A Control Method of the Plate Equation by Power Series of Gevrey Class

Shouta MORI* , Hisashi MORIOKA** , Hideki TAKUWA***

(Received October 20, 2017)

Motion planning which is construction of an input implementing a desired output on a system is a fundamental problem on both of the theory of control and its practical applications. In many cases, a system is represented as an ordinary differential equation or a partial differential equation. Here let us deal final states of a system with outputs. Then we can consider some control problems. A typical example of some control problems is the control by boundary values. Laroche-Martin-Rouchon [1)] considered an approximate motion planning as a boundary control problem on the heat equation using Gevrey class functions. In this paper, we study an approximate motion planning on the one dimensional plate equation by boundary control using Gevrey class functions. More precisely, we consider the initial-boundary value problem (1)-(3). The output is a given final state of the plate at time $T > 0$, and the input is the pair of the Dirichlet boundary value and the Neumann boundary value at an endpoint of the plate. We construct this input using finitely truncated Gevrey functions so that the associated solution of the plate equation approximates the desired final state. Our main result is Theorem 6.

Key words : plate equation, Gevrey class, control problem, power series

キーワード ：梁振動の方程式, Gevrey class, 制御問題, べき級数

梁振動の方程式のGevrey classによるべき級数を用いた解による制御方法

森　将太, 森岡　悠, 多久和英樹

1. 緒言

動作計画 (Motion planning), すなわち, ある系において指定された出力動作を実現する入力を設計する問題は, 制御理論において, 実用上および理論的な観点から基本的な問題である．工学的な問題では, 多くの場合, 扱う系は常微分方程式あるいは偏微分方程式によってモデル化される．従って, 動作計画問題としては, 出力はある時刻における解の終状態, 入力は, 初期状態による制御や境界制御などが考えられる．偏微分方程式で記述される動作計画としては, Laroche-Martin-Rouchon [1)] による熱方程式の研究がある．本研究では, この手法を空間一次元の長さ L の梁の振動現象の場合に適用し, 梁振動の制御手法を提案する．

梁の片方の端を固定した場合のモデルは, 次の初期値・境界値問題として定式化できる．$(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ に対し, $u(t, x)$ で梁の変位を表すとする．

* Department of Mechanical and Systems Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-06-6845-8669, E-mail : duq0545@mail4.doshisha.ac.jp
** Department of Energy and Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-0774-65-6492, E-mail : hmorioka@mail.doshisha.ac.jp
*** Department of Mechanical and Systems Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-0774-65-6431, E-mail : htakuwa@mail.doshisha.ac.jp

このとき, u は $(0,T)\times(0,L)$ において方程式

$$\partial_t^2 u+\partial_x^4 u=0, \tag{1}$$

に従う. さらに, u は初期条件

$$u(0,x)=u_0(x),\quad \partial_t u(0,x)=u_0^1(x),\quad x\in(0,L), \tag{2}$$

および境界条件

$$\begin{aligned}&u(t,0)=\partial_x u(t,0)=0,\\ &u(t,L)=h(t),\quad \partial_x u(t,L)=I(t),\quad t\in(0,T),\end{aligned} \tag{3}$$

をみたすとする. ここで, h,I は十分なめらかな関数であり, $u_0\in H^2(0,L), u_0^1\in L^2(0,L)$ とする.

関数 $u_T(x), u_T^1(x)$ が与えられたとする. 梁振動の初期値・境界値問題 (1)-(3) において, 時刻 $T>0$ で梁の状態が $u(T,\cdot)=u_T$, $\partial_t u(T,\cdot)=u_T^1$ となるよう, 境界値 h, I によって制御する問題を考える. 工学的な制御問題においては, 入力にあたる h,I は具体的に, かつできるだけ簡単な関数によって構成できることが望ましい. そこで, 本研究では, まずべき級数を用いて初期値・境界値問題 (1)-(3) の近似解を具体的に構成する. さらに, このべき級数を有限の項で打ち切ることにより, 十分小さな $\epsilon>0$ に対して,

$$||u_T-\tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}<\epsilon, \tag{4}$$

$$||u_T^1-\partial_t\tilde{u}(T,\cdot)||_{L^2(0,L)}<\epsilon, \tag{5}$$

の意味で近似制御となるような入力 $\tilde{h},\tilde{I}$ を構成する. ここで $\tilde{u}$ は, 初期値・境界値問題 (1)-(3) において, $h=\tilde{h}$, $I=\tilde{I}$ としたときの解である. 以上に述べた解 $\tilde{u}$ と入力 $\tilde{h},\tilde{I}$ は, Gevrey 関数を用いて行う. 詳細は §2 で述べる.

本論文の構成は以下の通りである. §2 では, 上に述べたように Gevrey 関数を用いた解の構成について述べる. §3 では, (4)-(5) の評価に必要な, 梁振動方程式の初期値問題に関するエネルギー不等式を導出する. §4 では, 主結果の主張を述べ, その証明を行う. 本論文の主結果は定理 6 である. §5 は補遺として, ソボレフ空間 H^2 の意味での近似多項式の構成方法について補足を述べる.

2. べき級数解と Gevrey 関数

定義 1 $y:t\in[0,T]\mapsto y(t)\in R$ は C^∞ 級の関数とする. このとき任意の非負の整数 m に対して関数 y が

$$\sup_{0\le t\le T}\left|z^{(m)}(t)\right|\le M\frac{(m!)^{s_1}}{R^m},$$

を満たす正の数 M,R が存在したとする. このとき関数 y は t について $s_1\in[1,+\infty)$ クラスの *Gevrey* 関数である.

