

Reconstruction of the Conductivity from the Dirichlet-to-Neumann Map on Circular Resistor Networks

Hisashi MORIOKA^{*}, Rei SHIOZAKI^{**}, Hideki TAKUWA^{***}

(Received April 25, 2018)

The theory of inverse boundary value problems has been used in fields of engineering and physics such as non-destructive testing, medical imaging. Calderón's inverse problem for an elliptic partial differential equation appears in electrical impedance tomography (EIT). EIT is one of techniques for medical imaging. One can infer inside of human body by the surface electrode measurements. Mathematically, this technique corresponds to the reconstruction of the electrical conductivity from boundary measurements. One of theoretical models of boundary measurements is the Dirichlet-to-Neumann map. In the present paper, we consider a discrete analogue of Calderón's inverse problem. Namely, we derive a reconstruction procedure of conductivity on circular resistor networks from the Dirichlet-to-Neumann map. A numerical example of perturbation of the Dirichlet-to-Neumann map is also given in this paper.

Key words : resistor network, Dirichlet-to-Neumann map, inverse problem

キーワード : 電気回路, ディリクレ-ノイマン写像, 逆問題

円形電気回路におけるディリクレ-ノイマン写像による導電率の再構成

森岡悠, 塩崎玲, 多久和英樹

1. 緒言

ある物体において, その表面での何らかの物理的測定から内部の状態を決定する問題は, 医用画像や非破壊検査の技術として広く利用されており, 理論と応用両面で重要な研究分野である. 超音波を用いた逆散乱法, X線のような電磁波による回折現象を利用した方法, 電気伝導を利用した方法等が知られている. このうち, 電気伝導を利用した方法としては, 電気インピーダンストモグラフィ(EIT)と呼ばれる技術がある. これは, 人体のような導電性を持つ対象において, 微弱な電流を流し, 表面における電圧と電流の関係を測定することで内部の状態を画像化する方法である. 本研究では, この方法を円

形電気回路における逆問題としてモデル化し, 電気伝導を再構成する手法に加え, 測定データに摂動を加えた際の影響について数学的に考察することを目的とする.

EITは, 数学的には Calderón¹⁾によって提唱された境界値逆問題に相当する. Ω を \mathbf{R}^d ($d \geq 2$)の有界な領域とし, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つものとする. ある物体の電気伝導度が $\gamma(x)$ という正值関数で与えられるとする(より一般に, $\gamma(x)$ は正定値行列値関数として与えられる場合もある). 電気伝導を表す境界値問題

$$\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad u = f \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1)$$

に対し, ディリクレ-ノイマン写像は次のように定義され

^{*} Department of Energy and Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-0774-65-6492, E-mail : hmorioka@mail.doshisha.ac.jp

^{**} Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-0774-65-6449, E-mail : ctwc0571@mail4.doshisha.ac.jp

^{***} Department of Mechanical and Systems Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-0774-65-6431, E-mail : htakuwa@mail.doshisha.ac.jp

$V_B = \{v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$ とすると、電圧 u をあるベクトル ${}^t[u_1, \dots, u_n, f_1, \dots, f_m] \in \mathbf{R}^{n+m}$ と同一視できる。従って、

$$\sum_{q \in N(p)} \gamma(pq) (u(q) - u(p)) = 0, \quad p \in V_{int}. \quad (4)$$

$$u(p) = f(p), \quad p \in V_B, \quad (5)$$

は、連立方程式

$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{BI} \\ A_{IB} & A_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

と同値である。ここで、 $\mathbf{u} = {}^t[u_1, \dots, u_n] \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f} = {}^t[f_1, \dots, f_m]$, $\mathbf{g} = {}^t[g_1, \dots, g_m] \in \mathbf{R}^m$ であり、係数行列は $\gamma(pq)$ によって定まる行列を部分行列表示したものである。ただし、 A_{II} は $n \times n$ 行列、 A_{BI} は $n \times m$ 行列、 A_{IB} は $m \times n$ 行列、 A_{BB} は $m \times m$ 行列である。

