博士学位論文審査要旨

２０２０年１２月２１日

論 文 題 目： Studies on linear systems and the eigenvalue problem over the max-plus algebra
（Max-plus 代数上の線形方程式系と固有値問題に関する研究）
学位申請者： 西田　優樹
審 査 委 員：
主　査： 理工学研究科　教授　渡邊　芳英
副　査： 龍谷大学大学院理工学研究科　教授　松木平　淳太
副　査： 理工学研究科　教授　川口　周

要　　旨：

Max-Plus 代数は加法として最大値をとる演算，乗法として通常の加法演算をとった代数系である．Max-Plus 代数の起源は，工程計画問題や最短経路問題などのネットワーク最適化問題にあるが，近年は超離散可積分系の研究など様々な分野において重要な役割を果たすことが見いだされている．Max-Plus 代数において特徴的なのは加法に関する逆元が存在しないことであり，そのことが Max-Plus 代数の理論構築において大きな障害となる．

本論文は Max-Plus 代数上の線形代数学において，基本的な問題である線形方程式系の解集合と固有値問題を取り扱っている．本論文ではまず，斉次の線形方程式系のトロピカル幾何学の意味での解を考える．斉次方程式系に対して一つのトロピカル解を与える方法として，Cramer の公式の Max-Plus 類似物が知られているが，適用できる行列には制限がある．本論文では一般の斉次線形方程式のトロピカル解空間の基底を Max-Plus の Cramer の公式を用いて構成できることを示した．Max-Plus 行列の固有値問題は通常，行列に付随する有向グラフを通して議論される．Max-Plus 行列の固有多項式は，重複度を込めて正方行列の次数個の根をもつが，それらの根の中で固有ベクトルを持つものは，一般的には最大根だけであることが知られており，この点が Max-Plus 行列の固有値問題発展の障害となる．本論文では，2 つの視点からこの問題に挑んでいる．最初のものは Max-Plus 行列の Jordan の標準形に関する研究で，Max-Plus 行列に対して一般化固有ベクトルを定義し，それを用いた Jordan の標準形の概念を提唱する．さらに Max-Plus 行列が Jordan の標準形を持つための必要十分条件を行列に付随するグラフの言葉で特徴づけている．次に，固有多項式の根であって固有ベクトルを持たないものに対しても，固有ベクトルと類似の性質をもつベクトルをグラフ理論の立場から代数的固有ベクトルとして定義し，代数的固有ベクトル全体からなる部分空間の次元が根の重複度を超えないことを示している．

以上本論文は，博士（理学）（同志社大学）の学位論文として十分な価値を有するものと認められる．

総合試験結果の要旨

２０２０年１２月２１日

論 文 題 目： Studies on linear systems and the eigenvalue problem over the max-plus algebra
（Max-plus 代数上の線形方程式系と固有値問題に関する研究）
学位申請者： 西田 優樹
審 査 委 員：
主 査： 理工学研究科 教授 渡邊 芳英
副 査： 龍谷大学大学院理工学研究科 教授 松木平 淳太
副 査： 理工学研究科 教授 川口 周

要 旨：
本論文提出者は２０１８年３月同志社大学大学院理工学研究科数理環境科学専攻博士課程（前期課程）を修了後，現在本学大学院理工学研究科数理環境科学専攻博士課程（後期課程）に在籍している．

本論文の主たる内容は Linear and Multilinear Algebra, Linear Algebra and Its Applications および Applications of Mathematics に掲載が決定しており，国際会議 ICIAM 2019，EASIAM 2019 および MAT TRIAD 2019 で発表されて既に十分な評価を得ている．

２０２０年１２月２１日１０時よりおよそ１時間３０分にわたり提出論文に関する学術講演会が行われ，論文の内容に関する種々の質疑応答があり，そのなかで，論文提出者の明解かつ丁寧な説明により，論文に対する十分な理解が得られた．

さらに，講演会終了後，審査委員により，論文に関連した諸問題につき，口頭試問を実施した結果本人の十分な学力を確認することができた．英語およびフランス語については本学在学中にすでに単位を取得していること．さらに，提出論文および７編の論文を英語で執筆したこと，国際学会で５件の英語による講演を行ったことにより，語学，とりわけ英語に関しての学力は十分と認める．

よって総合試験の結果は合格であると認める．

博 士 学 位 論 文 要 旨

論 文 題 目： Studies on linear systems and the eigenvalue problem over the max-plus algebra
（Max-plus 代数上の線形方程式系と固有値問題に関する研究）

