

Criteria for Recoverability of Rectangular Polyhedra in Terms of Linear Programming

Masaaki AMINO^{*}, Yuki NISHIDA^{**} and Yoshihide WATANABE^{***}

(Received April 2, 2019)

A rectangular polyhedron is a polyhedron whose corners consist of three mutually perpendicular faces. In the present paper, we consider the recoverability problem of a rectangular polyhedron from a given labeled line drawing that has certain special properties. Here the labels attached to junctions signify the 3D structures around them. Since the orthogonality constraints are quadratic, that is, not linear and it is hard to deal with, we relax the orthogonality constraints into the parallel constraints so that they become linear. Then our problem is changed to the recoverability of parallel polyhedra. The recoverability of parallel polyhedra is reduced to the existence of a feasible solution of the linear programming problem. Further, we prove that the recoverability of parallel polyhedra is equivalent to that of rectangular polyhedra by constructing a label preserving affine transformation from a parallel polyhedron to a rectangular polyhedron under the suitable conditions for angles between lines in the drawings.

Key words : 3D recovery, rectangular polyhedra, linear programming

キーワード : 3次元復元, 直交多面体, 線形計画問題

線形計画法を用いた直交多面体の復元可能性の判定

網野 誠晃, 西田 優樹, 渡邊 芳英

1. はじめに

一般に, コンピュータは3次元の物体を2次元の画像として認識している. そのため, 与えられた画像が3次元の物体として復元できるかできないかを考えることはコンピュータビジョンにおける重要な課題の1つである. 物体の3次元復元について, 多面体の場合には与えられた2次元画像(線画という)に対して3次元形状を局所的に表現するラベルを付与する方法が知られている. このようなラベル付けのうち最初に考案されたものが Huffman¹⁾ と Clowes²⁾ による Huffman-Clowes 辺

ラベルであり, 線画に描かれた辺を凸線, 凹線, 輪郭線の3種類に分類している. その後, Huffman-Clowes 辺ラベルに対して, 影のある線画の場合³⁾, 裏側に隠れた辺を考慮した場合⁴⁾, 厚みのない立体を考慮した場合⁵⁾ などいくつかの変種が提案されている. このような種々のラベルにおいて, 無矛盾なラベル付けが可能であることは線画が多面体として復元可能であるための必要条件となっている. 一方で, 線画から多面体が復元可能であるための必要十分条件が杉原によって与えられている⁶⁾. これは Huffman-Clowes 辺ラベルによって遠近関係が与えられた線画に対して, 頂点と面の対応を1次方程式で, 復元時の遠近関係を1次不等式でそれぞれ

* RAKUNAN Elementary School, Kyoto

** Graduate School of Science and Engineering, Science of Environment and Mathematical Modeling, Doshisha University, Kyoto

*** Department of Mathematical Science, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6298, E-mail : yowatana@mail.doshisha.ac.jp

記述することで、復元可能性の判定を線形計画問題の実行可能解の有無の判定に帰着させている。この手法のその後の発展については杉原による本⁷⁾にまとめられている。

本論文では杉原の提案した必要十分性の判定手法を、直交多面体、すなわち各頂点が3つの互いに直交する面で構成される多面体としての復元可能性の判定に用いる。その際に重要な点は以下の2つである。1つは Huffman-Clowes 辺ラベルではなく金谷のラベル⁸⁾を与えて、そのラベル付けから遠近関係を表す不等式を導くことである。金谷のラベルは与えられた線画が直交多面体の垂直投影で得られているという仮定のもとでのラベル付けであり、Huffman-Clowes 辺ラベルと比較して頂点同士の前関係を直接的にあらわしている。もう1つの点は、復元した面の平行性を表す式を制約式に追加したことである。直交多面体としての復元可能性を判定することを目的としているにもかかわらず、それよりも弱い平行性の条件を制約式に加えた理由は、2つの面が直交するという制約式は平面の方程式の係数についての2次式となり、復元可能性の判定を線形計画問題に帰着させることができないからである。一方で、2つの面が平行であるという制約式は平面の方程式の係数についての1次式で表せるので、ひとまず制約を直交性から平行性に緩めた問題を考える。ここで考えるような3組の平行な面で構成される多面体を平行多面体という。このような制約式の緩和は、直交多面体ではなく、平行多面体としての復元可能性を考えることに相当する。本論文の主要な結果は、上述した制約式の緩和が、線画に対する適当な仮定の下では直交多面体としての復元可能性に影響を与えないこと、言い換えると、直交多面体としての復元可能性は平行多面体としての復元可能性と同値であることを示すことである。このことは、ラベル付けられた線画を不変にするようなアフィン変換であって、平行多面体を直交多面体へ変換するものの存在を保証することによって示される。

