経済成長モデルと貨幣，資産価格（1）

植　田　宏　文

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　Ramsey モデル
Ⅲ　鞍点均衡と資産価格の変動
Ⅳ　世代重複モデルと動学的非効率性
Ⅴ　小括

Ⅰ　はじめに

マクロ経済成長理論は，ケインズの『一般理論』によってマクロ経済学的な手法が確立し幅広く展開された。その後，新古典派による動学的一般均衡理論（dynamic general equilibrium model）が現れ，マクロ分析におけるミクロ的基礎付けが重視され，また計量分析への応用も充実し，新たなマクロ経済分析の興隆に大きく貢献した。また，ケインジアンモデルも新古典派成長モデルに財価格の硬直性，情報の非対称性等の不完全競争（市場の失敗）要素を組み入れ，従来の帰納的なマクロ分析から一般均衡枠組みの中で演繹的なマクロ分析を展開するようになった（ニューケインジアンモデル）。さらに近年は，上記のモデルに確率過程を取り入れ政策効果を分析する動学的確率的一般均衡理論，いわゆる DSGE（dynamic stochastic general equilibrium）モデルでの分析が目覚ましい発展を遂げている。

本稿の目的は，次稿と併せてこれまでの経済成長モデルにおける均衡条件と経済的意義について比較検討するとともに，マクロ経済成長モデルにおける貨幣の役割と資産価格の変動要因および安定性について明らかにすることである。

とりわけ，各モデルの均衡条件を資本市場での裁定条件と関連させて分析する。一般に，最適化のための均衡条件では，限界便益と限界費用が一致するように求められるため，それらを資本市場での裁定条件に拡張して分析することは可能である。このことによって，各均衡条件が成立している背景にどのような状態が成立しているのかを明確化させることができる。さらに，このような分析を主要な経済成長モデルの中で検討することによって，各モデルの理論構造の特徴と経済的意義，モデル間での論理的な関係を明らかにすることができる。

本稿の構成は，以下の通りである。まず，第Ⅱ節では動学的一般均衡モデルの出発点として Ramsey（1928）の経済成長モデルを取り上げる。このモデルは，1960 年代以降

に新古典派経済成長モデルとしての礎となり，ミクロ的要素が十分に組み入れられた理論として確立している。次の第Ⅲ節では，この Ramsey モデルを用いて，資産価格の変動が新古典派の経済モデルの中でどのように捉えられているのかを分析する。バブル経済が発生する条件，均衡への経路について検討し，次稿でのケインジアンモデルと比較する際の土台を明確にする。続く第Ⅳ節では，後に開発された世代重複モデルについて検討し，Ramsey モデルと比較分析を行う。最後の第Ⅴ節は，小括である。

Ⅱ　Ramsey モデル

(1) モデルの体系と均衡条件

Solow（1956）型の新古典派成長理論では，望ましい状態を定常状態における一人当たりの消費量として分析し，その値が最大化される状態は黄金律（golden rule）と呼ばれている。この黄金律が成立している状態では，$r = n$（実質利子率＝人口成長率）となり，資本の限界成長率が自然成長率に等しくなり動学的効率性も満たされている。また，技術進歩率や貯蓄率，人口成長率等のパラメーター変化が景気循環をもたらす主要因になることを明らかにし経済成長モデルとして確立した。

しかし，ソロー・モデルでは，貯蓄率が一定とされ，さらに効用最大化行動によるミクロ的基礎による分析は行われていない。このため，成長会計モデルとして動学的なマクロ経済の景気循環を捉えることができるが，ルーカス批判[1]に応えることができてはいない。なぜなら，家計や企業の経済主体が将来の経済状態を考慮しながら最適な行動を選択し，その結果として景気循環が発生しうることが示されていないからである。

しかし，上記の点を勘案して無限の将来期間にわたる消費と貯蓄（投資）の最適行動を明示化させた景気循環理論としての最適成長モデルがある。これは，Ramsey（1928）が提示したものであり，その後，Cass（1965），Koopsman（1965）等が発展させ，新古典派の動学的一般均衡モデルとして成立している。ここでは，永遠に生きる代表的個人モデルを展開し，一国の経済がどのような成長過程を辿るのが最適か，また市場の効率性（パレート最適）が満たされているか否かも説明することができる。以下では，この新古典派の最適成長モデルを取り上げ，市場均衡の特徴を確認するとともに，経済成長と資産価格の関係について考察する。

1　Lucas（(1976）は，マクロ計量モデルのパラメーターは構造的ではなく可変的であり，このため過去のデータに基づいたパラメーターを用いて政策効果の計量分析を行っても適切ではないことを明らかにした。政策や社会ルールが変われば，人々はそれらを織り込みながら期待を形成する。したがって，政策効果を求めようとするならば，パラメーターが頻繁に変化しない個人の選好，企業の生産技術等のディープパラメータ（deep parameter）を用いる必要があり，このためにはミクロ的基礎付けをモデルに組み入れた上で，計量的に政策効果の分析を行うことが要請される。

代表的個人は，以下のように永遠の将来に至るまでの消費から得ることができる効用関数を持っていると仮定する[2]。

$$U = \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}dt \tag{1}$$

但し，c_t は各期の一人当たり消費水準，u は各期の効用水準，ρ は時間選好率である。効用関数の一階微分は正，二階微分は負の値をとる。また，代表的個人はすべて同質で一定の労働を非弾力的に供給し財を生産する。この経済では，資本 K と労働 L の生産要素から財が生産され，その財は消費財と投資財の双方になる。生産関数は，資本と労働に対して収穫一定，つまり一次同次関数と仮定すると，一人当たりの生産（y）関数は，

$$y = f(k) \tag{2}$$

となる（k は一人当たりの資本ストック）。生産関数は，次のように稲田条件（Inada condition）にしたがっているとする。

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0,\ f'(0) = \infty,\ f'(\infty) = 0 \tag{3}$$

ここで，人口成長率を n，資本減耗率を δ とすれば，一人当たり資本ストック蓄積率は，

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t \tag{4}$$

となる。したがって，個人は（4）式の制約の下で（1）式を最大化させるように行動する。この問題を解くために，ポントリャーギンの最大値制御論を用いて以下の経常価値ハミルトニアン（current value Hamiltonian）を設定する。

$$H_t = \left[U(C_t) + \lambda_t\{f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t\}\right]e^{-\rho t} \tag{5}$$

λ は共役変数（costate variable）であり動学ラグランジュ乗数としての特徴を有し，

2　代表的個人が永遠に存続しなくても，未来の世代の事を考え利他的に行動する個人として問題を設定しても結論は変わらない（Barro（1974）。しかし，自分の生存期間のことしか考慮しない場合，結論は当然異なる。この場合，第Ⅲ節で説明しているように世代重複モデル（overlapping generation model）を用いて分析することができ，資本が過剰となり動学的非効率性が生じることになる。

状態変数 k が1単位上昇した場合の限界効用の増加分を表している。このことから，λ は資本ストックのシャドウプライス（shadow price），または帰属価値（imputed value）と呼ばれ，消費の効用単位で測った資本の限界生産力（資本ストックの限界価値）を意味する。したがって，λ は資本ストックの追加的1単位の価格あるいは価値である。

以上より，代表的個人モデルにおける最適化条件及び最適経路の体系は以下のようにまとめられる。

$$\frac{dH_t}{dc_t} = U'(c_t) - \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(c_t) = \lambda_t \tag{6}$$

$$-\frac{dH_t}{dk_t} = \{\dot{\lambda}_t - \rho\lambda_t\}e^{-\rho t} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_t = -\lambda_t\{f'(k_t) - (n+\delta+\rho)\} \tag{7}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta)k_t - c_t \tag{4}$$

$$\lim_{r\to\infty} k_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \tag{8}$$

（6）式は消費に関する最適条件であり，左辺で表される消費の限界効用が，右辺の消費減にともなう限界費用と等しくなければならないことを示している。あるいは，今期消費を減らせば効用も減少するため，それを補う分だけの消費増加が次期に得られなければならない条件と換言することができる。今期の消費を減らせば貯蓄が増え，それが次期の資本ストックの増加に繋がる。次期は，資本ストックが増加しているので生産も増える。これにより，次期の消費は今期の消費減を埋め合わせするように増加しなければならないことを示している。

（7）式は，資本ストックの限界価格 λ の動学的最適経路を表し，最適な生産行動を表している。なお，（6）と（7）式を併せてみることによって，消費と生産の効率性が同時に達成されていることが確認できる（この側面については，本節（2）と（3）で詳しく考察されている）。