最大値の原理により、 A_{II} は正則行列であることが知られている (例えば、定理 3.2 及び系 3.3⁶⁾)。よって、ディリクレ-ノイマン写像の行列表示は次のように与えられる。

$$M_\gamma = -A_{IB}A_{II}^{-1}A_{BI} + A_{BB}. \quad (7)$$

3. 特殊解の構成

導電率の再構成には、ある方向に $|u(p)|$ が指数的に増大する特殊な解が必要となる。ここでは、そのような解をコーシー問題を考えることにより構成する。指数増大解の構成には、Fig. 2 に示すように、境界条件を完全決定系となるように設定しなければならない。この条件は電気回路のグラフとしての幾何的形狀に強く依存している。また、形状によってはそのような解を作ることが難しい場合もある。電気回路の幾何的形狀についての適当な仮定のもとでこのような解を構成する方法としては、Curtis-Morrow³⁾, Curtis-Ingerman-Morrow⁵⁾, Oberlin⁷⁾, Isozaki-Morioka⁸⁾ 等で示されている。

円形回路の場合には、Fig. 2 に示す \diamond , \blacklozenge , \circ の各種境界ノードを適切な個数取ることで、指数増大解を構成できることが保証されている。簡単のため、Fig. 2 の場合に、具体的な構成方法を述べる。円形回路である限り、円の個数や中心から出る辺の個数が増えても手順は同様である。

(i) \blacklozenge で表されたノード 11, 12, 13 で $u = f$ 及び $I_f = g$ を与える。ノード 3, 4, 5 における u の値が一意的に決まる。

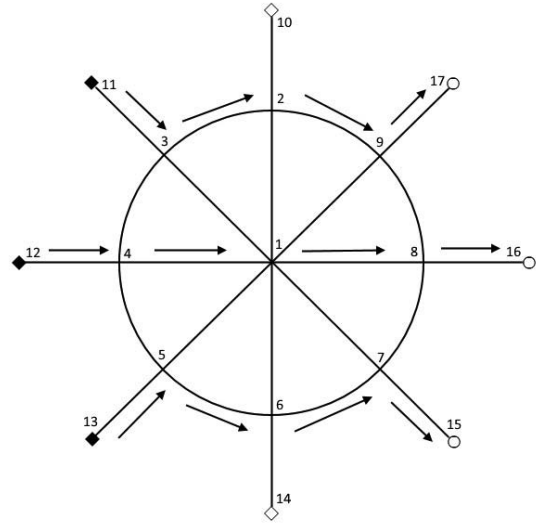


Fig. 2. Paths of extension of the potential by the Cauchy problem. \blacklozenge (node 11-13) : given Dirichlet and Neumann data. \diamond (node 10, 14) : given Dirichlet data. \circ (node 15-17) : no given data.

(ii) ノード 4 を中心としてキルヒホッフの法則 Eq. (3) が成り立つ。ノード 4 とその隣接ノードのうち、ノード 3, 4, 5, 12 における u の値は既に求められているため、残る隣接ノード 1 での u の値は Eq. (3) から一意的に決まる。

(iii) ノード 3, 5 において、(ii) と同様の操作を行うと、ノード 2, 6 における u の値が一意的に決まる。

(iv) \diamond で表されたノード 10, 14 でディリクレデータが与えられている。従って、ノード 2, 6 でも (ii) と同様の操作が可能である。ノード 7, 9 での u の値が一意的に決まる。

(v) ノード 1 を中心として、キルヒホッフの法則 Eq. (3) が成り立つ。ノード 1 とその隣接ノードのうち、ノード 8 以外での u の値は既に求められている。従って、ノード 8 での値は一意的に決まる。

(vi) ノード 7, 8, 9 で (ii) と同様の操作を行うと、ノード 15, 16, 17 での u の値が一意的に定まる。

以上により、 V 上の u の値を一意的に決定することができる。さらに、この構成法から、ディリクレ-ノイマン写像を表す行列 M_γ が、ある正則部分行列を含んでいることが分かる。