2. 直交多面体とその線画

本論文では xyz 座標空間にある多面体の xy 平面への垂直投影を考え、以下のことを仮定する。

- 投影される多面体は一般の位置にある。すなわち z 軸に平行な面は存在しない。

- 視点は z 軸の正の方向の無限遠にあり、そこから見て多面体の裏側にある部分は投影図に表れない。

このとき、投影図は線画といわれる有限個の線分からなる図形となる。本論文では主に直交多面体、すなわち各頂点が3つの互いに直交する面で構成される多面体を考える。直交多面体の垂直投影によって得られる線画には次のような特徴がある⁸⁾。

- (R1) 各線分は3方向のいずれかに分類される。
- (R2) 線画上の線分の端点における線分の接続のしかたは以下の4通りに限られる (Fig. 1).
 - (a) 3つの線分が接続し、2つの線分のなす角はすべて $\frac{\pi}{2}$ より大きく、 π より小さい。
 - (b) 3つの線分が接続し、2つの線分のなす角は1つが $\frac{\pi}{2}$ より大きく π より小さく、他の2つは $\frac{\pi}{2}$ より小さい。
 - (c) 2つの線分が接続し、それらのなす角は $\frac{\pi}{2}$ でも π でもない。
 - (d) 3つの線分が接続し、そのうちある2つの線分のなす角がちょうど π である。

ただし、2辺のなす角は常に小さいほうを考えるものとする。(a)~(c)を第1種の節点、(d)を第2種の節点といい合わせて単に節点という。また、(a)をフォーク型の節点、(b)をアロー型の節点という。

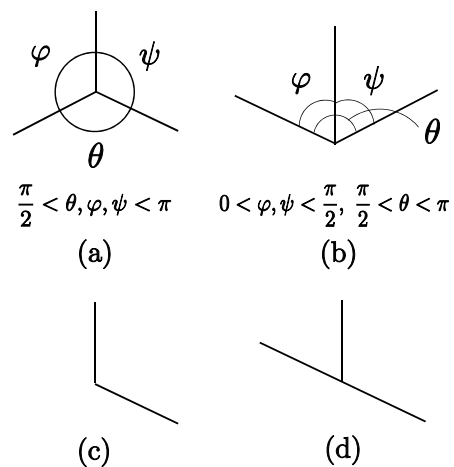


Fig. 1. Four types of junctions.

複数の直交多面体が空間に配置されている場合も、それらが同じ向きを向いていることを仮定すれば (R1) と

(R2)が満たされる．そこで，本論文では特徴(R1), (R2)をみたく線画からの復元可能性を考える．線画から(直交)多面体が復元可能であるとは，その線画がある(直交)多面体の垂直投影図に一致することをいう．

3. 線画のラベル付け

特徴(R1), (R2)をみたく線画に対して，3方向の正の向きをフォーク型で固定し1, 2, 3と番号づけ，それぞれ1軸，2軸，3軸と呼ぶ(Fig. 2)．

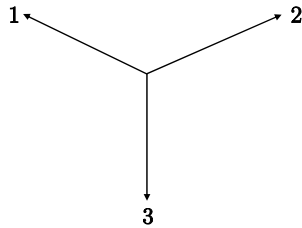


Fig. 2. Fork coordinate system.

線画上の第1種の節点Aにおける3次元構造の情報は，以下のように整理される．まず，第1種の節点における線分の出方の情報を $c_A = (c_A^{(1)} c_A^{(2)} c_A^{(3)})$ で表し，

$$c_A^{(k)} = \begin{cases} 0 & (k \text{ 軸の正の向きに線分が出ていく}) \\ 1 & (k \text{ 軸の負の向きに線分が出ていく}) \end{cases}$$

で定義する．次に， k 軸と平行な線分の復元で得られる辺を k 辺と呼ぶ．節点Aを復元した頂点A'における辺の見え方を $p_A = (p_A^{(1)} p_A^{(2)} p_A^{(3)})$ で表し，

$$p_A^{(k)} = \begin{cases} 0 & (k \text{ 辺が視点から遠ざかっていく}) \\ 1 & (k \text{ 辺が視点に近づいていく}) \end{cases}$$

