問題は絶対連続制御問題と呼ばれる。(2.9)以降、 $X_0 = x$ とするので、注意されたい。

II.2 動的計画原理

本小節では、確率制御問題を解く基本原理である動的計画原理 (DPP) あるいは最適性原理とも呼ばれる原理を確認する。この原理を経済主体の問題 (2.9) に適応すると次となる。

定理 2.2 (動的計画原理). 経済主体の問題 (2.9) の価値関数 V は任意の停止時刻 $\tau \in (0, \infty)$ に対して、次が成り立つ。

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} V(X_\tau) \right] \quad (2.10)$$

Pham (2009, Theorem 3.3.1) を参考に、動的計画原理を証明する。

証明. 任意の制御 $u \in \mathcal{A}$ と任意の停止時刻 $\tau \in (0, \infty)$ に対して、繰り返し条件付き期待値の法則によって、

$$\begin{aligned} J(x; u) &= \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + \mathbb{E}_{X_\tau} \left[\int_\tau^\infty e^{-r\tau} f(X_t, u_t) dt \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} J(X_\tau, u) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 \mathbb{E}_{X_τ} は X_τ が与えられたときの条件付き期待値作用素を表す。 $V \geq J(\cdot, u)$ という関係から、

$$J(x; u) \leq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} V(X_\tau) \right] \quad (2.12)$$

を得る。両辺に対して最大となる制御 $u \in \mathcal{A}$ を取ると、

$$V(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} V(X_\tau) \right] \quad (2.13)$$

となる。

次に、 $u \in \mathcal{A}$ と τ を固定しよう。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 ε 最適制御 $u^\varepsilon \in \mathcal{A}$ を $V(X_\tau)$

に考えよう。すなわち、

$$V(X_\tau) - \varepsilon \leq J(X_\tau; u^\varepsilon) \quad (2.14)$$

となる。ここで、次の制御を考えよう。

$$\hat{u} = \begin{cases} u_t, & t \in [0, \tau) \\ u_t^\varepsilon, & t \in [\tau, \infty) \end{cases} \quad (2.15)$$

制御 \hat{u} を用いる便益の割引期待現在価値 J は次となる。

$$J(x; \hat{u}) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} J(X_\tau, u^\varepsilon) \right] \quad (2.16)$$

$V \geq J(\cdot, u)$ より、次が得られる。

$$V(x) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} J(X_\tau, u^\varepsilon) \right] \quad (2.17)$$

(2.14) を (2.17) に代入すると、次が得られる。

$$V(x) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} V(X_\tau) \right] - \mathbb{E} [e^{-r\tau} \varepsilon] \quad (2.18)$$

$u \in \mathcal{A}$ と $\varepsilon > 0$ は任意であることから、次の不等式が得られる。

$$V(x) \geq \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-r\tau} V(X_\tau) \right] \quad (2.19)$$

以上より、(2.13) と (2.19) の2つの不等式によって (2.10) が示される。

□

II.3 HJB 方程式

本小節では、経済主体の問題 (2.9) の解が満たすべき必要条件である HJB 方程式を、Chang (2004) を参考に導出する。HJB 方程式は DPP のごく僅かな変化として導出される。

(2.10) において、 $\tau = dt$ として書き直すと、

$$0 = \sup_{u \in A} \mathbb{E} \left[\int_0^{dt} e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + e^{-rdt} V(X_{dt}) - V(x) \right] \quad (2.20)$$

となる。十分小さな時間間隔 dt に対しては、 $e^{-rdt} = 1 - rdt + o(dt)$ となり、(2.20) は次のように書き直せる。

$$0 = \sup_{u \in A} \mathbb{E} \left[\int_0^{dt} e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + V(X_{dt}) - V(x) - rdtV(X_{dt}) + o(dt) \right] \quad (2.21)$$

価値関数 V は C^2 級であると仮定し、 $V(X_{dt})$ に伊藤の公式を適応すると、

$$V(X_{dt}) = V(x) + \left[\mu(x, u_0)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x, u_0)^2V''(x) \right] dt + \sigma(x, u_0)V'(x)dW_t \quad (2.22)$$

を得る。(2.22) を (2.21) に代入すると、

$$0 = \sup_{u \in A} \mathbb{E} \left[\int_0^{dt} e^{-rt} f(X_t, u_t) dt + \left[\mu(x, u_0)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x, u_0)^2V''(x) \right] dt - rdtV(X_{dt}) + o(dt) \right] \quad (2.23)$$

となる。(2.23) を dt で割り、 dt を限りなく小さくし $dt \rightarrow 0$ とすると、HJB 方程式が得られる。

定理 2.3 (HJB 方程式). 経済主体の問題 (2.9) の価値関数 V が C^2 級だとすると、HJB 方程式は次のように得られる。

$$0 = \sup_{u_0 \in A} \{ \mathcal{L}V(x) + f(x, u_0) \} \quad (2.24)$$

ただし、次の \mathcal{L} は無限小作用素である。

$$\mathcal{L}V(x) = \mu(x, u_0)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x, u_0)^2V''(x) - rV(x) \quad (2.25)$$

II.4 Verification 定理

前小節で見たように、HJB 方程式 (2.24) は、経済主体の問題 (2.9) の解が満たすべき必要条件を表している。次に、HJB 方程式を満たす解が存在するとして、その解が経済主体の問題 (2.9) の最適解になっているか、すなわち、HJB 方程式が十分条件としての性質を持っているかについては、verification 定理によって確認される (辻村・前田, 2016)。

辻村・前田 (2016) を参考に、経済主体の問題 (2.9) における verification 定理を示す。

定理 2.4 (Verification 定理). 関数 $\phi \in C^2$ を HJB 方程式 (2.24) の解だとする。さらに、横断性条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{-rt} \phi(X_t)] = 0 \quad (2.26)$$

を満たすとする。この時、以下を得る。

(i) 任意の許容制御過程 $u \in \mathcal{A}$ に対して、

$$\phi(x) \geq V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、次のような許容制御 $u_0^* \in \mathcal{A}$ が存在するとする。

$$u_0^* = \arg \max \{ \mathcal{L} \phi(x) + f(x, u_0) \} \quad (2.28)$$

この時、関数 ϕ と価値関数 V が一致し、 $\phi = V$ となる。さらに、許容制御過程 u^* は経済主体の問題 (2.9) の最適制御となる

証明. (i) 任意の許容制御過程 $u \in \mathcal{A}$ に対して、HJB 方程式 (2.24) より、

$$\mathcal{L} \phi(X_t) + f(X_t, u_t) \leq 0 \quad (2.29)$$

が成り立つ。Dynkin の公式より、次が得られる。

$$\mathbb{E} [e^{-r\theta_n} \phi(X_{\theta_n})] = \phi(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} \mathcal{L} \phi(X_t) dt \right] \quad (2.30)$$