次の（4）式は，先に示したように状態変数である資本ストックの運動方程式（推移式）であり，定常状態では右辺の値がゼロとなるように最適な消費と資本ストックが決定されることになる。最後に，（8）式は横断性の条件（transversality condition）であり，計画期間の終末期における相補性スラック条件（complementary slackness condition）を表している。これは，最終期において，①資本ストックの価格がゼロ，②あるいは残される資本ストックの量はゼロ，のどちらかでなければならないことを意味している。仮に，最終期の資本価格がプラスの値をとるならば，それを売却することによって消費をすれば，さらに効用を増加させることができるので，このとき資本ストック量はゼロでなければならない。また，終端期に資本ストック価格が正値であれば，それを売却して消費を増加させようとするので，資本ストック価格がゼロ（すなわちシャドウプライス

がゼロ）でなければならない。

横断性の条件は，このように無限期間後における終端期の消費と資本ストックの水準が満たされなければならない条件として特徴づけることができる。なお，一般的には消費関数の性質より，

$$u'(0)=\infty,\ \ u''(0)<0 \tag{9}$$

であるため，消費はすべての期間を含めてゼロではない。したがって，（8）式の横断性の条件を満たすためには，

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t=0 \tag{10}$$

となり，終端条件として資産価格はゼロにならなければならないことを意味する。これは，過剰に資本を蓄積せず，無限期間後には資本ストックを使い切ってしまうための条件として，モデル全体の体系を閉じたものにする役割を果たしている。さらに，（8）式は代表的個人の生涯にわたる予算制約式にもなっているが，この側面についての特徴は本節（5）で述べる。

全体系の解を求める前に，以下では，最適条件である（4），（6）～（8）式の特徴と経済的意義について一つ一つ詳しく検討していくこととする。これらを理解した上で，次節においてマクロ経済全体の均衡と最適経路について分析する。

（2）消費の推移

ここでは，まず最適消費の推移について考察する。なお，資本ストックの推移はすでに（4）式で与えられている。消費の最適条件式である（6）式を（7）式に代入すれば次のように消費の推移式を導出することができる。

$$\dot{c}_t=-\frac{U'(c_t)}{U''(c_t)}\{f'(k_t)-(n+\delta+\rho)\} \tag{11}$$

上式より，消費は効用関数の形状や限界生産力，時間選好率に代表される右辺の値によって変化することを確認できる。さらに，（11）式は次のように書き換えることができる。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t}=-\frac{U'(c_t)}{U''(c_t)c_t}\{f'(k_t)-(n+\delta+\rho)\} \tag{12}$$

（12）式は消費の推移を変化率で表したものである。ここで，

$$\sigma(c_t) = -\frac{U''(c_t)c_t}{U'(c_t)} \tag{13}$$

とすれば，（13）式は以下のようになる。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma_t}\{f'(k_t) - (n + \delta + \rho)\} \tag{14}$$

最適消費変化率は（14）式にしたがって推移することになる。なお，σ は相対的危険回避度を表している。本モデルでのリスク（危険）回避度とは，目的変数の制御変数である消費が異時点間で異なることを回避しようとする度合いを意味している。したがって，危険回避的な消費者であれば，ある一定水準で消費が推移していくことを選好する。（14）式より，相対的危険回避度が大きくなるほど，消費の変化率は低下する要因となる。すなわち，各期の消費水準が異なることを回避しようとする。

また，（13）式の相対的危険回避度は，消費に対する限界効用の弾力性と等しくなっている。つまり，相対的危険回避度が大きくなるほど，限界効用の弾力性も大きくなる。このとき，消費が増えても限界効用が大きく減少するので，ある期の消費を増加させようとはしなくなる。したがって，限界効用の弾力性が大きくなることは，その背景に相対的危険回避度も大きくなっており，消費水準を一定に保つように行動することになる。

さらに，上記の相対的危険回避度はミクロ経済学的には次のように異時点間における消費の代替弾力性の逆数と等しくなる[3]。なお，$s = t + h$ とする。

$$\frac{1}{\sigma(c_t)} = -\frac{U'(c_s)/U'(c_t)}{c_s/c_t} \cdot \frac{d(c_s/c_t)}{dU'(c_s)/U'(c_t)} \tag{15}$$

このことから，相対的危険回避度（および消費の限界効用の弾力性）が大きくなるほ

３　異時点間の消費の弾力性は，価格比が変化した場合の消費から得られる限界効用の弾力性である。(6)式の均衡条件より，

$$U'(c_t) = \lambda_t$$

であるので，各期の価格は消費の限界効用で表すことができる。したがって，代替の弾力性は（15）式のようになる。これは，以下のように展開することによって，相対的危険回避度の逆数と一致する。

$$\begin{aligned}
\text{（15）式} &= -\frac{d\log(c_s/c_t)}{d\log\{u'(c_s)/u'(c_t)\}} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{d[\log(c_t + h) - \log c_t]/dh}{d[\log\{u'(c_t + h) - u'(c_t)\}]/dh} \\
&= -\frac{(\log c_t)'}{\{\log u'(c_t)\}'} = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t} = \frac{1}{\sigma_t}
\end{aligned}$$

ど，すなわち個人が消費をある一定の水準に保とうとするほど，その背景には異時点間の消費の弾力性が小さくなっていることを示している。消費の代替の弾力性が小さくなるほど，異時点間における消費の変化は小さくなり，消費を一定の水準に保とうとする行動と整合的になっている。以上のように σ は，

σ_t ＝相対的危険回避度

＝消費に対する限界効用の弾力性

＝消費の異時点間における代替の弾力性の逆数

と 3 つの性格を同時に有しているとまとめることができる。そして，（14）式で表される消費の推移は効用関数の形状に依存することが理解できる。

さらに，（14）式より消費の変化は以下のように場合分けすることができる。

$$\text{if } f'(k) - (n+\delta) > \rho \ \rightarrow \ \frac{\dot{c}}{c} > 0 \tag{16}$$

$$\text{if } f'(k) - (n+\delta) < \rho \ \rightarrow \ \frac{\dot{c}}{c} < 0 \tag{17}$$

まず，（16）式の場合，消費の変化率はプラスである。これは，左辺で示される資本収益率が右辺の割引価値を表す時間選好率（消費の時間的価値）を上回っているので，今期の消費を抑えて貯蓄（投資）を増加させようとする。このため，次期の資本ストックが上昇することから生産の増加を通じて消費を拡大させることになる。このような行動は，先に示した一階の最適条件を書き換えることによって，別の側面からも確認することができる。（7）式を積分し，それを消費の最適条件（6）式に代入すれば以下の式を得る。

$$u'(c_t) = \lambda_t = u'(c_{t+dt})e^{-\int_t^{t+dt}\{(n+\delta+\rho)-f'(k_z)\}dz} \tag{18}$$

（6）式の一階条件より，均衡では t 期における消費の限界効用が消費の限界費用 λ_t に等しくなることを説明した。また λ は，ハミルトニアンにおけるシャドウプライスを意味することを確認した。このシャドウプライスは資本ストックの限界価格を意味するが，これは（18）式より，今期に消費を我慢して次期に消費をすることから得られる限界効用の現在割引価値として言い換えることができる。

このことは，今期消費を我慢すれば効用が減少するが，その減少分を補うために次期に必要な効用の増加分としてまとめることができる。つまり，消費者は今期の限界効用と次期の限界効用の現在割引価値が等しくなるよう行動するのである。この行動が，最適消費の時間経路となる。したがって，（16）式の場合，（18）式と限界効用逓減の法則

より，

$$u'(c_t) > u'(c_{t+dt}) \quad \Rightarrow \quad c_t < c_{t+dt} \tag{19}$$

となるので，消費の変化率はプラスとなる ($\dot{c}/c > 0$)。

反対に（17）式の場合は，割引率（時間選好率）が高いので現在の消費を増加させる。なぜならば，現在の消費を減少させることの限界費用が高いためである。このとき，貯蓄（投資）が減少し，将来の生産水準の低下をもたらす。したがって，次期の消費水準は低下するため消費の変化率はマイナスとなる[4]。

（3）パレート最適

上記のように消費の推移を示す（11）式は，下記二つの一階条件を一つの式にまとめることによってミクロ的基礎付けを与えた上で，その特徴を考察することができた。

$$U'(c_t) = \lambda_t \tag{6}$$

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t \{f'(k_t) - (n + \delta + \rho)\} \tag{7}$$