で定義する．さらに，頂点A'のまわりで k 辺と l 辺が作る面を kl 面と呼ぶ，このとき，復元した際の面の角度を $s_A = (s_A^{(23)} s_A^{(13)} s_A^{(12)})$ で表し

$$s_A^{(kl)} = \begin{cases} 0 & (A' \text{ における } kl \text{ 面の角度が } \frac{\pi}{2}) \\ 1 & (A' \text{ における } kl \text{ 面の角度が } \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

で定義する．このようにして得られる c, p, s の3つ組を金谷のラベル⁸⁾という．節点Aに接続する線分が2本しかない場合も，裏側にあるもう1本の辺の向きを仮定してラベルを付けることに注意する．金谷のラベルは以下の性質をみたくすようにつけられる．

1. Fig. 2に示した座標系を用いるとき，第1種の節点におけるラベル p と s は Fig. 3の8つおよびそれ

らの番号の入れ替えで得られるものに限られる(可視条件)．ただし，記号*は0であるか1であるかが不定であることを表す．

2. 第1種の節点Aにおいて， s_A の成分のうち1は高々1つしかない．
3. 第1種の節点A, Bに対して

$$p_B = p_A \oplus c_A \oplus c_B$$

が成り立つ．ただし，記号 \oplus は(成分ごとの) mod 2での和を表す．

4. k 軸に平行な線分で接続している2つの隣接した第1種の節点A, Bに対して

$$s_B^{(kl)} = s_A^{(kl)} \oplus c_A^{(l)} \oplus c_B^{(l)} \quad (l \neq k)$$

が成り立つ．

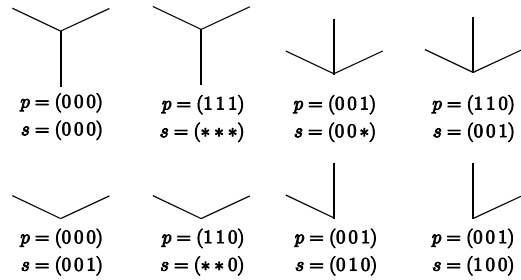


Fig. 3. Visibility conditions.

例 3.1. Fig. 4の線画に対するラベル付けの一例は Table 1で与えられる．なお，第2種の節点 u_3 にはラベルを付けない．

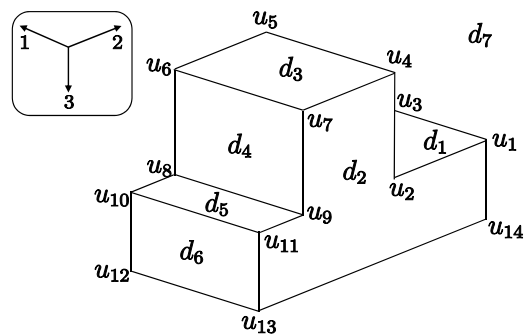


Fig. 4. Example of line drawings.

線画に対して金谷のラベルが矛盾なくつけられることは，与えられた線画が直交多面体として復元可能であ

Table 1. Kanatani's labels.

Junction	Label c	Label p	Label s
u_1	(010)	(010)	(000)
u_2	(001)	(001)	(100)
u_4	(010)	(010)	(000)
u_5	(110)	(110)	(000)
u_6	(100)	(100)	(000)
u_7	(000)	(000)	(000)
u_8	(111)	(111)	(100)
u_9	(011)	(011)	(100)
u_{10}	(100)	(100)	(000)
u_{11}	(000)	(000)	(000)
u_{12}	(101)	(101)	(000)
u_{13}	(001)	(001)	(000)
u_{14}	(011)	(011)	(000)

るための必要条件である。しかし一般には十分条件にはなっておらず、また1つの線画に対して複数のラベル付けが可能であることもあり得る。そこで、本論文では線画に対してラベルを与えたいので、そのラベル付けを実現する直交多面体が存在するかを判定する必要十分条件を考えていく。