ただし、 θ_n は次で与えられる停止時刻である。

$$\theta_n := T \wedge \inf\{t \geq 0; |X_t - x| \geq n\} \quad (2.31)$$

(2.29) より、(2.31) は

$$\mathbb{E} [e^{-r\theta_n} \phi(X_{\theta_n})] \leq \phi(x) - \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t, u_t) dt \right] \quad (2.32)$$

となる。ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\mathbb{E}[e^{-rT} \phi(X_T)] \leq \phi(x) - \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-rt} f(X_t, u_t) dt \right] \quad (2.33)$$

となる。 $T \rightarrow \infty$ とすると、(2.26) と優収束定理より、次の不等式を得る。

$$\phi(x) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t, u_t) dt \right], \quad \forall u \in \mathcal{A} \quad (2.34)$$

任意の $u \in \mathcal{A}$ に対して (2.34) が成り立ち、 $\phi(x) \geq V(x)$ が示される。

(ii) (i) の証明において、制御 u_t が (2.28) を満たすとすると、(2.32) が等号で成り立つ。(i) の議論を繰り返すことで、次の等式を得る。

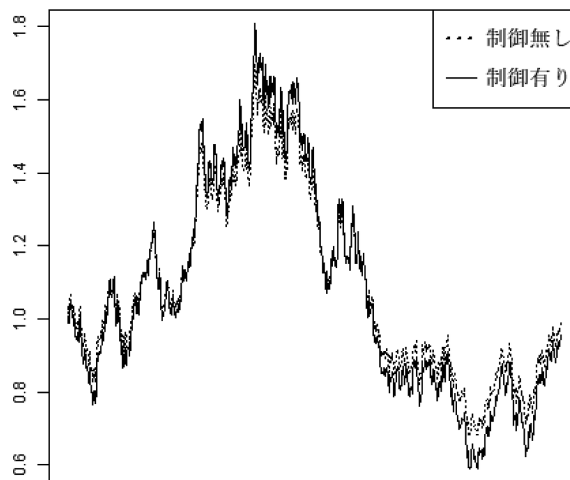
$$\phi(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t, u_t^*) dt \right] = V(x) \quad (2.35)$$

したがって、 $\phi = V$ 、制御過程 u^* は最適であることが示された。

□

HJB 方程式を解くことで得られた最適制御 u^* を適応した制御過程にを用いて、絶対連続制御のイメージを図1で示す。ここで想定されている最適制御 u^* は、制御過程の変化幅の一定倍の規模でなされる制御である。点線が制御が実施されない場合の状態変数過程を表し、実線が制御が実施された状態変数過程（制御過程）を表す。実線と点線の差が各時刻の制御の大きさを表す。

図1 絶対連続制御のイメージ



Ⅲ 粘 性 解

前節で、HJB 方程式は確率制御問題を解く強力なツールであることが示された。しかし、ここで注意しなければいけないことがある。それは、価値関数が十分に滑らかであることが仮定されていることである。価値関数の滑らかさについては、必ずしも満たされているとは限らない。むしろ、状態変数の離散的な挙動を考慮するなど、より現実の問題を扱うと、その条件が満たされないことの方が多くなる。

価値関数が十分に滑らかで無い場合に確率制御問題を解く手法として導入されたのが、Crandall と Lions によって開発された粘性解である (Crandall and Lions, 1983)。粘性解を用いたアプローチでは、関数の局所的な有界性のみを仮定して HJB 方程式を定式化している。より詳しくは、Crandall et al. (1992), Fleming and Soner (2006), Pham (2009), Touzi and Tourin (2013) などを参照されたい。取り分け、Crandall et al. (1992) は「user's guide」として知られている。

本節では、Pham (2009) を主に参考に、粘性解を定義した後に、経済主体の問題に対する粘性解を示す。

Ⅲ.1 粘性解の定義

本小節では、粘性解を定義する。HJB 方程式を一般化し、局所有界な関数 $v: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ に対する HJB 方程式を考える。ただし、 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ である。

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{A}} \{ \mathcal{L} v(x) + f(x, u) \} \quad (3.1)$$

粘性解の定義に必要な上・下半連続包を定義する (小池, 2016)。

定義 3.1 (上・下半連続包). $v: \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、上半連続包 v^* と下半連続包 v_* は、それぞれ次で定義される。

$$v^*(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sup \{ v(y); y \in \bar{\mathcal{O}} \cap B_\varepsilon(x) \}] \quad (3.2)$$

$$v_*(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\inf \{ v(y); y \in \bar{\mathcal{O}} \cap B_\varepsilon(x) \}] \quad (3.3)$$

ただし、 $\bar{\mathcal{O}} := \{x \in \mathcal{O}; B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$, $B_\varepsilon(x) := \{y; |y - x| < \varepsilon\}$ である。

定義 3.2 (粘性解). $v: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ を局所的に有界な関数とする。

(i) $v^*(x) \leq \varphi(x)$, $v^*(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ となる任意の $\bar{x} \in \mathcal{O}$ と試験関数 $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ に対して、次

が成り立つとき, v は HJB 方程式 (2.24) の粘性劣解 (*viscosity subsolution*) である。

$$-\sup_{u \in A} \{ \mathcal{L} v(\bar{x}) + f(\bar{x}, u) \} \leq 0 \quad (3.4)$$

(ii) $v(x) \geq \varphi(x)$, $v_*(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ となる任意の $\bar{x} \in \mathcal{O}$ と試験関数 $\varphi \in C^2(\mathcal{O})$ に対して, 次が成り立つとき, v は HJB 方程式 (2.24) の粘性優解 (*viscosity supersolution*) である。

$$-\sup_{u \in A} \{ \mathcal{L} v(\bar{x}) + f(\bar{x}, u) \} \geq 0 \quad (3.5)$$

(iii) もし $v \in \mathcal{O}$ が (i), (ii) を満たせば, v は HJB 方程式 (2.24) の粘性解である。

III.2 粘性解の特性

本小節では, 経済主体の問題 (2.9) の価値関数 V は粘性解であることを示す。

定理 3.1. 経済主体の問題 (2.9) の価値関数 V は局所有界であるとする。十分大きな $r > 0$ に対して, V は HJB 方程式 (2.24) の粘性解である。

証明. (i) まず, V が粘性優解であることを示す。 $\bar{x} \in \mathbb{R}$ と試験関数 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ は次を満たすとする。

$$\min_{x \in \mathbb{R}} [V_*(x) - \varphi(x)] = V_*(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0 \quad (3.6)$$

下半連続包 V_* の定義より, 次を満たす列 $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$x_n \rightarrow \bar{x}, \quad V(x_n) \rightarrow V_*(\bar{x}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