しかし，この二式は経済学的に別の重要な意義を有している。それは，本体系モデルの背景にパレート最適条件が満たされているということである。このことを見るために，まず差分体系で分析する。一般的なオイラー方程式（Euler equation）は以下の通りである（なお，$f'(k) = r$ である。簡単化のため，$n = \delta = 0$ とする）。

$$u'(c_t) = \frac{1 + r_t}{1 + \rho} u'(c_{t+1}) \tag{20}$$

（20）式は，t 期に消費を我慢すれば効用は減少するが，均衡においては，その減少

4　（18）式を書き換えれば，

$$u'(c_t) = u'(c_{t+dt})e^{\rho - r}$$

となる（なお，$f'(k) = r$，$n = \delta = 0$ とする）。したがって，

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}e^{r-\rho}，又は，\lambda_{t+1} = \lambda_t e^{\rho - r}$$

と表すことができる。このとき，シャドウプライスが上昇するか否かは，r と ρ の大小関係に依存する。$r > \rho$ の場合，λ は下落する。なぜならば，資本収益率が高いため，消費を抑えて貯蓄（投資）が増加するためである。投資の増加は，限界生産力を減少させるため λ は低下する。なお，今期の消費を抑えることになるが，資本ストックの蓄積が進むので消費の推移は，（16）式のように $\dot{c}/c > 0$ となり上昇していくことになる。

反対に，$r < \rho$ の場合，λ は上昇する。このとき，時間選好率が高いため今期の消費が増え，貯蓄（投資）が減少する。このため，限界生産力が上昇するので λ は上昇することとなる。今期の消費を増加させれば，資本ストックが減少するので，消費の推移は（17）式のように $\dot{c}/c < 0$ となり低下する。

分を補うだけの効用増加（実質利子率 r と時間選好率込み）が次期になければならないことを意味している。今期の消費を抑えれば，次期は資本ストックの増加を通じて消費を増やすことができる。その効用の現在価値が補われるべき効用の増加分である。また，この式を書き換えれば次のようなる。

$$\frac{u'(c_t)(1+\rho)}{u'(c_{t+1})} = 1 + r_t \tag{21}$$

（21）式の左辺は限界代替率（MRS）であり，右辺は限界変形率（MRT）となっている。したがって，この差分体系のオイラー方程式では，$MRS = MRT$ も成立し，消費と生産の効率性が達成されていることがわかる。つまり，パレート最適の状態にあることが明らかである。このことは，厚生経済学の第一基本定理が成立していることを意味する。

次に，本体系モデルではどのようなっているのかを確認する。本モデルにおける消費の最適条件（6）式を（21）式に代入すれば次のようになる。

$$\frac{\lambda_t(1+\rho)}{\lambda_{t+1}} = 1 + r_t \tag{22}$$

（22）式の対数をとり線形近似すれば，以下のように動学形で表すことができる。

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t(r_t - \rho) \tag{23}$$

この（23）式が動学体系でのオイラー方程式であり，同時にパレート最適が成立している状態である。なぜなら，本体系モデルの（7）式に，$f'(k) = r$ と $n = \delta = 0$ を代入すれば上記（23）式と全く等しくなるからである。

つまり，（21）式の差分体系で表したオイラー方程式を連続形で表せば（23）式となる。したがって，（23）式ではパレート最適が成立していることを意味する。ここに，本体系モデルの最も大切な経済学的意義が内包されていると言える[5]。

さらに，本モデルにおいてパレート最適が成立していることを，本節（2）の（14）式で示した消費の推移式を用いて分析しよう。消費の推移式は，（14）式において以下のようになることを既に確認している（n と δ は，共に正の値をとる仮定に戻している）。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma_1}\{f'(k_t) - (n + \delta + \rho)\} \tag{14}$$

5　この他に，Ramsey の本体系モデルで重要な特徴の一つとして代表的個人モデルで示された解が，市場分権型経済に応用しても全く等しくなるということがある。この点については，次節（3）で説明する。

この式を書き換えれば次のようになる。

$$\sigma_t \frac{\dot{c}_t}{c_t} + \rho = f'(k_t) - (n + \delta) \tag{24}$$

（24）式の左辺は消費一単位の増加から得られる限界的な収益（あるいは，消費を一単位我慢することの限界費用），右辺は一単位の投資から得られる実質資本収益率を表している。つまり，左辺は限界代替率，右辺は限界変形率であり，本体系の Ramsey モデルでは両者は等しく，パレート最適が達成されていることがここでもわかる。（24）式は，消費を増やすべきか貯蓄（投資）をすべきかの選択条件であり，均衡状態では両者は無差別な状態になる，なお，（24）式はケインズ・ラムゼイ公式（Keynes Ramsey rule）と呼ばれている。

以上より，代表的個人モデルでの Ramsey モデルでは，一階の均衡条件が成立している背景には消費と生産の効率性が満たされ，厚生経済学の第一基本定理が成立していることが確認できる。

（4）シャドウプライスの推移と裁定条件

次に，（7）式で示されたシャドウプライス推移式の経済的意義について考察する。（7）式は，シャドウプライスのオイラー方程式でもある。

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t \{f'(k_t) - (n + \delta + \rho)\} \tag{7}$$

シャドウプライスの変化率は，右辺のカッコ内の変数の大小関係に依存することがわかる。資本の限界生産力 $f'(k)$ が上昇すれば，シャドウプライスの変化率はマイナスとなる。なぜならば，限界生産力が高ければ投資が促進されるので限界生産力が低下するためである。したがって，資本ストックの限界価格を表すシャドウプライスは低下する。このとき，マクロ経済は生産水準が増加しているので消費も上昇する景気拡大期に入っていることになる。つまり，$\dot{c}/c > 0$ となり，これは消費の推移について確認した（16）式の結論と整合的である。

一方，その他の変数（n, δ, ρ）が上昇した場合，いずれも投資を減少させる。したがって，限界生産力は増加するので，シャドウプライスの変化率はプラスとなる。均衡においてシャドウプライスが上昇しているということは，投資が減少していることを意味しマクロ経済は景気後退局面に陥っていることとなる。この結果は，（17）式の $\dot{c}/c < 0$ と整合的である。

ここで，（7）式を次のように書き換えることによって，シャドウプライスのオイラー

方程式の背景には，裁定取引という経済的意義が内包されていることが確認できる。

$$\{f'(k_t)-(n+\delta)\}+\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=\rho \tag{25}$$

（25）式の左辺は，資本ストックに投資したことから得られる限界収益率である。投資収益率は，左辺第一項の投資からの配当収益率，第二項のキャピタルゲイン（ロス）の変化率から構成される。右辺は，時間選好率で現在投資することの限界費用である。これは，同時に投資をすることによって，消費を我慢しなければならない費用を表し，消費収益率と呼ばれている。（25）式は，均衡において投資の収益率と消費収益率が等しくなければならないことを示している。

したがって，（25）式は投資と消費の間に成立する裁定条件という特徴を有していることになる。このように，均衡では消費と投資の間で裁定取引が行われ，両者の収益率は等しくなる。また（25）式は，代表的な資産価格モデルである株価の配当割引モデルと同じような式の形をしている。（25）式は，株式の裁定条件式と性格的には同じである。代表的個人は，通常の株式市場にみられるような裁定を十分に働かせていることに本モデルの特徴がある[6]。

また，シャドウプライスの推移式が一般に株式の配当割引モデルの形と同じになることは，以下の展開からも確認することができる。（7）式を用いて整理すれば，次のようになる。なお，$(dH/dk)e^{\rho t}=\tilde{H}_k$ とする。

$$-\tilde{H}_k=\dot{\lambda}_t-\rho\lambda_t \tag{26}$$

これを書き換えれば，

$$\frac{\tilde{H}_k+\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=\rho \tag{27}$$

となり，配当割引モデルの裁定条件式の形となる。ハミルトニアンにおいて，シャドウ

6　投資家が，危険中立的である場合の株式の裁定条件は以下の通りである。

$$\frac{D}{P}+\frac{\dot{P}}{P}=r$$

なお，D は配当，P は株価，r は債券利子率である。これに対して，（25）式は形としては上式と同じだが，代表的個人は本節（2）で確認したように消費に対して危険回避度を有しており，効用関数の形状が重要な要素となる。なぜなら，一階の均衡条件（6）式において，シャドウプライスは消費の限界効用と等しくなるように決まるからである。したがって，（25）式のシャドウプライスのキャピタルゲイン（ロス）の項の中に，危険回避者としてのリスクプレミアムが反映されていると捉える必要がある。特に，（13）式で示された相対的危険回避度（限界効用の弾力性，又は，消費の異時点間における代替の弾力性）の度合いが，リスクプレミアムを規定する要因となる。

プライスは資本ストック価格（限界価値）である。株式が資本ストックの所有権を意味するので，資本ストック価格の理論値も裁定条件を通じて株価配当割引モデルのようになるのは，ある意味自然であり整合的でもある。