4. 多面体の復元可能性の判定問題

この節では線画の復元可能性の必要十分条件を与える杉原の方法⁶⁾を紹介する。なお、この節では多面体は直交多面体に限定しない。

4.1 立体復元方程式

与えられた線画 D に描かれている節点の全体からなる集合を U とし、それらに1から $|U|$ まで通し番号をつけて $u_1, u_2, \dots, u_{|U|}$ とおく。節点 u_i の線画上での座標を (x_i, y_i) とすると、 x_i, y_i は既知の実数値である。与えられた線画が立体復元可能であるとして、点 u_i を復元して得られる頂点を v_i とおき、その座標を (x_i, y_i, z_i) とする。このとき z_i だけが未知数である。次に、 xy 平面全体が線画上の線分によって有限個の領域 d_1, d_2, \dots に分割されているとし、 d_j を復元して得られる面を f_j とする。面 f_j は平面多角形であり、それを含む平面の方程式を

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0 \quad (1)$$

とする。多面体には、 z 軸に平行な平面はないと仮定するので、式(1)のように z の係数を1としてよい。与えられた線画から頂点 v_i が面 f_j 上にあることが線画から読み取れたとすると、面 f_j の方程式に頂点 v_i の座標を代入したものが成り立つため

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0$$

が得られる。 x_i, y_i は既知の定数のため、この式は未知数 a_j, b_j, c_j, z_i に関して線形な方程式であり、面とその上の頂点のすべての対に対して同様の1次方程式が得られる。それをすべてまとめると連立1次方程式が得られる。その連立方程式は、未知数を並べたものを

$$\mathbf{w} = {}^t(z_1, \dots, z_{|U|}, a_1, b_1, c_1, \dots, a_{|F|}, b_{|F|}, c_{|F|})$$

とし、係数行列を A とすると

$$A\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (2)$$

と表すことができる。式(2)を立体復元方程式という。

4.2 遠近不等式

復元によって得られる物体の頂点や面の前後関係は、未知数を並べたベクトル

$$\mathbf{w} = {}^t(z_1, \dots, z_{|U|}, a_1, b_1, c_1, \dots, a_{|F|}, b_{|F|}, c_{|F|})$$

を用いて等号なしの線形不等式

$$B\mathbf{w} > \mathbf{0} \quad (3)$$

および等号付きの線形不等式

$$C\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4)$$

の形で与えられることが多い。不等式(3), (4)を合わせて遠近不等式という。杉原は線画に与えられた Huffman-Clowes 辺ラベル^{1, 2)}から遠近不等式を導いている⁶⁾。線画が特徴(R1), (R2)をみたしているときに、金谷のラベルから遠近不等式を導く方法を5.1節で説明する。

4.3 線形計画問題

与えられた線画が多面体を表すか否かという判定問題は式(2)-(4)が解をもつか否かという判定問題となる。このうち等号を含まない不等式(3)の扱いが難しいので、正の数 ϵ に対して不等式

$$B\mathbf{w} \geq \begin{pmatrix} \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (5)$$

を考える。このとき以下が成り立つ。

命題 4.1. 式 (2)-(4) を満たす解が存在することと式 (2), (4), (5) を満たす解が存在することは同値である.

命題 4.1 より式 (2)-(4) の代わりに式 (2), (4), (5) を考えればよい. これによって, 多面体として立体復元可能であるか否かの判定は, 次のような線形計画問題の実行可能解の有無を判定する問題に帰着される.

- 目的関数: maximize $\sum_{i=1}^{|U|} z_i$
- 制約条件: $A\mathbf{w} = \mathbf{0}, B\mathbf{w} \geq \begin{pmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}, C\mathbf{w} \geq \mathbf{0},$
 $z_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, |U|).$

ここで, 目的関数および追加の制約式は解が有界になるように設定した.

5. 直交多面体としての復元可能性の判定問題

この節では, 特徴 (R1), (R2) をみたま線画に金谷のラベルが付与されたものを単に線画と呼ぶことにする. ここでは, 前節で述べた杉原の方法を改良することによって, 与えられた線画の直交多面体として復元可能性の判定を線形計画問題の実行可能解の有無を調べることに帰着させる.

5.1 金谷のラベルの解釈

まず, 節点 u_i とそのまわりの領域 d_j の対応について調べる. 節点 u_i が第 1 種の節点で, 領域 d_j が u_i のまわりでは k 軸に平行な線分と l 軸に平行な線分で構成されているとする. このとき u_i を復元して得た頂点 v_i が, d_j を復元して得た面 f_j 上にあるための必要十分条件は以下のいずれかが成り立つことである.