補題 2 $V_B = V_{B1} \cup V_{B2} \cup V_{B3} := \{ \blacklozenge \text{のノード} \} \cup \{ \diamond \text{のノード} \} \cup \{ \circ \text{のノード} \}$ と分割する。 M_γ を次

のように部分行列表示する.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(V_{B1}) \\ \mathbf{f}(V_{B2}) \\ \mathbf{f}(V_{B3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(V_{B1}) \\ \mathbf{n}(V_{B2}) \\ \mathbf{n}(V_{B3}) \end{bmatrix}.$$

ただし, \mathbf{f} はディリクレデータ, \mathbf{n} はノイマンデータを表すベクトルであり, $\mathbf{f}(V_{Bj}), \mathbf{n}(V_{Bj})$ は各 V_{Bj} に対応する \mathbf{f}, \mathbf{n} の成分を並べたベクトルである. このとき, M_{13} は正則行列である.

証明. Fig. 2 の状況で示す. $\mathbf{f}(V_{B1}) = \mathbf{f}(V_{B2}) = \mathbf{0}$, かつ $M_{13}\mathbf{f}(V_{B3}) (= \mathbf{n}(V_{B1})) = \mathbf{0}$ と仮定する. 特殊解の構成法 (i)-(vi) をこの条件下で行うと, 全ての V のノードで $u = 0$ でなければならない. よって, $\mathbf{f}(V_{B3}) = \mathbf{0}$ である. (証明終)

系 3 V_{B1}, V_{B2} 上でのディリクレデータ $\mathbf{f}(V_{B1}), \mathbf{f}(V_{B2})$ と, V_{B1} 上のノイマンデータ $\mathbf{n}(V_{B1})$ が与えられているとする. このとき, V_B 上の関数 \mathbf{f}' であって, $\mathbf{f}'(V_{B1}) = \mathbf{f}(V_{B1}), \mathbf{f}'(V_{B2}) = \mathbf{f}(V_{B2}), (M_\gamma \mathbf{f}')(V_{B1}) = \mathbf{n}(V_{B1})$ となるものが一意的に決まる.

証明. 補題 2 より, 次のように取れば良い.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(V_{B3}) \\ = M_{13}^{-1} (\mathbf{n}(V_{B1}) - M_{11}\mathbf{f}(V_{B1}) - M_{12}\mathbf{f}(V_{B2})), \end{aligned} \quad (8)$$

かつ $\mathbf{f}'(V_{Bj}) = \mathbf{f}(V_{Bj}), j = 1, 2$. (証明終)

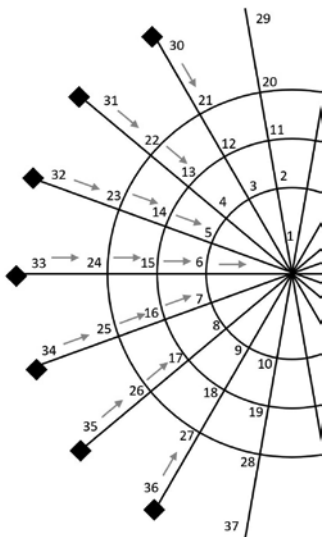


Fig. 3. Paths of extension for large resistor networks by Cauchy problems.

円形回路がより大きい場合について, 若干の補足を述べる. Fig. 3 に, 円を 3 つ含む電気回路の場合の特殊解の構成を示した. 円形電気回路におけるコーシー問題が

完全決定な境界条件を持つことは, \blacklozenge で表されたノードから回路の中心のノードまでポテンシャル u を延長可能であることを意味している. Fig. 3 においては, まず \blacklozenge で表されたノードからノード 1 まで u が延長された後, 3 つの円周に沿ってノード 1 の上下を回り込みつつ右側に u が延長される.