φ の連続性と (3.6) より,

$$\gamma_n := V(x_n) - \varphi(x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

f の 2 次成長条件 (2.3) より, 定数制御 \hat{u} は $\hat{u} \in A$ となる (Pham, 2009, Remark 3.2.2)。任意の定数 $\eta > 0$ に対して, 停止時刻 τ_n が

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0; |X_t^{x_n} - x_n| \geq \eta\} \quad (3.9)$$

と与えられるとしよう。 $\{h_n\}$ を次が満たされる正の列とする。

$$h_n \rightarrow 0, \quad \frac{\gamma_n}{h_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

$\theta_n := \tau_n \wedge h_n$ とすると, DPP (2.10) より, $V(x_n)$ に対して, 次を得る。

$$V(x_n) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, \hat{u}) dt + e^{-r\theta_n} V(X_{\theta_n}^{x_n}) \right] \quad (3.11)$$

(3.6) より, $V \geq V_* \geq \varphi$ となり, (3.11) は, 次のように書き直される。

$$\varphi(x_n) + \gamma_n \geq \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, \hat{u}) dt + e^{-r\theta_n} \varphi(X_{\theta_n}^{x_n}) \right] \quad (3.12)$$

ここで, $t \in [0, \theta_n]$ で $e^{-rt} \varphi(X_t^{x_n})$ に Dynkin の公式を適応すると,

$$\mathbb{E} [e^{-r\theta_n} \varphi(X_{\theta_n}^{x_n})] = \varphi(x_n) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} \mathcal{L} \varphi(X_t^{x_n}) dt \right] \quad (3.13)$$

となる。(3.13) を (3.12) に代入すると,

$$\gamma_n \geq \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} [f(X_t^{x_n}, \hat{u}) + \mathcal{L} \varphi(X_t^{x_n})] dt \right] \quad (3.14)$$

となる。両辺を h_n で割ると,

$$\frac{\gamma_n}{h_n} \geq \frac{1}{h_n} \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} [f(X_t^{x_n}, \hat{u}) + \mathcal{L} \varphi(X_t^{x_n})] dt \right] \quad (3.15)$$

となる。ここで, n を十分大きくすると, $\theta_n = h_n$ となる。したがって, 優収束定理を使うと,

$$0 \geq f(\bar{x}, \hat{u}) + \mathcal{L} \varphi(\bar{x}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

を得る。この不等式は任意の $\hat{u} \in \mathcal{A}$ に対して成り立つことから, 求める不等式が得られる。

(ii) 次に, V が粘性劣解であることを示す。 $\bar{x} \in \mathbb{R}$ と試験関数 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ は次を満たすとする。

$$\max_{x \in \mathbb{R}} [V^*(x) - \varphi(x)] = V^*(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0 \quad (3.17)$$

背理法を使って粘性劣解を示す。そこで、次が成り立っているとする。

$$-\sup_{u \in A} \{ \mathcal{L} \varphi(\bar{x}) + f(\bar{x}, u) \} \geq 0 \quad (3.18)$$

全ての $y \in B_\eta(\bar{x}) := \{y \in \mathbb{R}; |y - \bar{x}| < \eta\}$ に対して、次が成り立つ $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ が存在する。

$$-\sup_{u \in A} \{ \mathcal{L} \varphi(y) + f(y, u) \} \geq \varepsilon \quad (3.19)$$

V^* の定義より、次を満たす列 $\{x_n\} \in B_\eta(\bar{x})$ が存在する。

$$x_n \rightarrow \bar{x}, \quad V(x_n) \rightarrow V^*(\bar{x}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

φ の連続性と (3.18) より、次が得られる。

$$\gamma_n := V(x_n) - \varphi(x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

粘性優解と同様に、 $\{h_n\}$ を次が満たされる正の列とする。

$$h_n \rightarrow 0, \quad \frac{\gamma_n}{h_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

DPP (2.10) より、次を満たす許容制御 $\check{u}^n \in A$ が存在する。

$$\varphi(x_n) + \gamma_n - \frac{\varepsilon h_n}{2} \leq \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, \check{u}) dt + e^{-r\theta_n} \varphi(X_{\theta_n}^{x_n}) \right] \quad (3.23)$$

ただし、 $\theta_n := \tau_n \wedge h_n$,

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0; |X_t^{x_n} - x_n| \geq \eta'\} \quad (3.24)$$

$0 < \eta' < \eta$ 。ここで、 $X_t^{x_n}$ は \check{u}^n が適用された制御過程である。 x_n は \bar{x} に収束することから、 $B_{\eta'}(x_n) \subset B_\eta(\bar{x})$ となる。 $t \in [0, \theta_n]$ で $e^{-rt} \varphi(X_t^{x_n})$ に Dynkin の公式を適用した (3.13) を (3.23) に代入すると、次の不等式を得る。

$$\gamma_n - \frac{\varepsilon h_n}{2} \leq \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} [f(X_t^{x_n}, \check{u}) + \mathcal{L} \varphi(X_t^{x_n})] dt \right] \quad (3.25)$$

両辺を h_n で割ると,

$$0 \geq \frac{\gamma_n}{h_n} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{h_n} \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} [f(X_t^{x_n}, \dot{u}) + \mathcal{L}\varphi(X_t^{x_n})] dt \right] \quad (3.26)$$

となる。(3.19) より,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\gamma_n}{h_n} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{h_n} \mathbb{E} \left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} \varepsilon dt \right] \\ &= \frac{\gamma_n}{h_n} - \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{E}[\theta_n]}{h_n} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Chebyshev の不等式より, 次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} \Pr\{\tau_n \leq h_n\} &\leq \Pr\left\{ \sup_{t \in [0, h_n]} |X_t^{x_n} - x_n| \geq \eta \right\} \\ &\leq \frac{\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, h_n]} |X_t^{x_n} - x_n|^2 \right]}{\eta^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ より,

$$\Pr\{\tau_n \leq h_n\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

となる。さらに,

$$\Pr\{\tau_n > h_n\} \leq \frac{\mathbb{E}[\theta_n]}{h_n} \leq 1 \quad (3.30)$$

より, 次を得る。

$$\frac{\mathbb{E}[\theta_n]}{h_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.31)$$

したがって, $n \rightarrow \infty$ としたとき, (3.27) は成り立たず, (3.18) が成り立たない。よって, V が粘性劣解であることが示された。

以上, (i), (ii) によって, 価値関数 V は粘性解であることが示された。□

IV その他の確率制御

第II節で考察した経済主体の問題以外の問題として, 制御を実施するか否かも含まれるような問題を概観する。典型的には, 制御を実施する最適な時刻を求める最適停止問

題が挙げられる。あるいは状態変数を一定の範囲内に収める制御問題として、特異確率制御問題と確率インパルス制御問題がある。両制御問題の大きな違いは、状態変数に不連続な変化を起こさせるかにある。不連続な変化を起こさせるのがインパルス制御問題である。まず、最適停止問題を考察し、次に、特異確率制御問題、最後に、インパルス制御問題を考察する。