1. 節点 u_i における領域 d_j の角度が π より小さく, かつ $s_{u_i}^{(kl)} = 0$ である.
2. 節点 u_i における領域 d_j の角度が π より大きく, かつ $s_{u_i}^{(kl)} = 1$ である.

例 5.1. Fig. 4 において $s_{u_5}^{(12)} = 0$ であり, 節点 u_5 の周りの角度は領域 d_3 の側で π より小さく, 領域 d_7 の側で π より大きい. よって, 節点 u_5 を復元した頂点 v_5 は領域 d_3 を復元して得た面 f_3 上にあり, また領域 d_7 を復元して得た面 f_7 上にはない.

頂点 v_i が面 f_j 上にあるとき,

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \quad (6)$$

が成り立つ. 一方で, 頂点 v_i が面 f_j 上にないときは面 f_j は頂点 v_i よりも視点から遠い側にあり,

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0 \quad (7)$$

が成り立つ.

節点 u_i が第 2 種の節点であるとき, u_i のまわりの領域を $d_{j_1}, d_{j_2}, d_{j_3}$ とする. 節点 u_i において領域 d_{j_1} の角度が π であるとき, 頂点 v_i は面 f_{j_1} 上にある. すなわち

$$a_{j_1} x_i + b_{j_1} y_i + z_i + c_{j_1} = 0 \quad (8)$$

が成り立つ. このとき, 面 f_{j_2} と面 f_{j_3} は頂点 v_i よりも視点から遠い側にあり,

$$a_{j_m} x_i + b_{j_m} y_i + z_i + c_{j_m} > 0 \quad (m = 2, 3) \quad (9)$$

が成り立つ. なお, これらをすべての節点について確認したのちに式 (6), (8) に一度も現れなかった面については, 何の制約もないことになるので以降では考えなくてよい (背景として扱うことができる).

例 5.2. Fig. 4 の線画のラベルが Table 1 で与えられているとき, $s_{u_1} = (000)$ より

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + z_1 + c_1 = 0 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + z_1 + c_2 = 0 \\ a_7 x_1 + b_7 y_1 + z_1 + c_7 > 0 \end{cases}$$

が成り立つ. また第 2 種の節点 u_3 については

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + z_1 + c_1 > 0 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + z_1 + c_2 = 0 \\ a_7 x_1 + b_7 y_1 + z_1 + c_7 > 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

次に, 頂点同士の前関係を表す不等式の導出方法を説明する. 第 1 種の節点 u_{i_1} が節点 u_{i_2} と k 軸に平行な線分で接続しているとする. このとき, $p_{u_{i_1}}^{(k)} = 0$ であれば頂点 v_{i_1} は頂点 v_{i_2} よりも視点に近い側にあり, $p_{u_{i_1}}^{(k)} = 1$ であれば頂点 v_{i_1} は頂点 v_{i_2} よりも視点から遠い側にある. 視点 z 軸の正の方向の無限大にあることに注意して, 頂点 v_{i_1} が頂点 v_{i_2} よりも視点に近いこと, あるいは視点から遠いことを不等式で表すとそれぞれ

$$z_{i_1} > z_{i_2} \quad (10)$$

$$z_{i_1} < z_{i_2} \quad (11)$$

となる.

例 5.3. Fig. 4 の線画のラベルが Table 1 で与えられているとき, $p_{u_1} = (010)$ より $z_1 < z_2$ である.

以上より, 未知数を並べたベクトルを

$$\mathbf{w} = {}^t(z_1, \dots, z_{|U|}, a_1, b_1, c_1, \dots, a_{|F|}, b_{|F|}, c_{|F|})$$

とし, 式 (6), (8) をまとめて

$$A\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

式 (7), (9), (10), (11) をまとめて

$$B\mathbf{w} > \mathbf{0}, \quad (13)$$

とすればよい. さらに, 4.3 節で述べたように正の定数 e を用いて式 (13) を

$$B\mathbf{w} \geq \begin{pmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix} \quad (14)$$

と書き換える.