氏　　　名： 西田　優樹

要　　　旨：

Max-plus 代数は加法として 2 数の最大値をとる演算，乗法として 2 数の和をとる演算を持つ代数系である．Max-plus 代数は，その起源である生産システムにおける工程計画問題への応用のほか，最短経路問題などのネットワーク最適化問題や箱玉系などの超離散可積分系など多様な応用先を持つことで知られている．一方で，理論的な側面を見ると，max-plus 代数は加法についての逆元を持たない半環と呼ばれる代数系である．このため，max-plus 代数上の線形代数の基礎理論でさえも通常の線形代数と同一の結果が成り立つとは限らず，また未解明の点も数多く残されている．

本論文は，max-plus 代数上の線形代数の中で，特に線形方程式系の解と固有値問題について論ずるものである．本論文における主要な結果は 3 点あり，それらは線形方程式系の解空間の基底の Cramer の公式による特徴づけ，max-plus 正方行列に対する Jordan 標準形の類似物の提案，max-plus 行列の固有多項式の根に付随するベクトルの構成である．

Max-plus 代数上では，等式において移項を行うことができないため，線形方程式系として様々な形のものが考えられ得る．本論文ではその中で，解がトロピカル幾何学の意味で定義された斉次方程式系について議論する．ここで，解をトロピカル幾何学の意味で考えるとは，等式をみたす値ではなく，各式の少なくとも 2 項で最大値を実現するような値を解とみなすということである．斉次方程式系の 1 つの解を求める方法は多数研究されている．最もよく知られているものは，Cramer の公式の max-plus 代数における類似であり，これは解のうち最も良い性質をもつものを与える．一方で，すべての解を求める方法については，方程式の数を逐次的に増加させ解空間を狭めるアルゴリズムが知られている．

そこで本論文では，斉次線形方程式系の解空間の基底を，方程式系を定義する行列によって直接的に特徴づける方法を与える．そのために用いるのが，Cramer の公式の max-plus 代数における類似である．通常，Cramer の公式は限られたサイズの行列にしか適用することはできないが，本論文では，方程式を定義する行列の小行列のうち，可能なものすべてに Cramer の公式を適用することで，解空間の基底を計算できることを示した．この事実の証明は構成的であり，解の基底に含まれるそれぞれのベクトルに対して，対応する小行列を具体的に特定できる．このことにより，線形方程式系の解空間の代数的な特徴づけが得られている．

Max-plus 代数上の固有値問題は，正方行列と重み付き有向グラフとの 1 対 1 の対応を通して議論されることが多い．これまでに知られている最も有名な結果は，行列の最大固有値とグラフの最大平均閉路重みが一致することである．一方で，ほとんどの行列に対しては，固有値はこの 1 つしか存在せず，対応する固有ベクトルも 1 つしか存在しない．これは，通常の線形代数の場合とは大きく異なる事実である．そこで，本論文では，max-plus 行列の固有値や固有ベクトルの概念を拡張し，2 つの視点からこの問題点を解決する．

通常の線形代数においては，1 次独立な固有ベクトルの数が行列の次数より小さい場合は対角化不可能であるが，一般化固有ベクトルを用いることで Jordan 標準形へと変形することが可能である．本論文ではこの考えに基づき，max-plus 行列に対して一般化固有ベクトルを定義し，

行列の Jordan 標準形を提案する．Max-plus 代数においては，固有ベクトルから一般化固有ベクトルへと拡張してもなお1次独立なベクトルの数が少ない場合が多く，すべての行列がJordan標準形を持つわけではない．本論文では，max-plus 正方行列が Jordan 標準形を持つための必要十分条件を，グラフを用いて特徴づけることに成功した．

通常の線形代数では，行列の固有値と固有多項式の根は完全に一致する．一方で，max-plus 代数においては，固有多項式の根は重複度を込めれば行列の次数と同じだけあるものの，そのうち最大のもの以外は行列の固有値となるとは限らない．そこで本論文では，固有値ではない固有多項式の根を，固有値の代わりとして扱うための手法を開発する．具体的には，これらの固有多項式の根に付随するベクトルを構成し，それが固有ベクトルと類似の性質を持つことを示す．このようにして構成されたベクトルを本論文では代数的固有ベクトルと呼ぶ．まず，代数的固有ベクトルの定義方程式が固有ベクトルの定義方程式の拡張であることを確認し，固有ベクトルも代数的固有ベクトルの１つとみなせることを示す．次に，代数的固有ベクトルの全体が max-plus 代数上の線形空間であることを示す．さらに，各根に属する1次独立な代数的固有ベクトルの数が，その根の固有多項式における重複度以下であることを導く．この結果は，通常の線形代数における固有値の幾何学的重複度が代数的重複度以下であることの類似となっており，先の一般化固有ベクトルや Jordan 標準形と合わせて，max-plus 代数上の行列の対角化理論への展望を開くものとなっている．