ここでは，実際に資本市場があるわけではないが，個人内で経済合理性を完結させていると特徴づけることができよう（資本市場のある分権型市場経済モデルでも，同じ裁定条件が成立することは次節で検討する）。

（5）横断性の条件

本節の最後として，（8）式で示された横断性の条件を，代表的個人の予算制約の視点から考察する。

$$\lim_{t \to \infty} k_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \tag{8}$$

横断性の条件とは，本節（1）で述べたように，経済の終端条件として資産価格はゼロにならなければならないことを意味する。あるいは，シャドウプライス（資本ストック価値）が時間選好率よりも大きく上昇してはならないことを表している。これは，過剰に資本を蓄積せず，無限期間後には資本ストックを使い切ってしまうための条件として位置づけられている[7]。このことによって，無限期間における最適行動から動学的非効率性を排除する役割を果たすこととなる。

シャドウプライスが，時間選好率を上回って上昇すれば，（8）式の値はプラスとなり横断の条件は満たされなくなる。これは，シャドウプライスにバブルが生じていることを意味する（次節（3）では，バブルが生じている場合についても検討されている）。

横断性の条件が成立しているとき，状態変数である（4）式とシャドウプライスの推移式である（7）式を用いて積分すれば，

$$\int_0^{\infty} \lambda_t c_t dt = \lambda_0 k_0 + \int_0^{\infty} \lambda_t \{f(k_t) - k_t f'(k_t)\} dt \tag{28}$$

7　無限期間後の終端期に資本ストックの価格はゼロとなるが，その直前期まではゼロではない。経済は最適経路上にあり，資本ストックはある値を有している。終端期のみに最適経路を外れゼロとなる。これは，ターンパイク定理（Turnpike Theorem）が成立していることを意味する。

ターンパイク定理は，最適成長理論の展開の中でその概念が確立した。最適成長モデルでは，初期条件と終端期条件が設定されれば，計画期間中の大部分で最適成長経路の近傍に位置するという意味である。どのような初期条件からでも，最適経路であるターンパイク（高速道路）の上に乗り，その後十分に長い計画期間においてターンパイク上を走り，終端期直前にターンパイク経路から降りて最終条件を満たす値に到達することになる。二地点間を最短距離で進むより，遠回りをしてでも高速道路を使う方が望ましいという考えからターンパイク定理と呼ばれている。なお，この特性は動学的一般均衡理論の大域的安定性と同じ性格を持っている。

が得られる。これは，個人の生涯にわたる予算制約式となっている。シャドウプライスが各期の価格として機能を発揮している。したがって，左辺は生涯にわたる消費水準である。右辺は，生涯にわたる所得水準であり，それは第一項の与えられた初期資本価値と第二項の労働から得られた所得の合計から構成されている。つまり，横断性の条件を用いることによって，Ramsey モデルの最適化行動では，個人の生涯にわたる予算制約式も同時に満たされていることがわかる。これにより，効用を最大にする消費と資本ストックの最適経路が一意的に求められることになる。

（28）式の予算制約式では，所得はすべて消費によって使い切ってしまわれることを意味するが，同時に所得以上の消費を続けることはできないことも意味している。したがって，終端期に負債を残すということはできないようになっている。このことは，非ポンツィゲーム条件（no-Ponzi game condition）と呼ばれている。

本節では，動学的経済成長理論の代表である Ramsey モデルの均衡条件を導出した後，各々の均衡条件の特徴と経済学的意義について詳しく論じてきた。異時点間における消費と生産のパレート最適，裁定取引，生涯にわたる予算制約が背景にあって，最適経路がどのように決まるかを求めることができる。それらは，以上の分析より，資本ストックの状態変数（4）式，消費のオイラー方程式（11）式（又は（14）式），そして横断性の条件（8）式より定められる。次節では，最適経路の性質を理解するために位相図（phase diagram）を用いて論じる。

Ⅲ　鞍点均衡と資産価格の変動

第Ⅰ節において，新古典派の動学的経済成長理論である Ramsey モデルの均衡条件について詳細に検討を行った。本節（1）～（2）では，その動学的均衡経路がどのようなものであり，さらに均衡に収束することの条件について論じていく。そして，続く本節（3）では，資産価格の変動に着目し，合理的バブルが存在する場合へと議論を発展させる。最後の（4）では，Ramsey モデルを市場分権型に展開させた上で，第Ⅱ節の代表的個人モデルの解と比較検討し，最適成長モデルの経済学的意義についてまとめる。

（1）黄金律と修正された黄金律

Ramsey モデルの均衡条件は，前節で導出したように以下の三式に集約される。

$$\dot{c}_t = -\frac{U'(c_t)}{U''(c_t)}\{f'(k_t) - (n + \delta + \rho)\} \tag{11}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \tag{8}$$

（11）式は消費に関するオイラー方程式，（4）式は状態変数である資本ストックの推移式，（8）式は横断性の条件である。この体系に基づいて最適経路が決定される。また，定常均衡にある場合（$\dot{c} = \dot{k} = 0$），以下のようにまとめることができる。

$$f'(k^*) - (n + \delta + \rho) = 0 \tag{29}$$

$$f(k^*) - (n + \delta)k^* - c^* = 0 \tag{30}$$

この二式を kc 平面で図示したものが，図1である。$\dot{c} = 0$ が満たされている（29）式は，横軸に対して垂直な直線となる。（29）式において，生産関数は単調関数であるため，

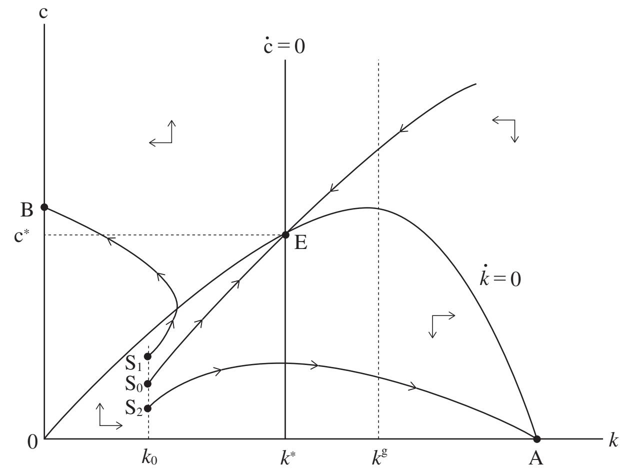
$$f'(k^*) = n + \delta + \rho \tag{31}$$

を満たす k^* の値が一意的に決まる。次に，（30）式は $k = k^g$ を中心に傾きが変わる曲線として描かれる。$k = k^g$ の場合，同図より一人当たりの消費が最大化されており，

$$f(k^g) = n + \delta \tag{32}$$

が成立している。この一人当たり消費水準が最大化されている条件は，黄金律（golden rule）と呼ばれている[8]。ソロー型成長会計モデルでは，一人当たり消費を最大にするこ

図1　Ramsey モデルの位相図



8　$\delta = 0$ のとき，黄金律は，　↗

とを理想としているため（32）式の黄金律が満たされた状態が最も望ましいということになる。しかし，Ramsey 型の動学的成長理論は個人の生涯にわたる効用水準を最大化することを理想としているため，望ましい均衡点はソロー型モデルと当然異なってくる。

以上より，本モデルにおける定常均衡点は両曲線の交点 E となる。このとき，

$$k^* < k^g \tag{33}$$

が成立する。この違いは，（31）式と（32）式より右辺に時間選好率 ρ が入っているか否かで大小関係が生じることが明らかである。したがって，Ramsey モデルでの均衡資本ストック水準は黄金律の資本ストック水準を下回る。また，この大小関係を反映して，均衡における一人当たりの消費水準も Ramsey モデルの方が低くなっている。

Ramsey モデルの最適資本ストックが黄金律水準と異なるのは，家計は消費水準ではなく効用を最大にするように行動するからである。したがって，最適な資本ストックもこの基準にしたがって修正される必要がある。それゆえに，修正黄金律（modified golden rule）と呼ばれている。しかし，この資本ストックの水準が本モデルにおいてパレート最適条件を満たしている値である。

Ramsey モデルでは，時間選好率が組み入れられているため，相対的にソロー型モデルより，現在の消費を増加させることになる。これは，個人として合理的行動でもある。しかし，現在の消費の増加は貯蓄の減少を意味し，資本蓄積の増加が抑えられ，その分結果的に生産水準も低下するため一人当たり消費水準は黄金率水準よりも低下することになる。

（2）位相図とサドルパス

次に，均衡点 E の安定性について検討する。最適消費の推移を表す（11）式と資本ストックの推移を表す（4）式を定常均衡近傍において線形近似するとヤコビアン行列は次のようになる。