IV.1 最適停止

本小節では、最適停止問題について考察する。経済主体の問題 (2.9) では、制御 u は毎時実施されていた。この問題を、制御を実施する最適な時刻を求める問題へと拡張する。

経済主体は経済活動によって毎時便益 f を得ているが、時刻 τ に便益 g を得て、経済活動を停止する問題を考えよう。状態変数 $X_t \in \mathbb{R}$ は、次の確率微分方程式に従っているとするとする。

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x > 0 \quad (4.1)$$

μ, σ は Lipschitz 条件と線形成長条件 (仮定 2.1) を満たす。また、関数 f, g も線形成長条件を満たすとするとする。経済活動によって得られる便益の割引期待現在価値 J_{os} は次である。

$$J_{os}(x; \tau) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\tau} g(X_\tau) \right] \quad (4.2)$$

ただし、 $\tau \leq T$ は \mathcal{F}_t -停止時刻である。 T は $T := \inf\{t > 0; X_t \notin \mathcal{O}\}$ と与えられる領域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ を初めて退出する時刻を表す。

経済主体の問題は、便益の割引期待現在価値 J_{os} を最大とする経済活動を停止する時刻 τ を求める問題 (最適停止問題) として定式化される。

問題 4.1 (経済主体の問題：最適停止)。

$$V_{os}(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} J_{os}(x; \tau) = J_{os}(x, \tau^*) \quad (4.3)$$

ただし、 V_{os} は経済主体の問題の価値関数を、 \mathcal{T} は停止時刻の集合を、 τ^* は最適停止時刻を表す。

経済主体の問題 (4.3) は、Bensoussan and Lions (1973 c) によって導入された変分不等式を用いて解くことができる。変分不等式については、Bensoussan and Lions

(1982), 辻村・前田 (2016) も参照されたい。

経済主体の問題 (4.3) の定式化から, 任意の x に対して, $V_{os}(x) \geq g(x)$ が成り立つ。したがって, 便益の割引期待現在価値 J_{os} を最大とするために経済活動を継続する状態変数 X の領域 \mathcal{H} は, 次と与えられる。

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{O}; V_{os}(x) > g(x)\} \quad (4.4)$$

なお, この領域を続行領域と呼ぶ。 $x \in \partial\mathcal{O}$ となると, 経済主体は経済活動を停止する。したがって, 次を得る。

$$V_{os}(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\mathcal{O} \quad (4.5)$$

任意の $x \in \mathcal{O}$, $\delta > 0$ に対して, 停止時刻 θ を $\theta := \inf\{t > 0; |X_t - x| \geq \delta\}$ と与える。十分に小さな δ に対しては $\theta \leq \tau$ となり, 次を得る。

$$\begin{aligned} V_{os}(x) &\geq J_{os}(x; \tau) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\tau} g(X_\tau) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^\tau e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\tau} g(X_\tau) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) は任意の停止時刻 τ に対して成り立つことから, $t \geq \theta$ では, 最適な停止時刻が選ばれるとしよう。この時, (4.6) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{os}(x) &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^{\tau^*} e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\tau^*} g(X_{\tau^*}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} \left[\int_\theta^{\tau^*} e^{-r(t-\theta)} f(X_t) dt + e^{-r(\tau^*-\theta)} g(X_{\tau^*}) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} V_{os}(X_\theta) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dynkin の公式を $t = [0, \theta]$ で適用すると, 次が得られる。

$$\mathbb{E} [e^{-r\theta} V_{os}(X_\theta)] = V_{os}(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} \mathcal{L}V_{os}(X_t) dt \right] \quad (4.8)$$

(4.8) を (4.7) に代入すると、次が得られる。

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} (f(X_t) + \mathcal{L}V_{os}(X_t)) dt \right] \quad (4.9)$$

両辺を $\mathbb{E}[\theta]$ で割り、 $\delta \rightarrow 0$ とすると、

$$0 \geq f(x) + \mathcal{L}V_{os}(x), \quad \forall x \in \mathcal{O} \quad (4.10)$$

を得る。また、 x が続行領域にある場合は、

$$0 = f(x) + \mathcal{L}V_{os}(x), \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad (4.11)$$

となる。 $x \in \partial\mathcal{O}$ となると、経済活動を停止する。したがって、次を得る。

$$V_{os}(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\mathcal{O} \quad (4.12)$$

以上をまとめると、経済主体の問題 (4.3) の変分不等式は、次として与えられる。

$$\max\{\mathcal{L}V_{os}(x) + f(x), g(x) - V_{os}(x)\} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{O} \quad (4.13)$$

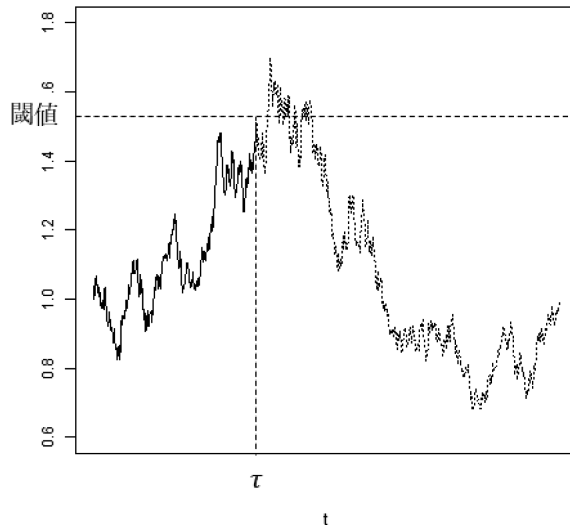
$$V_{os}(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\mathcal{O} \quad (4.14)$$

図2に最適停止のイメージを表した。変分不等式を解くことで、続行領域と制御を実施する領域を定める閾値が求まり、制御過程が閾値に到達した時刻 τ に制御を実施する。 τ 以降の点線は制御が実施されない場の制御過程を表している。

IV.2 特異確率制御

本小節では、状態変数を一定の範囲内に収める特異確率制御問題について考察する。第II節で考察した経済主体の問題 (2.1) では、経済主体は便益の割引現在価値を最大とするように、全ての時刻 t で制御を実施する問題を考察した。次に、最適停止問題として定式化された経済主体の問題 (4.3) は、制御は停止時刻の1回のみ実施された。一方、本小節で考察する経済主体の問題は、状態変数 $X_t \in \mathbb{R}$ がある水準を超えないように制御を実施する問題を考察する。水準を超えないように制御を実施するということは、全ての時刻 t で制御が実施されるわけでは無い。また、制御を実施することで、状