4. 導電率の再構成

ここでは, 導電率 γ を未知, ディリクレ-ノイマンデータ Λ_γ を既知として, 導電率の再構成手法を示す. 導電率の再構成には, 前節で構成した特殊解を, $\mathbf{f}(V_{B1}) = \mathbf{0}, \mathbf{n}(V_{B1}) = \mathbf{0}$, さらに V_{B2} 上で 1 点だけディリクレデータ 1, それ以外で 0 を与えた条件下で構成する. 本節でも, 前節同様 Fig. 1 の場合について述べる. 図のノード番号に合わせて, $v_1, \dots, v_9 \in V_{int}, v_{10}, \dots, v_{17} \in V_B$ とする. よって, ディリクレデータは $\mathbf{f} = {}^t[f_{10}, \dots, f_{17}]$, ノイマンデータは $\mathbf{n} = {}^t[n_{10}, \dots, n_{17}]$ であり, 電圧は $\mathbf{u} = {}^t[u_1, \dots, u_{17}]$ と表せる.

4.1 境界ノードに繋がる辺上の再構成

まず, $p \in V_B, q \in N(p)$ に対し, 辺 pq 上の $\gamma(pq)$ の再構成について述べる.

(i) $f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0, n_{11} = n_{12} = n_{13} = 0$, さらに $f_{10} = 1, f_{14} = 0$ とする. 系 3 により, v_{15}, v_{16}, v_{17} における \mathbf{f} はディリクレ-ノイマン写像から求めることができる. さらに, 前節で与えた特殊解の構成から, 電圧 u が 0 である領域があるところまで延長され, V は u の値が 0 である領域と 0 でない領域に分かれる. その境界は Fig. 4 に示した.

(ii) ここで v_2, v_{10} に着目する. $u_2 = 0, u_{10} = 1$ であり,

$$I_f(v_{10}) = \gamma(v_2 v_{10})(u_{10} - u_2) = \gamma(v_2 v_{10}), \quad (9)$$

が得られる. 一方, ディリクレ-ノイマン写像は既知であったから,

$$(\Lambda_\gamma \mathbf{f})(v_{10}) = I_f(v_{10}) = n_{10}, \quad (10)$$

は与えられている. Eqs. (9)-(10) より, $\gamma(v_2 v_{10}) = n_{10}$ である.

(iii) 回路を回転させつつ (i), (ii) の操作を繰り返せば, $\gamma(v_j v_{j+8}), j = 2, \dots, 9$, を求めることができる.

4.2 円周上の導電率の再構成

(i) §4.1-(i) と同様の境界条件を選ぶ. v_2 に着目すると, Fig. 5 のような状況となる. $u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_{10} = 1$

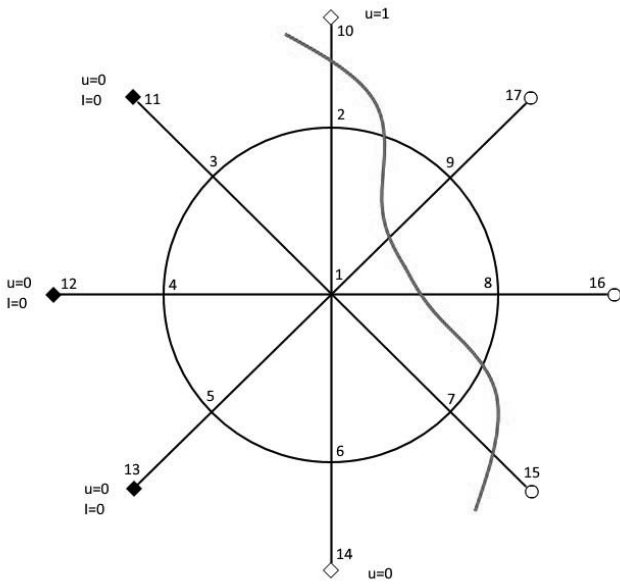


Fig. 4. Potentials are equal to zero at nodes 1-7 and 11-14.