↘ $f'(k^g) = n$

となる。これをソロー型成長モデルを用いて，別の方法で解けば以下の通りである。一人当たりの資本ストックの変化分は，

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t$$

と表される。一人当たりの消費は，上式を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} c_t &= f(k_t) - sf(k_t) \\ &= f(k_t) - nk_k \end{aligned}$$

したがって，一人当たり消費が最大となる条件は，

$$dc_t/dk_t = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(k_g) = n$$

となる。ゆえに，黄金律の条件は，$r = n$ と表すこともできる。

$$\begin{pmatrix}\dot{k}\\ \dot{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k - k^*\\ c - c^*\end{pmatrix} \tag{34}$$

$$a_{11} = f'(k^*) - (n+\delta) = \rho$$

$$a_{12} = -1$$

$$a_{21} = -\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*) = \frac{1}{\sigma(c^*)}c^*f''(k^*) < 0$$

$$a_{22} = -\frac{\left\{U''(c^*)^2\right\} + U'''(c^*)U'(c^*)}{\left\{U''(c^*)\right\}^2}\{f'(k^*) - (n+\delta+\rho)\} = 0$$

以上より，行列式の値は，

$$Det = -\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*) < 0 \tag{35}$$

となる。この結果，上記固有方程式における二つの固有根は，

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\dfrac{1}{\sigma(c^*)}c^*f''(k^*)}}{2} \tag{36}$$

と表され異なった符号を持つことがわかる。つまり，定常状態の均衡は局所的な鞍点になることを意味する。これは，位相図を用いると一つのサドルパス（saddle path）が存在し，その経路上で漸近的に均衡点へ向かうことになる。

このことを，図1を用いて確認しよう。（11）式，（4）式とヤコビアン行列より，

$$\frac{d\dot{c}}{dk} = a_{21} = -\frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}f''(k^*) < 0 \tag{37}$$

$$\frac{d\dot{k}}{dc} = a_{12} = -1 < 0 \tag*{(37)$'$}$$

となる。（37）式より，直線 $\dot{c} = 0$ を中心にして，それよりも資本ストックが増加すれば，一人当たり消費は減少する。したがって，図1の直線 $\dot{c} = 0$ より右側の領域において，消費の動きは下向き矢印によって示されている。これは，均衡水準よりも資本ストックが増加すれば限界生産力が低くなるため，消費も低下するからである。反対に，直線 $\dot{c} = 0$ の左側では消費は増加する。

次に，（37）′式より曲線 $\dot{k} = 0$ を中心にして，それよりも消費が増加した場合，資本ストックは減少する。したがって，曲線 $\dot{k} = 0$ よりも上側の領域では，資本ストックは減少することとなり，左向きの矢印で示されている。これは，均衡より消費が増加すれ

ば，貯蓄が低下するため資本ストックへの投資が減少するからである。反対に，曲線 $\dot{k}=0$ より下の領域では資本ストックは増加する。

これらのことから，Ramsey モデルのサドルパスは均衡点 E に漸近的に向かう曲線として描写することができる。そして，それは初期時点が S_0 点から始まらなければならないことも意味している。同時に，この最適経路に乗ることによって安定的に均衡点 E に到達し，生産と消費の効率条件である厚生経済学の第一基本定理が満たされることになる。仮に，初期時点が S_0 点以外から始まれば，その経路は均衡点へ収束せず乖離していくことになる。

それでは，初期時点が S_0 点以外の場合，どのようなことが生じているのかを検討しよう。まず，資本ストックは初期条件として k_0 が与えられている。これは，先決変数である。一方，消費の初期値は任意に決められるのでジャンプ変数である。ここで，初期値が S_1 点とする。この場合，消費と資本ストックの経路は B 点まで進む。最適消費水準よりも過剰に消費をしている状態であり，これに対応して資本ストックはゼロとなる。そして，資本ストックがゼロとなれば稲田条件より，生産はゼロなるため消費水準も最終的にはゼロとなり原点 O に達する。消費と資本ストックがゼロとなるこの経路は，オイラー方程式が満たされていないことが明らかであり，効用最大化行動と矛盾する。さらに，消費水準はプラスの値でなければならないとした（9）式の条件とも矛盾する。したがって，初期時点が S_1 点であることは理論的に整合ではなく選択されなくなる。

次に，初期時点が S_2 点であるとき，資本ストックが経路にしたがって増加し最終的に A 点に到達する。この状態は，過剰蓄積が進み消費がゼロの水準となっている。代表的個人が，消費をせず資本ストックを積み上げることを優先している状態と言い換えることができよう。このような行動は，資本ストックを使い切ってしまうという横断性の条件と矛盾していることは明らかである。したがって，初期時点として S_2 点が選択されることはない。

以上より，初期時点は S_0 点から始まり，サドルパスにしたがって漸近的に均衡点へ向かうことになる。このように Ramsey モデルでは最適経路が一意的に決定されることがわかる。

(3) 資産価格とバブル

図 1 では，位相図を kc 平面で表し，動学的最適経路を説明した。ここでは，資産価格を位相図に明示化させ，経済成長を資産価格の変動と関連させて分析する。Ramsey モデルでは，ハミルトニアンの共役変数が資本ストックのシャドウプライスになることを前節で確認した。

シャドウプライスは資本ストックの限界価値を表し資産価格としての特徴を有している（分権化された市場では，企業の発行した債券や株式には，担保あるいは所有としての資本ストックが裏付けされており，資本ストックが生み出す収益が金融資産価格に反映される）。資産価格として表すことができるシャドウプライスを縦軸に明示的に取り上げ位相図を作成するが，均衡条件は以下の通り第Ⅱ節で導出したものと変わりはない。

$$U'(c_t)=\lambda_t \tag{6}$$

$$\dot{\lambda}_t=-\lambda\{f'(k_t)-(n+\delta+\rho)\} \tag{7}$$

$$\dot{k}_t=f(k_t)-(n+\delta)k_t-c_t \tag{4}$$

第Ⅱ節では，（6）式と（7）式からシャドウプライスを消去して一つにまとめて，消費に関するオイラー方程式を導出し分析した。本節では，シャドウプライスを明示化させるので，（6）式と（4）式から消費 c を消去して一つにまとめる。まず，（6）式より，

$$c_i=c(\lambda_t) \tag{38}$$

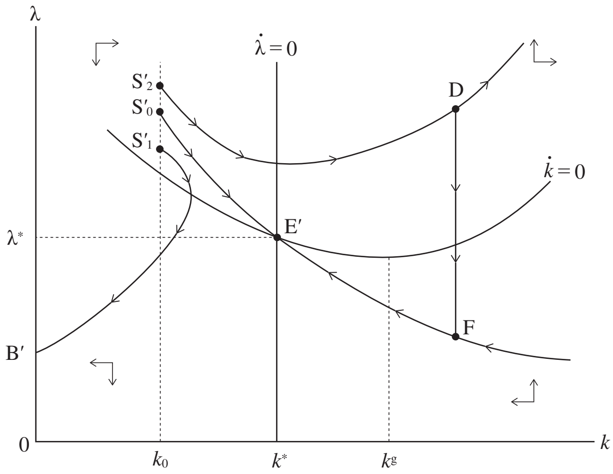
と表すことができる。なお，偏微係数はマイナスであり，各期の消費 c とシャドウプライス λ は逆相関で一意的に対応している。つまり，消費とシャドウプライスは反対の動きをするので，位相図でもこの性格が反映される。（38）式を（4）式に代入して整理すれば，定常状態において，

$$\frac{d\lambda_t}{dk_t}=-\frac{f'(k_t)-(n+\delta)}{c'(\lambda_t)}\gtreqless 0 \tag{39}$$

が得られる。上式より，$\dot{k}=0$ の曲線は黄金律 $(f'(k)=n+\delta)$ が満たされた場合を中心に，傾きが前節と同様に変化することがわかる（但し，図1と反対に原点に対して凸の曲線となる）。シャドウプライスが消費と反対の動きをするため縦軸を λ とした場合，図1の $\dot{k}=0$ 曲線を全く正反対にして描いたものとなる。これを示したのが図2である。また，（7）式より，$\dot{\lambda}=0$ 点であるときの修正黄金律は，以下の通り前節の（31）式と変わりはない。

$$f'(k^*)=n+\delta+\rho \tag{31}$$

図 2　合理的バブルの経路



したがって，$\dot{\lambda}=0$ の直線は縦軸がシャドウプライス λ に変わっても $k=\dot{k}$ の点で垂直になる。また，鞍点均衡であることも変わらず，均衡点は E' となる（均衡での k^*, c^*, λ^* の値も変わらないが，縦軸の値を変えているのでダッシュマークを付けて図示している）。