5.2 平行多面体としての復元可能性

復元される立体が直交多面体であるとき, 領域 d_{j_1} と領域 d_{j_2} が第 1 種の節点で隣接すれば 2 つの面 f_{j_1} と f_{j_2} は直交し,

$$a_{j_1}a_{j_2} + b_{j_1}b_{j_2} + 1 = 0$$

が成り立つ. これは 2 次式であるのでこの条件を立体復元方程式 (12) に追加すると, 制約条件が線形でないため, 線形計画問題に帰着させることができない. そこで, 直交多面体として復元できるという条件を緩め, 平行多面体としての復元可能性の判定問題を考える. ここで, 平行多面体とは 3 組の平行な面で構成される多面体のことである. 平行多面体として復元可能か否かを判定するため, 同じ向きの面の組を調べる. はじめに述べたように, 線画が 2 つの物体が描かれた投影図である場合には, 2 つの物体が同じ向きを向いていることを仮定しておく. 領域 d_{j_1} と領域 d_{j_2} が同じ軸から構成されているならば, これらを復元した面 f_{j_1} と f_{j_2} は平行である. このとき, 平面の方程式の z の係数を 1 としていることに注意すれば $a_{j_1} = a_{j_2}, b_{j_1} = b_{j_2}$ が成り立つ. これらの条件を式 (12) に加えたものを

$$A'\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (15)$$

とする.

例 5.4. Fig. 4 において, 面 f_1, f_2, \dots, f_6 を 3 つ平行な面の組 $\{f_1, f_3, f_5\}$, $\{f_4, f_6\}$ および $\{f_5\}$ に分けることができるので, 制約式

$$a_1 = a_3 = a_5, \quad b_1 = b_3 = b_5,$$

$$a_4 = a_6, \quad b_4 = b_6$$

が成り立つ.

命題 4.1 を書き換えて次の定理を得る.

定理 5.5. 金谷のラベルが与えられた線画を垂直投影図にもつ平行多面体が存在することは式 (14), (15) が解をもつことと同値である.

5.3 直交多面体へのアフィン変換

前節で述べた直交性から平行性への制約の緩和を正当化するために, 特徴 (R1), (R2) をみたらラベル付き線画においては, 平行多面体としての復元可能性と直交多面体としての復元可能性が同値であることを示す. 線画が与えられたときに, 平行多面体として復元可能でないならば, 直交多面体として復元可能でないことは自明であるから, 平行多面体として復元可能なとき, 直交多面体として復元可能なことを示すために, 復元した平行多面体を直交多面体にうつすアフィン変換の存在条件を調べる. 一般に, 線画を変えないようなアフィン変換は $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

と表すことができる. ただし, 多面体の表と裏をかえないことから $\gamma > 0$ である. そこで, このアフィン変換によって線画のラベル p が変わらないための条件を調べる. 2 点 ${}^t(x_1, y_1, z_1), {}^t(x_2, y_2, z_2)$ が同一直線上にあるとし, その直線方向ベクトルを ${}^t(p, q, 1)$ と仮定すると

$$\frac{x_1 - x_2}{p} = \frac{y_1 - y_2}{q} = z_1 - z_2$$

が成り立つ. 変換後の z 座標の差を考えると

$$\begin{aligned} z'_1 - z'_2 &= \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) + \gamma(z_1 - z_2) \\ &= (\alpha p + \beta q + \gamma)(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

となるので頂点どうしの前後関係を変えないためには

$$\alpha p + \beta q + \gamma > 0$$

であればよい. また, ラベル s はこのアフィン変換で不変であることが容易に示される. よって線画の復元

によって得られた平行多面体 P の辺の方向ベクトルを $(p_k, q_k, 1) (k = 1, 2, 3)$ とするとき, P をアフィン変換

$$(*) \begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \\ \alpha p_k + \beta q_k + \gamma > 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ \gamma > 0 \end{cases}$$

によってうつした P' はもとの P と同じラベル付きの線画を持つ. この変換で P から直交多面体得られるための条件は次のようになる.

定理 5.6. 辺の方向ベクトルが ${}^t(p_k, q_k, 1) (k = 1, 2, 3)$ であるような平行多面体 P が与えられたとき,

$$P \text{ を直交多面体に変換するアフィン変換 } (*) \text{ がある} \\ \iff p_k p_l + q_k q_l < 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, k \neq l).$$

証明. 方向ベクトルが ${}^t(p_k, q_k, 1)$ である直線をアフィン変換によって写すと, 変換後の直線の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ \alpha p_k + \beta q_k + \gamma \end{pmatrix}$$

となる. 変換後の3つの直線が互いに直交するための条件は, $k \neq l$ に対して

$$p_k p_l + q_k q_l + (\alpha p_k + \beta q_k + \gamma)(\alpha p_l + \beta q_l + \gamma) = 0 \quad (16)$$

が成り立つことである. そこで,

$$\begin{cases} \alpha p_k + \beta q_k + \gamma > 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ \gamma > 0 \end{cases} \quad (17)$$

と式 (16) を満たすような α, β, γ が存在するための必要十分条件が $p_i p_j + q_i q_j < 0$ であることを示す.