図2 最適停止のイメージ



状態変数の水準が離散的に変化しない場合を考察する。

状態変数 $X_t \in \mathbb{R}$ を積分形式で表すと、次で与えられるとする。

$$X_t = x + \int_{0^-}^t \mu(X_s) ds + \int_{0^-}^t \sigma(X_s) dW_s + \int_{0^-}^t u_s ds \quad (4.15)$$

μ, σ は Lipschitz 条件と線形成長条件を満たす。時刻 t までの累積制御を

$$\eta_t := \int_{0^-}^t u_s ds \quad (4.16)$$

とする。 η_t は有界変動であるとする。

$$|\eta|_t = \int_{0^-}^t |u|_s ds < \infty \quad (4.17)$$

したがって、 η_t は次のように分解できる。

$$\eta_t = \eta_t^+ - \eta_t^- \quad (4.18)$$

ただし、 $\{\eta_t^+\}_{t \geq 0}$ は正の右連続非減少過程である。すなわち、 $\{\eta_t\}_{t \geq 0}$ は、 $\eta_{0^-} = 0$ で、右連続左極限である \mathcal{F}_{t^-} 適合過程とする。

η_t^p を次で与えられる η_t の純粋なジャンプ部分とする。

$$\eta_t^{jp} := \sum_{0^- \leq s < t} \Delta \eta_s \quad (4.19)$$

ただし, $\Delta \eta_s = \eta_s - \eta_{s^-}$ である。 η_t^c を次のように与えられる η の連続な部分とする。

$$\eta_t^c := \eta_t - \eta_t^{jp} \quad (4.20)$$

η_t^c は有界変動であり, ほとんど至るところで微分可能である。したがって, $t \in [0, \infty)$ に対して,

$$\eta_t^c = \eta_t^{ac} + \eta_t^{sc} \quad (4.21)$$

となる。ただし, $\eta_t^{ac} := \int_0^t \dot{\eta}_s^c ds$ は η_t の絶対連続部分, η_t^{sc} は η_t の特異連続部分である。したがって, η_t は次のように分解される。

$$\eta_t = \eta_t^{ac} + \eta_t^{sc} + \eta_t^{jp}, \quad t \in [0, \infty). \quad (4.22)$$

この分解を Lebesgue 分解と呼ぶ (Yong and Zhou, 1999, Chapter 2.7.3)。

(4.22) において, 特異連続部分 η_t^{sc} のみを考え, $\eta_t \equiv \eta_t^{sc}$, $\eta_t^{ac} \equiv \eta_t^{jp} \equiv 0$ とする。(4.15) を微分形式で表すと, 次のようになる。

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + d\eta_t^+ - d\eta_t^-, \quad X_{0^-} = x \quad (4.23)$$

経済活動によって得られる便益の割引期待現在価値 J_{ssc} は次で与えられる。

$$J_{ssc}(x; \eta^+, \eta^-) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t) dt + k_p \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^+ + k_m \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^- \right] \quad (4.24)$$

ただし, $k_p \in \mathbb{R}$, $k_m \in \mathbb{R}$ は制御を実施することで掛かる 1 単位当たりの費用や, 制御を実施することで得られる便益などを表す。費用の場合は $k_p < 0$, $k_m < 0$ となり, 便益の場合は $k_p > 0$, $k_m > 0$ となる。 $\{\eta_t^\pm\}_{t \geq 0}$ が \mathcal{F}_t -適合過程かつ, $\eta_0^\pm = 0$ で η^\pm が非減少右連続であるとき, 制御の組 (η^+, η^-) は許容となる。許容制御の集合を \mathcal{A}_{ssc} とすると, 経済主体の問題は, 便益の割引期待現在価値 J_{ssc} を最大とする制御の組 $(\eta^+, \eta^-) \in \mathcal{A}_{ssc}$ を求める問題 (特異確率制御問題) として定式化される。

問題 4.2 (経済主体の問題：特異確率制御).

$$V_{ssc}(x) = \sup_{(\eta^+, \eta^-) \in A_{ssc}} J_{ssc}(x; \eta^+, \eta^-) = J_{ssc}(x; \eta^{+*}, \eta^{-*}) \quad (4.25)$$

ただし, V_{ssc} は経済主体の問題の価値関数を, (η^{+*}, η^{-*}) は最適な制御を表す。

特異確率制御問題として定式化された経済主体の問題 (4.25) も, 変分不等式を用いて解くことができる。最適停止問題と同様にして, 変分不等式を導出する。

任意の $x, \delta > 0$ に対して, 停止時刻 θ を $\theta := \inf\{t > 0; |X_t - x| \geq \delta\}$ と与える。次のような制御を考える。時刻 θ までは制御を実施せず, 時刻 θ 以降は最適に制御が実施される。すなわち, η_t^\pm は次のように場合分けされる。

$$\eta_t^\pm = \begin{cases} 0, & t < \theta, \\ \eta_t^{\pm*}, & t \geq \theta \end{cases} \quad (4.26)$$

十分に小さな δ に対しては, 次を得る。

$$\begin{aligned} V_{ssc}(x) &\geq J_{ssc}(x; \eta^+, \eta^-) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t) dt + k_p \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^+ + k_m \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^- \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^\infty e^{-rt} f(X_t) dt + k_p \int_\theta^\infty e^{-rt} d\eta_t^+ + k_m \int_\theta^\infty e^{-rt} d\eta_t^- \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$t \geq \theta$ では, 最適な制御が選ばれることから, (4.27) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{ssc}(x) &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^\infty e^{-rt} f(X_t) dt + k_p \int_\theta^\infty e^{-rt} d\eta_t^{+*} + k_m \int_\theta^\infty e^{-rt} d\eta_t^{-*} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} \left[\int_\theta^\infty e^{-r(t-\theta)} f(X_t) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_p \int_\theta^\infty e^{-r(t-\theta)} d\eta_t^{+*} + k_m \int_\theta^\infty e^{-r(t-\theta)} d\eta_t^{-*} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} V_{ssc}(X_\theta) \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dynkin の公式を $t = [0, \theta]$ で適用した (4.8) より, 次が得られる。

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} (f(X_t) + \mathcal{L}V_{ssc}(X_t)) dt \right] \quad (4.29)$$