なお，最適なサドルパスは消費とシャドウプライスが反対に動くため，図 1 とは異なり S_0' 点から始まる右下がりの曲線として描かれる。

ここで，資産価格にバブルが発生した場合を検討しよう。シャドウプライスが均衡経路よりも高い場合であり，初期値が図 2 の S_2' 点にある。この段階で，前節で確認したように横断性の条件がすでに満たされてはいない。したがって，バブル現象とは横断性の条件が満たされず，動学的資源配分の歪みが生じている状況にあることが確認できる。

株式の裁定条件を用いれば，株価は一般に，

$$p_t = p^* + b_t$$

と表せる。なお，p は株価，p^* は株価のファンダメンタルズ価格，b はバブル項である。合理的な資産選択行動の裁定条件が満たされていても，バブル項は存在するので，この部分は合理的バブルと呼ばれている。通常，横断性の条件が満たされていればバブル項はゼロに収束するので，株価はファンダメンタルズ価格と等しくなる。この場合の横断性の条件は，前節でも確認したように資産価格 λ は時間選好率 ρ よりも大きく上昇しないことである。

Ramsey モデルでは，（6）式を（7）式に代入し，それを積分して整理すれば，

$$\lambda_t = \int_t^{\infty} \{f'(k_t) - (n+\delta)\} u'(c_t) e^{-\rho t} dt + \lim_{t \to \infty} \lambda_t e^{-\rho t} \tag{41}$$

となる。左辺がシャドウプライスの資本ストック価格（資産価格），右辺の第一項がファンダメンタルズ価格，第二項が合理的バブル項である。合理的バブル項がプラスであるということは横断性の条件が満たされていないことを意味する。横断性の条件が満たされていない背景には，資産価格が時間選好率を上回って上昇していることにある。

このように，横断性の条件が満たされていないときに合理的バブルが発生する。つまり，合理的バブルが存在する場合，横断性の条件は満たされず，資産価格の収益率を均衡よりも高く評価していることになる。この初期状態が図2の S_2' である。[9]

初期の段階で，代表的個人は資産価格に対して高い収益率を期待し，資産価格はファンダメンタルズに基づく適正価格を上回る水準にある。S_2' から始まる経路は，修正黄金律 k^* の水準までは右下がりであるものの，最適経路からは乖離し続けていることがわかる。初期段階のバブル水準がわずかであっても，時間とともに拡大する傾向があることを理解できる。資本ストックが k^* を超えれば，資産価格は右上がりの経路にしたがって急上昇していくことになる。

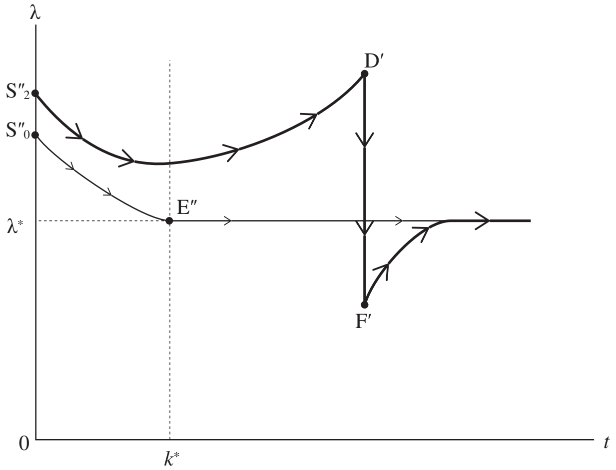
この傾向が究極的に続いていった場合が，図1の A 点に対応している。資産価格であるシャドウプライスと消費は逆関係にあり，シャドウプライスが上昇し続けていくほど，代表的個人は資本蓄積を増加させ消費はゼロになる。消費が低下するにもかかわらず，資本蓄積を高めている原因は，投資収益率を高く評価しているためである。したがって，過剰資本の程度が拡大し，実際は資本の限界生産力が低下（投資収益率の低下）しているにもかかわらず投資をさらに増加させている状況とまとめることができよう。バブル期における過剰な不動産開発等が，このような現象に相当すると考えられる。実際には不動産投資からの収益率は低くなっているにも関わらず，さらなる価格上昇を期待して過剰な投資がグローバルに行われた経緯を把握することができる。

次に，合理的バブルが発生している途中に代表的個人が，その不適正さを認識した場合を検討する。仮に，D 点でバブルであることを認識し，期待収益率が正しい水準に戻り，最適成長経路に繋がる横断性の条件が満たされたとしよう。このとき，ジャンプ変数であるシャドウプライス λ は F 点まで急落する。これが，バブル崩壊である。したがって，バブル崩壊は代表的個人の過剰な期待が適正水準に戻ることの引き換えに発生していることがわかる。

資産価格が，F 点まで暴落した後は，最適経路にしたがって左上にある均衡点 E' に近づいていく。このとき，資産価格 λ は徐々に上昇し，資本ストック k の水準は減少

9　Ramsey の最適成長モデルにおける資産価格バブルについては，田中（2010）で詳しく述べられている。

図 3　シャドウプライスとバブル



している。この一連の資産価格の動きを横軸に時間を取りまとめれば，図 3 のように表すことができる。

まず，初期時点は切片の S_2'' から始まり，適正水準 S_0'' を上回っている。資産価格であるシャドウプライスは，時間とともに適正水準から乖離し D' 点までバブルが続いている。このとき，期待収益が適正水準に戻り横断性の条件が満たされるようになれば，不均衡部分が解消されバブルは崩壊し，資産価格は F' まで暴落する。その後，資産価格は徐々に上昇し均衡水準 λ^* に到達する。このとき株価は暴落しているが，均衡水準よりも一旦大きく低下し，オーバーシューティング（overshooting）が発生していることがわかる。このような資産価格の変動は，最適資源配分の歪みの反動として生じていることが理解できる。

なお，合理的バブルがマイナスの場合，初期値は図 3 の S_1'' であり，図 1 の S_1 に対応している。資産価格は反対に適正価格よりも低くなり，時間とともにその乖離幅は拡大していくことになる。

以上は，あくまでも新古典派動学的最適経済モデルに資産価格のバブルを組み入れた場合としてまとめたものである。バブルは，代表的個人の過剰な期待形成によって横断性の条件が成立していないために発生し，厚生経済学的には資源配分の非効率性をもたらす要因となる。将来期待が適正水準に戻れば，バブルは崩壊し，資産価格は定常均衡水準よりもオーバーシュトして暴落する。その後，時間とともに均衡水準へ調整されていくことになる。

Ramsey の新古典派成長モデルでは，バブルの発生と崩壊要因は以上のようにまとめられ，資産価格の急騰，暴落およびオーバーシューティングが生じるメカニズムが明らかにされ興味深いものでもある。しかし，これはあくまでも新古典派モデルでの展開で

あり，現実的なマクロ経済の動きと関連させれば限界もある。

まず，資産価格のバブルが発生している場合，このとき消費は減少している。消費とシャドウプライス（資産価格）は逆関係にあることを（38）式で確認した。だからこそ，図1と図2の曲線 $\dot{k}=0$ は正反対になるのである。資産価格バブルが発生しているときに，消費水準が低下することは実際のバブル期の現象を顧みれば明らかに矛盾している。実際のバブル期には，資産価格が急騰するとともに消費水準も拡大し高い経済成長率を遂げていた。つまり，金融市場と財市場が相互に強く結びつき双方の市場で同時に急成長が続いた。

これに対して，Ramsey モデルでは資産価格のバブルが発生しているときに消費水準は減少している。これは，①資本ストックへの投資が増加しているため代替的に消費が減少する要因と，②過剰蓄積により投資収益率が低下することによって消費が減少する要因が，同時に生じているためである。

反対に，Ramsey モデルでは株価の暴落が生じた場合，消費は増加する。これは，過去20年間に先進国が経験したように，株価の暴落が実体経済の活動を収縮させ，さらに深刻な不況へと陥ることをになった現象とは正反対の動きである。

また，バブルが生じるのは横断性の条件が満たされない状況が発生したためであるが，なぜ人々が実際の投資収益率よりも高い水準で期待するのかについても説明されていない。しかし，上記の現実的側面が完全に説明できないからと言って Ramsey モデルの経済学意義が失われるわけではない。むしろ，様々な経済現象の解明を目指す理論的発展を促すことに寄与していると言えよう。その意味において，この後，ニューケインジアンが市場の不完全性や市場の失敗などの要素を取り入れ経済成長モデルを発展させることになるのは自然の流れとも考えられよう。