1. 必要性: 式 (16), (17) より

$$p_k p_l + q_k q_l = -(\alpha p_k + \beta q_k + \gamma)(\alpha p_l + \beta q_l + \gamma) < 0$$

である.

2. 十分性: $p_k p_l + q_k q_l < 0 (k, l = 1, 2, 3, k \neq l)$ であ

るとき,

$$\alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma = \sqrt{-\frac{(p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_3 p_1 + q_3 q_1)}{(p_2 p_3 + q_2 q_3)}} \quad (18)$$

$$\alpha p_2 + \beta q_2 + \gamma = \sqrt{-\frac{(p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_2 p_3 + q_2 q_3)}{(p_3 p_1 + q_3 q_1)}} \quad (19)$$

$$\alpha p_3 + \beta q_3 + \gamma = \sqrt{-\frac{(p_2 p_3 + q_2 q_3)(p_3 p_1 + q_3 q_1)}{(p_1 p_2 + q_1 q_2)}} \quad (20)$$

をみたすような α, β, γ をとる. 仮定より根号の中はすべて正だから α, β, γ はすべて実数であり, 行列

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{pmatrix}$$

が正則なのでこのような α, β, γ はちょうど1組存在する. このとき式 (17) が成り立つことは明らかである. また, 式 (18)-(20) のいずれか2つをかけることで, 式 (16) が成り立つことも確認できる. 最後に $\gamma > 0$ であることを示す. 行列 M の3列目を式 (18)-(20) の右辺で置き換えた行列を M' とすると, Cramer の公式より

$$\gamma = \frac{\det M'}{\det M}$$

である. ここで, $\det M$ と $\det M'$ の符号を調べる. 平面上の3つのベクトル $\mathbf{p}_1 = {}^t(p_1, q_1), \mathbf{p}_2 = {}^t(p_2, q_2), \mathbf{p}_3 = {}^t(p_3, q_3)$ を考え, \mathbf{p}_k から \mathbf{p}_l へ測った角を θ_{kl} とする. 仮定より

$$\cos \theta_{kl} = \frac{p_k p_l + q_k q_l}{|\mathbf{p}_k| |\mathbf{p}_l|} < 0$$

だから, 必要ならベクトルの順番を入れ換えることにより $\frac{\pi}{2} < \theta_{kl} < \pi (k \neq l)$ としてよい. このとき,

$$\begin{aligned} \det M &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_2 q_3 - p_3 q_2) + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \\ &= |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \sin \theta_{12} + |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| \sin \theta_{23} + |\mathbf{p}_3| |\mathbf{p}_1| \sin \theta_{31} \end{aligned}$$

より $\det M > 0$ である. 一方,

$$\begin{aligned} \det M' &= -\sqrt{-(p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_2 p_3 + q_2 q_3)(p_3 p_1 + q_3 q_1)} \\ &\quad \cdot \left(\frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_1 p_2 + q_1 q_2} + \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_2 p_3 + q_2 q_3} + \frac{p_3 q_1 - p_1 q_3}{p_3 p_1 + q_3 q_1} \right) \\ &= -\sqrt{-(p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_2 p_3 + q_2 q_3)(p_3 p_1 + q_3 q_1)} \\ &\quad \cdot (\tan \theta_{12} + \tan \theta_{23} + \tan \theta_{31}) \end{aligned}$$

より $\det M' > 0$ である. よって $\gamma > 0$ が示された. 以上より平行多面体 P を直交多面体にうつすアフィン変換 (*) が存在することがわかった. \square

定理 5.7. 線画が特徴 (R1), (R2) をみたすとき, 復元された平行多面体の直線の方向ベクトルを ${}^t(p_k, q_k, 1)$ ($k = 1, 2, 3$) とすると, $p_k p_l + q_k q_l < 0$ が成り立つ.