両辺を $\mathbb{E}[\theta]$ で割り, $\delta \rightarrow 0$ とすると,

$$0 \geq f(x) + \mathcal{L}V_{ssc}(x) \quad (4.30)$$

を得る。

次に、初期時刻 $t = 0$ で制御 η^+ が実施され状態変数が $X_0 = x$ から $X_0 = x + \delta$ になり、その後は、最適に制御が実際されるとしよう。(4.28) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{ssc}(x) &\geq k_p \delta + \mathbb{E}_{x+\delta} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t^{x+\delta}) dt + k_p \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^{+*} + k_m \int_0^\infty e^{-rt} d\eta_t^{-*} \right] \\ &= k_p \delta + V_{ssc}(x + \delta) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ただし、 $\mathbb{E}_{x+\delta}$ は $X_0 = x + \delta$ を条件とした期待値を表し、 $X_t^{x+\delta}$ は初期値を $x + \delta$ とした状態変数を表す。(4.31) を整理すると、次となる。

$$V_{ssc}(x + \delta) - V_{ssc}(x) \leq -k_p \delta \quad (4.32)$$

両辺を δ で割り、 $\delta \rightarrow 0$ と極限を取ると、次の不等式を得る。

$$V'_{ssc}(x) \leq -k_p \quad (4.33)$$

今度は、初期時刻 $t = 0$ で制御 η^+ が実施され状態変数が $X_0 = x$ から $X_0 = x - \delta$ になり、その後は、最適に制御が実際される場合を考える。上と同じ議論から次の不等式を得る。

$$V'_{ssc}(x) \geq k_m \quad (4.34)$$

以上をまとめると、経済主体の問題 (4.25) の変分不等式は、次として与えられる。

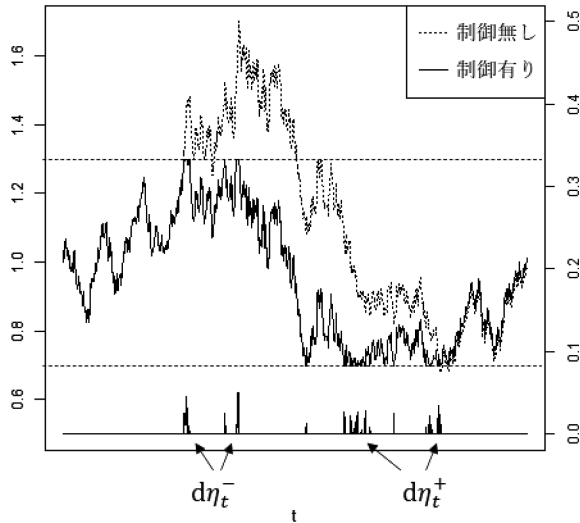
$$\max\{\mathcal{L}V_{ssc}(x) + f(x), k_p + V'_{ssc}(x), k_m - V'_{ssc}(x)\} = 0 \quad (4.35)$$

この変分不等式を用いて、経済主体の問題 (4.25) を解くことができる。

図3に特異確率制御のイメージを表した。制御過程を一定の範囲内に抑える特異確率制御は、変分不等式を解くことで、制御過程の範囲を規定する閾値が求まる。図では上側と下側に閾値がある場合を想定している。制御過程がその閾値を上側(下側)に超えようとする時、制御過程をその内側に留めようとする制御が実行される。図では上側(下側)を超えようとした時に $d\eta_t^-(d\eta_t^+)$ の制御が実行される。左側の軸が制御過程の

水準を表し、右側の軸が制御の水準を表す。

図3 特異確率制御のイメージ



IV.3 確率インパルス制御

本小節では、制御過程がある範囲を超えないようにするために、状態変数の水準を離散的に変動させる制御を実施するインパルス制御問題を考察する。

η_t の分解 (4.22) において、純粋なジャンプ部分 η_t^{jp} のみを考え、 $\eta_t \equiv \eta_t^{jp}$ 、 $\eta_t^{ac} \equiv \eta_t^{sc} \equiv 0$ とする。状態変数の水準が離散的に変動することで、状態変数のある水準を超えないように実施する制御が、連続的に実施されることは無くなる。そこで $i \geq 1$ 番目の制御が実施される時刻を τ_i とすると、状態変数 $X_t \in \mathbb{R}$ を積分形式 (4.15) は、次で表せる。

$$X_t = x + \int_{0^-}^t \mu(X_s) ds + \int_{0^-}^t \sigma(X_s) dW_s + \sum_{i \geq 1} \Delta \eta_i^+ \mathbf{1}_{\{\tau_i < t\}} - \sum_{i \geq 1} \Delta \eta_i^- \mathbf{1}_{\{\tau_i < t\}} \quad (4.36)$$

特異確率制御とは異なり、状態変数を離散的に変動させる状況を、制御に要する費用を例に考えよう。制御に要する費用が、制御の規模に応じて決まる費用に加えて、制御の規模とは関係なく決まる費用が存在するとしよう。これらの費用を比例費用と固定費用と呼ぶ。固定費用が存在するため、状態変数のある水準を超えないように「小さな」制御を連続的に実施すると、毎回の制御で固定費用が掛かってしまい、制御に要する費用が大きくなってしまふ。そこで、状態変数を水準の内側にジャンプさせて押し戻すことで制御の実施回数を減らし、ひいては制御に要する費用を削減する。したがって、制御を実施する時刻は $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots$ となる。この考察を費用関数を $K(\Delta \eta)$ として

表すと,

$$K(\Delta\eta + \Delta\eta') \leq K(\Delta\eta) + K(\Delta\eta') \quad (4.37)$$

となる。この性質は劣加法性と呼ばれる。劣加法性が満たされる費用関数として、 $K(\Delta\eta)$ が次と与えられる。

$$K(\Delta\eta) = \begin{cases} c_p + k_p \Delta\eta, & \Delta\eta = \Delta\eta^+ \\ \min[c_p, c_m], & \Delta\eta = 0 \\ c_m + k_m \Delta\eta, & \Delta\eta = \Delta\eta^- \end{cases} \quad (4.38)$$

ただし、 $c_p, c_m > 0$ は固定費用を表す。

制御時刻 τ_i とその規模 $\Delta\eta_i$ の組をインパルス制御 v とする。

$$v := \{(\tau_i, \Delta\eta_i)\}_{i \geq 1} \quad (4.39)$$

経済活動によって得られる便益の割引期待現在価値 J_{sic} は次で与えられる。

$$J_{sic}(x; v) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t) dt - \sum_{i \geq 1} e^{-r\tau_i} K(\Delta\eta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < \infty\}} \right] \quad (4.40)$$

ここでは、 K を制御実施の費用としているため、便益のフローの総和から K の総和を控除している。 τ_i が \mathcal{F}_t^- 停止時刻、 $\Delta\eta_i$ が \mathcal{F}_t^- 可測かつ、任意の時刻 $T \in [0, \infty)$ に対して、

$$P \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i \leq T \right\} = 0 \quad (4.41)$$

が満たされるとき、インパルス制御 v は許容となる。許容制御の集合を \mathcal{A}_{sic} とすると、経済主体の問題は、便益の割引期待現在価値 J_{sic} を最大とする制御 $v \in \mathcal{A}_{sic}$ を求める問題（確率インパルス制御問題）として定式化される。

問題 4.3 (経済主体の問題：確率インパルス制御).