（4）分権型市場経済

これまでの Ramsey モデルでは，代表的個人は消費をするともに，貯蓄（投資）を行い，資本ストックを用いて自ら労働しながら生産すると仮定していた。そして，生涯にわたる効用を最大化させるように，最適な消費水準（および貯蓄）を動学的に決定していた。このようなモデルは，中央集権的（計画）経済モデルと呼ばれている。

これに対して，一般の市場経済では消費者と生産者（企業）が異なり分権化されている。つまり，これまでの Ramsey モデルでは利潤を最大にするよう生産活動を行う企業が明示化されていなかった。以下では，分権化された市場経済モデルを前提として分析し，中央集権的経済モデルで得られた均衡解と比較検討する。そこでは，代表的個人による中央集権的経済モデルと市場経済での分権型経済モデルの解は一致することになる。すなわち，中央集権的な代表的個人を想定したモデルは，分権化された市場経済と

同じ均衡が満たされていることとを意味し，Ramsey モデルの最も根本的な経済学的意義として確認することができる。

分権化された市場型経済モデルとして，多数の個人と多数の企業が存在し，個人は企業に労働を供給し，実質賃金 w を得るとする。また，個人は企業が発行した債券（社債）を購入することができ，債券の実質利子率を r とする。企業が発行する債券は，完全に資本ストックが担保とされている。したがって，個人は債券を通じて資本ストックを保有していると位置づけることができる（又は，資本ストックが完全に担保されているので，資本ストックの所有権を有しているとみれば，債券（社債）は株式としての性格を有していると言える）。この場合，一人当たりの資本ストックの変化は以下のように表すことができる。

$$\dot{k}_t = w_t + r_t k_t - c_t - (n+\delta)k_t \tag{42}$$

個人は，（42）式の制約の下で生涯にわたる効用の最大化を行う。したがって，経常価値ハミルトニアンは次のように設定される。

$$H_t = \left[U(C_t) + \lambda_t \{w_t + r_t k_t - c_t - (n+\delta)k_t\}\right] e^{-\rho t} \tag{43}$$

第Ⅱ節で取り上げた中央集権的な代表的個人モデルのハミルトニアンとは，状態変数が異なっていることがわかる。

次に，企業は利潤を最大にするよう投資を行い，得られた収益は賃金と利子として完全に分配するとする。完全競争市場における企業の利潤最大化行動より，

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t,\ \ f'(k_t) = r_t \tag{44}$$

が得られる。これを（42）式に代入すれば，

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \tag{45}$$

となる。これは，第Ⅱ節の資本蓄積率（4）式と全く同じである。したがって，（43）式の経常価値ハミルトニアンも第Ⅱ節の（5）式と全く等しくなることがわかる。このため，均衡条件も中央集権型モデルの場合と完全に同一となる。以上より，完全競争で分権化された市場経済型モデルの均衡解は，中央集権型経済モデルでの均衡解と一致する。この点にこそ，新古典派経済成長モデルが持つ経済学的意義と言うことができる。

また，Ramsey モデルが動学的一般均衡理論と呼ばれる所以である。この後，経済成長モデルは現実的側面を取り入れた様々なモデルが展開されることになった[10]。

Ⅳ　世代重複モデルと動学的非効率性

前節において Ramsey モデルでは，中央集権的経済モデルと分権的な市場経済モデルの均衡解が一致することを確認した。しかし，Samuelson（1958），Diamond（1965）は世代重複モデル（overlapping generation model）モデルを開発し，競争市場均衡と中央計画経済との解が一致しない場合があることを明らかにした。また，市場分権型の競争均衡で得られた解はパレート最適が成立せず，資本ストックが過剰に蓄積された状態になることが導出された。このため，資本ストックを取り崩して消費をすれば，全世代の効用を高めることができる状態となる。このことを動学的非効率（dynamically inefficient）という。Ramsey モデルでは，常に競争均衡と中央計画経済との解は一致し，どちらもパレート最適が満たされていた。一方，ライフサイクルモデル仮説が取り入れられている世代重複モデではパレート最適が成立しないことに特徴がある。具体的な理論内容を叙述すれば，以下の通りである。

世代重複モデルでは，個人は若年期と老年期の二期間生存し，毎期新たに若年世代が生まれる。したがって，各期において若年世代と老年世代が存在する[11]。若年期に労働し賃金を稼ぎ，一部を今期の消費，残りを次期の老年期のために貯蓄する。この貯蓄が，資本ストック水準を決定することとなり生産活動に用いられる。

若年期に行った貯蓄は，老年期に利子率が付け加わる。したがって，老年期の収入は若年期の貯蓄と利子を合計したものである。個人は，若年期と老年期の消費から得られる効用を最大にするよう貯蓄額を決定する。最適な貯蓄額の決定は，同時に若年期と老

10　この中でも代表的なものが内生的成長理論である。新古典派の最適経済成長モデルでは，技術進歩が経済成長に重要な影響を与えるが，その技術進歩は外生的である。したがって，経済成長を規定する要素は外生的な技術進歩と効用関数のみであり，国際的に見れば各国の経済成長率は同じようになるはずである。しかしながら，現実の経済では富める国と貧しい国の間に格差が存在し，またその格差が継続ないし拡大している。すなわち，富める国はますます豊かになり，貧しい国は貧しいままであり，いわゆる南北間格差が収斂せず拡大傾向にもある。

　このような現実の動きを背景に，Romer（1986）は資本ストックの社会における外部性を導入することによって，収穫が逓増し技術進歩が内生的に上昇し経済成長が促されることを明らかにした。これにより，持続的な経済成長が可能となり内生的経済成長理論の嚆矢となった。

　新古典派理論では，収穫は逓減するため経済成長が持続して起こる側面を説明できない。しかし，Romer モデルでは個々の企業にとっては所与の知識や熟練が，社会的には外部性を有することによって技術進歩率が上昇し，内生的かつ持続的に経済が成長することとなる。また，このモデルでは外部性が発生するため市場の失敗が生じている。このことにより，経済政策の分析が可能となり幅広く研究が応用されていくこととなった。

11　毎期生まれる若年代の人口が一定比率で増加する場合へと応用もできるが，本質的に得られる結論は変わらないので人口成長率はゼロとして話を進める。

年期の最適消費水準を決定することを意味する。代表的個人は，自身の生涯期間における効用のみに着目して最適な消費行動を行う。後の世代のことは考慮に入れていない。

一方，中央計画経済では，各世代の生涯にわたる効用だけでなく，同一期間における若年世代と老年世代の間でどのように資源配分を行うかも考慮に入れて社会的厚生関数を最大化させる。すなわち，各期の若年世代と老年世代の消費の限界代替率が生産の限界変形率と等しくなるよう調整される。これは，基本的に Ramsey の最適成長理論と同じ結果となり，パレート最適が成立している。

これに対して，世代重複モデルにおける代表的個人は，自身の生涯にわたる効用の最大化を行っているが，各期における世代間の資源配分は考慮されていない。この点からも，分権型市場経済の競争均衡解と中央計画経済の解が異なる理由となる。そして，後者の中央計画経済モデルの方が各期の資源配分と将来を見通した資源配分の最適化を行っているためパレート最適となる。個々人レベルでは最適消費行動を遂げているが，社会全体的にはパレート最適から得られる効率性は成立していないことになる。以上の理由により，世代重複モデルの経済は動学的非効率となる。

また，世代重複モデルでの均衡資本ストック水準は，黄金律を満たす最適な資本ストック水準を上回り，過剰蓄積が行われていることも導出される（図 1 の k^g よりも右側に位置している）。このとき，過剰な資本ストックを取り崩せば，各世代の消費を増加させることができる。つまり，他の人の効用を下げることなく，ある個人の効用を高めることができるということは，その状態がパレート最適ではないことと整合的である。

また，個々人の行動では，各期の若年世代と老年世代の資金取引の調整が行われていない。これは，世代重複モデルの構造上の問題であり，世代間の貸借関係が制限されていることを意味する（若年世代が老年世代から直接資金を借りることはできない。なぜなら，次期になると元利返済をすべき相手は生存していないからである）。また，Ramsey モデルのように利他的な世代間の繋がりがないため（無限期間にわたる効用を考慮していないことを意味する），資本ストックの過剰蓄積を調整するように将来の貯蓄計画を見直す若年世代が存在していないことも動学的に非効率となる要因である。つまり，無限期間にわたる予算制約を誰一人持っておらず，Ramsey モデルでの横断性の条件を満たすように行動する人がいないため動学的非効率性が生じると言える。