である。また、 u_{17} は系3により求められており、 n_{17} はディリクレ-ノイマン写像により与えられている。既に $\gamma(v_9v_{17})$ は既に求められているから、

$$I_f(v_{17}) = \gamma(v_9v_{17})(u_{17} - u_9) = n_{17},$$

により

$$u_9 = u_{17} - \frac{n_{17}}{\gamma(v_9v_{17})},$$

である。よって、 v_2 を中心にキルヒホッフの法則を考えれば、

$$\gamma(v_2v_{10}) + \gamma(v_2v_9)u_9 = 0,$$

により、 $\gamma(v_2v_9)$ を決定できる。

(ii) 回路を回転させつつ、(i) の操作を繰り返せば、全ての円周上の導電率を求めることができる。

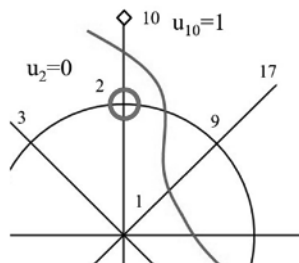


Fig. 5. Reconstruction of $\gamma(v_2v_9)$.

4.3 中心ノードの周りの導電率の再構成

(i) 再び §4.1-(i) と同様の境界条件を選ぶ。 $u_1 = \dots = u_7 = 0$ である。 §4.2-(i) と同様にすると、 u_{16} , u_8 , u_9 が

求まる。よって、 v_9 を中心にしてキルヒホッフの法則を考えれば、Fig. 6 のようになる。

$$\begin{aligned} &\gamma(v_1v_9)(-u_9) + \gamma(v_2v_9)(u_2 - u_9) \\ &+ \gamma(v_9v_{17})(u_{17} - u_9) + \gamma(v_8v_9)(u_8 - u_9) = 0, \end{aligned}$$

により、 $\gamma(v_1v_9)$ を求めることができる。

(ii) 回路を回転させつつ、(i) の操作を繰り返せば、全ての円周上の導電率を求めることができる。

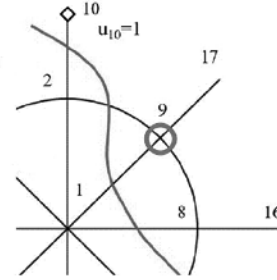


Fig. 6. Reconstruction of $\gamma(v_1v_9)$.

§4.1-4.3 をまとめて、次の結果を得る。

定理 4 ディリクレ-ノイマン写像 Λ_γ により、導電率 γ を一意的に決定できる。

5. ディリクレ-ノイマン写像の摂動

ある与えられたディリクレ-ノイマン写像 Λ_γ に対して、摂動を加えることを考える。行列表示 M_γ を用いれば、各成分が十分小さな $m \times m$ 行列 ϵ により、 $M_\gamma + \epsilon$ と表せる。定理 4 により、 Λ_γ (すなわち M_γ) により導電率 γ を求めることができる。 $M_\gamma + \epsilon$ から求められる導電率を γ' とすると、 γ と γ' の間にもずれが生じるが、 ϵ が小さな摂動ならば、そのずれは小さいことが期待される。さらに、摂動がどの境界ノードに加えられたかに応じて、その影響が及ぶ範囲も変わる可能性がある。

ここでは特に後者に着目し、摂動を与えるノードと、再構成された導電率が影響を受けた辺の関係について、数値計算による検証を行った。境界ノードを $v_1, \dots, v_m \in V_B$ とする。