$$V_{sic}(x) = \sup_{v \in \mathcal{A}_{sic}} J_{sic}(x; v) = J_{sic}(x, v^*) \quad (4.42)$$

ただし、 V_{sic} は経済主体の問題の価値関数を、 v^* は最適な制御を表す。

確率インパルス制御問題として定式化された経済主体の問題 (4.42) は、Bensoussan and Lions (1973 b, a) によって導入された準変分不等式 (quasi-variational inequalities:

(QVI) を用いて解くことができる。準変分不等式については、Bensoussan and Lions (1984) も参照されたい。以下、準変分不等式を導出する。

任意の $x, \delta > 0$ に対して、停止時刻 θ を $\theta := \inf\{t > 0; |X_t - x| \geq \delta\}$ と与える。次のような制御を考える。時刻 θ までは制御を実施せず、時刻 θ 以降は最適に制御が実施される。すなわち、 $\tau_i^* \geq \theta$ となる。り、 $\Delta\eta_i^\pm$ は次のように場合分けされる。

$$\Delta\eta_i^\pm = \begin{cases} 0, & t < \theta, \\ \Delta\eta_i^{\pm*}, & t \geq \theta \end{cases} \quad (4.43)$$

十分に小さな δ に対しては、次を得る。

$$\begin{aligned} V_{sic}(x) &\geq J_{sic}(x; v) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t) dt - \sum_{i \geq 1} e^{-r\tau_i} K(\Delta\eta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < \infty\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^\infty e^{-rt} f(X_t) dt - \sum_{i \geq 1} e^{-r\tau_i} K(\Delta\eta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < \infty\}} \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$t \geq \theta$ では、最適な制御が選ばれることから、(4.44) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{sic}(x) &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + \int_\theta^\infty e^{-rt} f(X_t) dt - \sum_{i \geq 1} e^{-r\tau_i^*} K(\Delta\eta_i^*) \mathbf{1}_{\{\tau_i^* < \infty\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} \left[\int_\theta^\infty e^{-r(t-\theta)} f(X_t) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i \geq 1} e^{-r(\tau_i^* - \theta)} K(\Delta\eta_i^*) \mathbf{1}_{\{\tau_i^* < \infty\}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} f(X_t) dt + e^{-r\theta} V_{sic}(X_\theta) \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dynkin の公式を $t = [0, \theta]$ で適用した (4.8) より、次が得られる。

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\theta e^{-rt} (f(X_t) + \mathcal{L}V_{sic}(X_t)) dt \right] \quad (4.46)$$

両辺を $\mathbb{E}[\theta]$ で割り、 $\delta \rightarrow 0$ とすると、

$$0 \geq f(x) + \mathcal{L}V_{sic}(x) \quad (4.47)$$

を得る。

次に, $\tau_1 = 0$, すなわち, 初期時刻 $t = 0$ で制御 $\Delta\eta_1$ が実施され状態変数が $X_{0^-} = x$ から $X_0 = x + \Delta\eta_1$ になり, その後は, 最適に制御が実際されるとしよう。(4.45) は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{sic}(x) &\geq -K(\Delta\eta_1) + \mathbb{E}_{x+\Delta\eta_1} \left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t^{x+\Delta\eta_1}) dt - \sum_{i \geq 2} e^{-r\tau_i^*} K(\Delta\eta_i^*) \mathbf{1}_{\{\tau_i^* < \infty\}} \right] \\ &= -K(\Delta\eta_1) + V_{sic}(x + \Delta\eta_1) \end{aligned} \quad (4.48)$$

ただし, $\mathbb{E}_{\Delta\eta_1}$ は $X_0 = x + \Delta\eta_1$ を条件とした期待値を表し, $X_t^{x+\Delta\eta_1}$ は初期値を $x + \Delta\eta_1$ とした状態変数を表す。ここで, 初期時点での制御 $\Delta\eta_1$ を最適化することを考えると次となる。

$$V_{sic}(x) \geq \sup_{\Delta\eta_1} [-K(\Delta\eta_1) + V_{sic}(x + \Delta\eta_1)] \quad (4.49)$$

今すぐ制御を実施する時に最適な制御規模を求める作用素 (制御作用素) M を次で与えると,

$$MV_{sic}(x) := \sup_{\Delta\eta} [-K(\Delta\eta) + V_{sic}(x + \Delta\eta)] \quad (4.50)$$

(4.49) は, 次のように書き直される。

$$V_{sic}(x) \geq MV_{sic}(x) \quad (4.51)$$

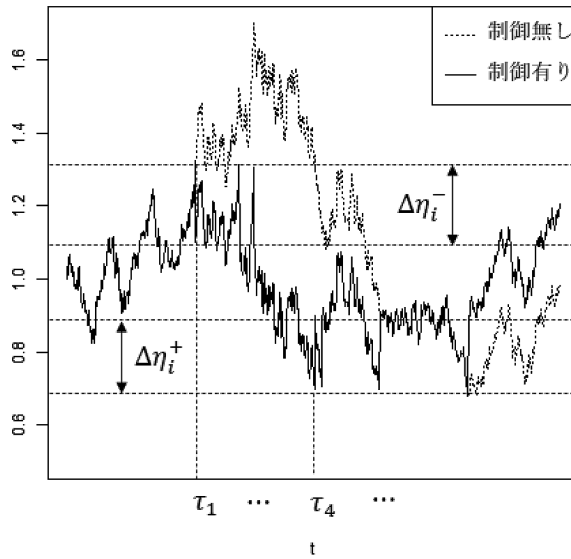
以上をまとめると, 経済主体の問題 (4.42) の準変分不等式は, 次として与えられる。

$$\max\{\mathcal{L}V_{sic}(x) + f(x), MV_{sic}(x) - V_{sic}(x)\} = 0 \quad (4.52)$$

この準変分不等式を用いて, 経済主体の問題 (4.42) を解くことができる。

図4に確率インパルス制御のイメージを表す。制御過程を一定の範囲内に収めるために制御を実施することは, 特異確率制御と同じであるが, 固定費が存在するために制御の回数を増やすよりは, 1度の制御でより制御過程を範囲の内側に押し戻すことになる。したがって, 制御過程が一番上側 (下側) の閾値に到達し時刻 τ_i に $\Delta\eta_i^- (\Delta\eta_i^+)$ の規模の制御を実施し, 制御過程を上 (下) から2番目の閾値まで戻す。したがって, 時刻 τ_i で制御変数は $X_{\tau_i^-}$ から $X_{\tau_i} = X_{\tau_i^-} - \Delta\eta_i^-$ ($X_{\tau_i} = X_{\tau_i^-} + \Delta\eta_i^+$) にジャンプする。これらの閾値は準変分不等式を解くことで得られる。