資本ストックが過剰（消費は過少）となるもう一つの理由は，経済が永遠に続くと仮定されているためである。最終世代が存在しないので，常に資本ストックを蓄積する誘因が組み入れられているからである。Ramsey モデルでは，横断性の条件を設けることによって無限期間後の資本ストックの価値はゼロとなる。世代重複モデルでは，この条件がないため資本ストックは結果的に過剰となる。個々人レベルでは，二期間内の生涯にわたる予算制約式に基づいた最適消費行動をとっているが，それは社会全体での効率

性に必ずしも繋がらないことを意味する。

世代重複モデルは，この後，個人が将来世代のために遺産を残すことを考慮した利他的な行動をとる場合や社会保障制度を通じた所得再分配政策を採用した場合等を付け加えて，資本ストックに与える影響が分析されている（Bernheim, Schleifer and Summers (1985)）。

Ⅴ 小　　括

本稿では，まず新古典派のマクロ経済成長モデルとして Ramsey モデルについて，その特徴と経済学的意義の視点から分析した。Ramsey モデルでは，マクロ分析の中にミクロ経済学で使われる理論が十分に駆使されていることが確認できる。例えば，均衡に関することでは，効用に関する動学的最適行動，消費とシャドウプラスのオイラー方程式，横断性の条件と予算制約式，消費と相対的危険回避度（又は，異時点間における代替の弾力性），裁定取引と資産価格の裁定条件，が挙げられる。さらに，得られた結論の経済的特徴については，消費と生産のパレート最適，厚生経済学の第一基本定理，鞍点均衡とサドルパス，中央集権的計画経済モデルと市場分権型経済モデルの一致，が挙げられる。このようなミクロ的基礎が十分に反映された形で，新しいマクロ経済学を構築したことの意義は極めて大きいものと言える。

さらに，マクロ経済的な意義としては，従来の IS-LM 分析と異なり将来の経済動向を見渡すフォワードルッキング型であること，さらに定常状態ではトービンの限界 q は 1 と等しく，恒常所得仮説も成立していることを確認した[12]。

以上より，Ramsey モデルは完全競争を仮定した場合のマクロ経済の姿と運動を精緻な理論で描写したものとして位置付けられよう。同時に，この理論を通じて現実の経済が理想的な効率状態からどの程度乖離しているかを判断することができる。さらに，採られるべき経済政策についても検討を加えることができる。

しかし，現実的な経済の動きを見れば，新古典派成長モデルだけでは限界があり不十分であることも明らかである。完全競争市場を前提とした完全雇用モデルでは，わが国に見られるような中長期的な不況の原因を説明することはできない。

第Ⅳ節では，新古典派モデルでのバブル発生とその崩壊について考察した。バブル発生は厚生経済学上の資源配分に歪みをもたらすことが明らかになった。しかし，人々の

12　家計は，フォワードルッキングな意思決定を合理的に行う。したがって，政府部門を導入し，減税が行われても将来の増税に繋がることを織り込むため経済政策効果はゼロとなる。このことから，リカードの中立性定理，あるいは等価定理が成立する。
　さらに，企業価値は将来収益によって合理的に決定され，企業の資金調達行動から独立している。したがって，MM 定理も成立していることになる。

期待が適正水準になれば資産価格は暴落するが，ひと度，サドルパスに戻れば資産価格は最適経路上に乗り徐々に上昇しながら定常均衡に向かう。このようなパスは，中長期にわたる不況，あるいは不況がさらに不況を悪化させるデフレスパイラル等の事象を理論的に説明できるものではない。しかも，資産価格バブルが生じているときに，消費は低下しているため，この側面も現実的とは言えない。

このような分析のためには，マクロ経済における貨幣の役割を理解する必要があり，次稿ではこれに焦点を当て，ケインジアン（ニューケインジアン）モデルまで発展させて分析を行う。

参考文献

小野喜康（1992）『貨幣経済の動学理論－ケインズの復権』（東京大学出版会）.

小野喜康，橋本賢一（2012）『不況の経済理論』（岩波書店）.

小林慶一郎（2014）「景気循環と金融危機における異質性と資産再配分」『三田学会雑誌』（慶応義塾大学）第 106 巻 4 号，pp.37-54.

田中淳平（2010）『ケインズ経済学の基礎－現代マクロ経済学の視点から』（九州大学出版会）.

Akerlof, G.（1970）“The Market for Lemons： Quality Uncertainty and the Market Mechanism,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol.84, No.3, pp.488-500.

Barro, R.（1974）“Are Government Bonds Net Wealth?” *Journal of Political Economy,* Vol.82, No.6, pp.1095-1117.

Baumol, W.（1952）“The Transactions Demand for Cash： An Inventory Theoretic Approach,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol.66, No.4, pp.545-556.

Bernheim, B., D. Shleifer and L. Summers（1985）“The Strategic Bequest Motive.” *Journal of Political Economy,* Vol.93, No.6, pp.1045-1076.

Blanchard, O. and S. Fischer（1989）*LECTURES ON MACRO ECONOMICS,* MIT Press.

Cass, D.（1965）“Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” *Review of Economic Studies,* Vol.32, No.3, pp.233-240.

Calvo, G.（1983）“Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework,” *Journal of Monetary Economics,* Vol.12, No.3, pp.383-398.

Diamond, A.（1965）“National Debt in a Neoclassical Growth Model,” *American Economic Review,* Vol.55, No.5, pp.1126-50.

Gali, J. and M. Gertler（1999）“Inflation Dynamics： A Structural Econometric Analysis,” *Journal of Monetary Economics,* Vol.44, No.2, pp.195-222.

Guasch, J. and A. Weiss（1980）“Adverse Selection by Markets and the Advantage of being Late,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol.94, No.3, pp.453-466.

Keynes, J. M.（1936）*THE GENERAL THEORY OF EMPLOYMENT, INTEREST AND MONEY,* Macmillan,（塩野谷祐一訳（1983）『雇用・利子・および貨幣の一般理論』東洋経済新報社）.

Keynes, J. M.（1930）*A TREATIES ON MONEY,* Macmillan（小泉明，長澤推恭訳（1979）『貨幣論』東洋経済新報社）.

Koopmans, J.（1965）“On the Concept of Optimal Economic Growth,” in *Econometric Approach to Development Planning.* Amsterdam, North Holland, pp.225-295.

Krugman, P.（1998）“It’s Baaack： Japan’s Slump and the Return of the Liquidity Trap,” *Brookings Papers on Economic Activity,* Vol.29. No.2, pp.137-206.

MaCallum, B.（1989）*Monetary Economics Theory and Policy,* Macmillan Publishing Company.

Mankiw, G.（1985）“Small Menu Costs and Large Business Cycles : A Macroeconomic Model of Monopoly,” *Journal of Economics,* Vol.100, No.2, pp.529-538.

Lucas, R.（1976）“Econometric Policy Evaluation : A Critique,” in Brunner, K. and Meltzer, A.. *The Phillips Curve and Labor Markets.* Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1, New York, American Elsevier. pp.19-46.

Ramsey, F.（1928）“A Mathematical Theory of Saving,” *Economic Journal,* Vol.38, No. 152, pp.543-559.

Romer, M.（1986）“Increasing Return and Long-run Growth,” *Journal of Political Economy,* Vol.94, No.5, pp.1002-1037.

Robert, C.（1967）“A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory,” *Western Economic Journal,* Vol.6, No.1, pp.1-8.

Rotemberg. J.（1982）“Monopolistic Price Adjustment and Aggregate Output,” *Review of Economic Studies,* Vol.49, No.4, pp.517-531.

Samuelson, P.（1958）“An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money,” *Journal of Political Economy,* Vol.66, No.6, pp.467-82.

Shapiro, C. and J. Stiglitz,（1984）“Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device,” *American Economic Review,* Vol.74, No.3, pp.433-444.

Sidrauski, M.（1967）“Inflation and Economic Growth,” *Journal of Political Economy,* Vol.75, No.6, pp.796-810.

Solow, R.（1956）“A Contribution to the Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol.70, No.1, pp.65-94.

Solow, R.（1979）“Another Possible Source of Wage Stickiness,” *Journal of Macroeconomics,* Vol.1, No.1, pp.79-82.

Svensson, L.（1985）“Money and Asset Prices in a Cash-in-Advance Economy,” *Journal of Political Economy,* Vol.93, No.5, pp.919-944.

Tobin, J.（1956）“The Interest-Elasticity of Transactions Demand for Cash,” *Review of Economics and Statistics,* Vol.38, No.3, pp.241-247.

Tobin, J.（1965）“Money and Economic Growth,” *Econometrica,* Vol.33, No.4, pp.671-684.