$$M_\gamma = [a_{ij}]_{i,j=1}^m, \quad \epsilon = [\epsilon_{ij}]_{i,j=1}^m,$$

と表すと、ディリクレデータ $\mathbf{f} = {}^t[f_1, \dots, f_m]$ に対し、

$$a_{i1}f_1 + \dots + a_{im}f_m$$

は $v_i \in V_B$ におけるノイマンデータを表し、

$$(a_{i1} + \epsilon_{i1})f_1 + \dots + (a_{im} + \epsilon_{im})f_m$$

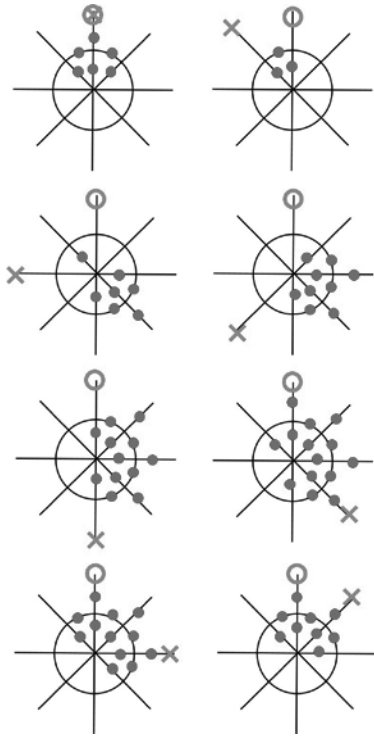


Fig. 7. If $\epsilon_{ij} \neq 0$, the associated input and output are given at the node $v_j = \circ$ and the node $v_i = \times$, respectively. The reconstructed conductivity γ is perturbed at the nodes \bullet .

は $v_i \in V_B$ において得られるノイマンデータに摂動が加えられたことを意味する。従って、 ϵ の各成分 ϵ_{ij} は、 v_j における入力が v_i での応答に与える影響を摂動したものと考えられる。 ϵ として、ある 1 つの成分のみに摂動を加え、その他の成分は 0 とした場合に、導電率が影響を受けた箇所を Fig. 7 に示した。なお、導電率の再構成手順は §4 に従っている。導電率の再構成においては、 ϵ の各成分の影響は電気回路全体に広がらず、局所的な領域に集まっていることが分かる。また、影響を受ける領域は、 ϵ_{ij} に対応する入力と応答のノードの配置に関係していることが分かる。

6. 結言

円形電気回路において、ディリクレ-ノイマン写像を用いて導電率を再構成する手法、及びディリクレ-ノイマンデータに加えられた摂動が再構成された導電率に与える影響について考察した。その結果、以下の結論を得た。

(1) 与えられたディリクレ-ノイマン写像を用いて、各辺上の導電率を一意的に求めることができる。

(2) 導電率の再構成に用いる特殊解は、回路の形状に応じて完全決定的な境界条件を定めたコーシー問題を解く

ことで求められる。

(3) ディリクレ-ノイマン写像の摂動により導電率が影響を受けた箇所の分布を数値的に検証した。

参考文献

- 1) A. P. Calderón, "On an Inverse Boundary Value Problem", *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics*, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro (1980).
- 2) G. Uhlmann, "Electrical Impedance Tomography and Calderón's Problem", *Inverse Problems*, **25**, 123011 (2009).
- 3) E. B. Curtis, J. A. Morrow, "The Dirichlet-to-Neumann Map for a Resistor Network", *SIAM J. Appl. Math.*, **51**, 1011-1029 (1991).
- 4) E. B. Curtis, E. Mooers, J. A. Morrow, "Finding the Conductors in Circular Networks from Boundary Measurements", *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **28**, 781-814 (1994).
- 5) E. Curtis, D. Ingerman, J. A. Morrow, "Circular Planer Graphs and Resistor Networks", *Lin. Alg. and Its Appl.*, **283**, 115-150 (1998).
- 6) E. B. Curtis, J. A. Morrow, *Inverse Problems for Electrical Networks*, (World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 2000).
- 7) R. Oberlin, "Discrete Inverse Problems for Schrödinger and Resistor Networks", *Research Archive of Research Experiences for Undergraduates Program at Univ. of Washington* (2000).
- 8) H. Isozaki, H. Morioka, "Inverse Scattering at Fixed Energy for Discrete Schrödinger Operators on the Square Lattice", *Ann. Inst. Fourier*, **65**, 1153-1200 (2015).
- 9) L. Borcea, V. Druskin, A. V. Mamonov, "Circular Resistor Networks for Electrical Impedance Tomography with Partial Boundary Measurements", *Inverse Problems*, **26**, 045010 (2010).