図4 確率インパルス制御のイメージ



V ま と め

本稿は不確実性下における経済主体の問題を、その問題の特徴に合わせて、それぞれ異なる確率制御問題として定式化した。定式化された経済主体の問題は、動的計画原理あるいは最適性原理と呼ばれる原理を用いて解くことができる。絶対連続制御問題では、動的計画原理から HJB 方程式方程式が導出され、HJB 方程式の解が経済主体の問題の解であることを、verification 定理で確認した。さらに、価値関数が十分に滑らかで無い場合に弱い解概念として導入された粘性解についても考察した。他の経済主体の問題としては、制御を実施する時刻を求める最適停止、状態変数がある範囲内に収めるように制御を実施する特異確率制御・インパルス制御の4種類の確率制御問題について定式化し、問題の解を求める変分不等式あるいは準変分不等式を導出した。実際に経済主体の問題を解くためには、制御過程や便益関数などを特定化する必要がある。それぞれの問題の実際の解き方については、Vollert (2003), Chang (2004), Pham (2009), Stokey (2009), 辻村・前田 (2016) などが具体例が豊富で参考になる。

本稿では、状態変数の将来の水準は確定しておらず、それを確率的な現象として扱った。そこでは暗黙裏に、意思決定者は状態変数が従う確率分布を一意に決められると仮定していた。しかし、現実には確率分布を一意に決められるとは限らない。こうした確率的な現象に対する考察は、Frank Knight によって、リスクと不確実性として分けて考えられた (Knight, 1921)。本稿で考察した経済主体の問題は、Knight の定義によるとり

スク下における問題となる。近年は、Knight 流の不確実性を考慮した経済主体の問題に対する研究が盛んに行われている。確率制御の文脈としては、2000年代以降、意思決定者が考えるモデルに対する不確実性 (model uncertainty) を考慮した頑健な制御問題 (robust control problems) として、Knight 流の不確実性下における意思決定者の問題に対する研究が進められている (Hansen and Sargent, 2001; Hansen et al., 2006; Hansen and Sargent, 2008; 辻村, 2017; Yoshioka and Tsujimura, 2020)。

参考文献

- Abel, A. B., Eberly, J. C., 1996. Optimal investment with costly reversibility. *The Review of Economic Studies* 63, 581-593.
- Al Motairi, H., Zervos, M., 2017. Irreversible capital accumulation with economic impact. *Applied Mathematics & Optimization* 75, 525-551.
- Altarovici, A., Reppen, M., Soner, H. M., 2017. Optimal consumption and investment with fixed and proportional transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization* 55, 1673-1710.
- Bellman, R. E., 1957. *Dynamic programming*. Princeton University Press, New Jersey.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., 1973 a. Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Séries A et B A-B* 276, A 1333-A 1338.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., 1973 b. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Séries A et B A-B* 276, A 1189-A 1192.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., 1973 c. Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles paraboliques. *Applicable Analysis* 3, 267-294.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., 1982. *Applications of variational inequalities in stochastic control*. North-Holland, Amsterdam.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., 1984. *Impulse control and quasi-variational inequalities*. Gauthier-Villars, Hilger, BORDAS.
- Chang, F. R., 2004. *Stochastic Optimization in Continuous Time*. Cambridge University Press, New York, NY.
- Cox, J. C., Huang, C. f., 1989. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of economic theory* 49, 33-83.
- Crandall, M. G., Ishii, H., Lions, P. L., 1992. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society* 27, 1-67.
- Crandall, M. G., Lions, P. L., 1983. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society* 277, 1-42.
- Davis, M. H., Norman, A. R., 1990. Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of operations research* 15, 676-713.
- Dixit, A. K., Pindyck, R. S., 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Federico, S., Rosestolato, M., Tacconi, E., 2019. Irreversible investment with fixed adjustment costs: a stochastic impulse control approach. *Mathematics and Financial Economics* 13, 579-616.
- Fleming, W. H., Soner, H. M., 2006. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- Guo, X., Pham, H., 2005. Optimal partially reversible investment with entry decision and general production function. *Stochastic Processes and their Applications* 115, 705-736.

- Hansen, L., Sargent, T. J., 2001. Robust control and model uncertainty. *American Economic Review* 91, 60-66.
- Hansen, L. P., Sargent, T. J., 2008. *Robustness*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Hansen, L. P., Sargent, T. J., Turmuhambetova, G. A., Williams, N., 2006. Robust control and model misspecification. *Journal of Economic Theory* 128, 45-90.
- Knight, F. H., 1921. *Risk, Uncertainty, and Profit*. Houghton Mifflin, Boston, MA.
- Kobila, T., 1993. A class of solvable stochastic investment problems involving singular controls. *Stochastics and Stochastic Reports* 43, 29-63.
- Korn, R., 1998. Portfolio optimisation with strictly positive transaction costs and impulse control. *Finance and Stochastics* 2, 85-114.
- Merton, R. C., 1971. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
- Øksendal, B., Sulem, A., 2002. Optimal consumption and portfolio with both fixed and proportional transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization* 40, 1765-1790.
- Øksendal, B. K., 2013. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. 6th ed., corr. 6th printing ed., Springer.
- Pham, H., 2009. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*. Number 61 in *Stochastic modelling and applied probability*, Springer.
- Protter, P. E., 2005. *Stochastic integration and differential equations*. Number 21 in *Stochastic modelling and applied probability*. 2nd ed. ed., Springer.
- Shreve, S. E., 2004. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer-Verlag, New York.
- Shreve, S. E., Soner, H. M., 1994. Optimal investment and consumption with transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 609-692.
- Stokey, N. L., 2009. *The economics of inaction: stochastic control models with fixed costs*. Princeton University Press, New Jersey.
- Touzi, N., Tourin, A., 2013. *Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE*. volume 29. Springer.
- Vollert, A., 2003. *A stochastic control framework for real options in strategic evaluation*. Birkhäuser, Boston.
- Yong, J., Zhou, X. Y., 1999. *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*. volume 43. Springer-Verlag, New York.
- Yoshioka, H., Tsujimura, M., 2020. Analysis and computation of an optimality equation arising in an impulse control problem with discrete and costly observations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 366, 112399.
- 飯田耕司, 2006. 意思決定分析の理論：不確実性への挑戦。三恵社。
- 小池茂昭, 2016. 粘性解－比較原理を中心に－。共立出版。
- 辻村元男, 2008. 不確実性下における調整費用を考慮した設備投資。 *オペレーションズ・リサーチ* 53, 603-607.
- 辻村元男, 2011. 不確実下における企業の投資プロジェクトの評価について。 *計測と制御* 50, 987-992. doi:10.11499/sicejl.50.987.
- 辻村元男, 2017. 曖昧性を考慮したプロジェクトへの投資タイミングの決定。 *リアルオプションと戦略* 9, 51-56.
- 辻村元男, 前田章, 2016. *確率制御の基礎と応用*. 朝倉書店。