証明. ラベル p が (111) であるような第 1 種の節点に対して定理を示す. 他のタイプのラベル p の場合も同様である. この節点から出る 3 つの線分の向きを

$$\mathbf{p}'_1 = {}^t(p'_1, q'_1), \mathbf{p}'_2 = {}^t(p'_2, q'_2), \mathbf{p}'_3 = {}^t(p'_3, q'_3)$$

とすると, 節点がフォーク型であることから

$$p'_k q'_l + q'_k q'_l < 0 \quad (k \neq l) \quad (21)$$

が成り立つ. また, ラベル p が (111) であることから復元した頂点においてすべての辺が視点に近づくので, 3 つの辺の方向ベクトルは $r'_1, r'_2, r'_3 > 0$ を用いて

$${}^t(p'_1, q'_1, r'_1), {}^t(p'_2, q'_2, r'_2), {}^t(p'_3, q'_3, r'_3)$$

と表される. よって, ベクトルの順番を適当に入れ換えれば

$$\begin{aligned} {}^t(p'_1, q'_1) &= r'_1 {}^t(p_1, q_1), \\ {}^t(p'_2, q'_2) &= r'_2 {}^t(p_2, q_2), \\ {}^t(p'_3, q'_3) &= r'_3 {}^t(p_3, q_3) \end{aligned}$$

としてよい. これと式 (21) を合わせて, $r'_1, r'_2, r'_3 > 0$ に注意すれば

$$p_k p_l + q_k q_l < 0 \quad (k \neq l)$$

を得る. \square

定理 5.5, 5.6, 5.7 をあわせると本論文の主結果である次の定理が得られる. この定理により, 直交多面体としての復元可能性の判定は 4.3 節で述べたような線形計画問題に帰着される.

定理 5.8. 線画が直交多面体として復元可能であることの必要十分条件は式 (14), (15) が解をもつことである.

6. まとめ

本論文では, 直交多面体から得られる線画が持つべき特徴として (R1), (R2) を抽出し, この性質を持つ線画の直交多面体としての復元可能性の判定問題を考えた. まず, 一般の多面体の場合に知られている杉原の方法において Huffman-Clowes 辺ラベルのかわりに直交多面体の復元問題で用いられる金谷のラベルを用いて復元可能性を論ずることにした. 次に, 面の直交性をそのままの形で表すと制約条件式が 2 次式となり扱いが難しいの

で, 直交性の代わりに平行性を仮定して, 復元可能性の判定を線形計画問題に帰着させた. さらに, 特徴 (R2) において記述される角度制約を用いることにより, 復元された平行多面体を直交多面体にうつすアフィン変換であって, ラベルを保つようなものが構成できることを示した. このことにより, 特徴 (R1), (R2) をみたす線画については, 平行多面体としての復元可能性と直交多面体としての復元可能性は同値になり, 直交多面体としての復元可能性の判定を線形計画問題に帰着させて解くことができることがわかる. 一方で本論文の方法では, 複数の直交多面体の像を含む線画が与えられたとき, 復元で得られる直交多面体はすべて同じ向きを向いていることを仮定して, 復元可能性の議論を進めるしかないが, この仮定はかなり強いものである. 任意に配置された複数の多面体の線画が与えられた場合に, その線画からの直交多面体としての復元可能性を論じることは今後の課題である.

参考文献

- 1) D. A. Huffman, Impossible Objects as Nonsense Sentences, in B. Metzger, D. Michie (eds.), *Machine Intelligence 6*, (Edinburgh University Press, Edinburgh, 1971), pp. 295–323.
- 2) M. B. Clowes, “On Seeing Things”, *Artificial Intelligence*, **2**[1], 79–116 (1971).
- 3) D. Waltz, Understanding Line Drawings of Scenes with Shadows, in P. H. Winston (ed.), *The Psychology of Computer Vision*, (McGraw-Hill, New York, 1975), pp. 19–71.
- 4) K. Sugihara, “Picture Language for Skeletal Polyhedra”, *Computer Graphics and Image Processing*, **8**[3], 382–405 (1978).
- 5) T. Kanade, “A Theory of Origami World”, *Artificial Intelligence*, **13**[3], 279–311 (1980).
- 6) K. Sugihara, “A Necessary and Sufficient Condition for a Picture to Represent a Polyhedral Scene”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**[5], 578–586 (1984).
- 7) K. Sugihara, *Machine Interpretation of Line Drawings*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990).
- 8) K. Kanatani, “The Constraints on Images of Rectangular Polyhedra”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **8**[4], 456–463 (1986).