定義 2 $\gamma\in(0,+\infty)$, $T>0$ としたとき関数 ψ_γ を

$$\psi_\gamma(t)=\begin{cases}0 & t=0,T,\\ \exp\left(\frac{-1}{((T-t)t)^\gamma}\right) & t=(0,T),\end{cases}$$

で定義する. このとき関数 ψ_γ は *Gevrey* クラス $1+(\frac{1}{\gamma})$ である. さらに関数 Ψ_γ を

$$\Psi_\gamma(t)=\frac{\int_0^t\psi_\gamma(\tau)d\tau}{\int_0^T\psi_\gamma(\tau)d\tau}\qquad t\in[0,T],$$

で定義する. このとき関数 Ψ_γ は *Gevrey* クラス $1+(\frac{1}{\gamma})$ の関数である.

定義 3 $z:(t,x)\in[0,T]\times[0,L]\mapsto z(t,x)\in R$ は C^∞ 級の関数とする. このとき任意の非負の整数 m,n に対して関数 z が

$$\sup_{0\le t\le T,0\le x\le L}\left|\frac{\partial^{m+n}z}{\partial_t^m\partial_x^n}(t,x)\right|\le M\frac{(m!)^{s_1}(n!)^{s_2}}{R_1^m R_2^n},$$

を満たす正の数 M,R_1,R_2 が存在したとする. このとき関数 z は t について $s_1\in[1,+\infty)$ クラスであり,x について $s_2\in[1,+\infty)$ クラスの *Gevrey* 関数である.

次にべき級数を用いて, 近似制御を行うことができる入力 $\tilde{h}$, $\tilde{I}$ の求めるため, 方程式 (1)-(3) の近似解を求める. P_0,P_0^1,P_T,P_T^1 を, それぞれ u_0,u_0^1,u_T,u_T^1 の近似多項式, すなわち, 十分小さな $\epsilon>0$ に対して

$$||P_0-u_0||_{H^2(0,L)}<\epsilon,\quad ||P_0^1-u_0^1||_{L^2(0,L)}<\epsilon, \tag{6}$$

$$||P_T-u_T||_{H^2(0,L)}<\epsilon,\quad ||P_T^1-u_T^1||_{L^2(0,L)}<\epsilon, \tag{7}$$

を満たすものとする. この条件 (6)-(7) を満たす多項式の構成については, §5 で若干の注釈を述べる. P_0,P_0^1,P_T,P_T^1 を, 十分大きな自然数 N に対して,

$$P_0(x)=\sum_{i=0}^N P_{0,i}\frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!},$$

$$P_0^1(x)=\sum_{i=0}^N P_{0,i}^1\frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!},$$

$$P_T(x)=\sum_{i=0}^N P_{T,i}\frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!},$$

$$P_T^1(x)=\sum_{i=0}^N P_{T,i}^1\frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!},$$

と表す.

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} + \partial_x^4 \bar{u} = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ \bar{u}(0,x) = P_0(x), \\ \partial_t \bar{u}(0,x) = P_0^1(x), \quad x \in (0,L), \\ \bar{u}(t,0) = 0, \\ \bar{u}(t,L) = \bar{h}(t), \quad t \in (0,T), \\ \partial_x \bar{u}(t,0) = 0, \\ \partial_x \bar{u}(t,L) = \bar{I}(t), \end{cases} \tag{8}$$

を考える.

このときの $\bar{h}$, $\bar{I}$ を求める. そのために方程式 (8) の解 $\bar{u}$ を $\bar{u}(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) \frac{x^i}{i!}$ のべき級数の形で求める. ここで, 任意の i に対して $a_i \in C^{\infty}([0,T])$ とする.

方程式 $\partial_t^2 \bar{u} + \partial_x^4 \bar{u} = 0$ と境界条件

$$\bar{u}(t,0) = 0, \ \ \partial_x \bar{u}(t,0) = 0,$$

より, 任意の i に対して

$$a_{4i}(t) = 0, \ \ a_{4i+1}(t) = 0,$$

が得られる. ここで,

$$\partial_x^2 \bar{u}(t,0) = Y(t), \ \ \partial_x^3 \bar{u}(t,0) = Z(t),$$

とおく. このときこの Y, Z と方程式 $\partial_t^2 \bar{u} + \partial_x^4 \bar{u} = 0$ を用いて形式的な解の残りの係数を決めると, 任意の i に対して

$$a_{4i+2}(t) = (-1)^i Y^{(2i)}(t), \quad a_{4i+3}(t) = (-1)^i Z^{(2i)}(t),$$

で決まる. これらを用いることで形式的な解は

$$\begin{aligned} \bar{u}(t,x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Y^{(2i)}(t) \frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Z^{(2i)}(t) \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!}, \end{aligned}$$

となる. この無限和で表された関数が収束するとは限らないので, 収束するための関数 Y, Z の条件を求める.

補題 4 形式的な解を表すために用いた関数 Y, Z が *Gevrey* クラス $\alpha \in [1,2)$ であると仮定する.

このときべき級数で表された形式的な解 $\bar{u}$ は収束し, t について α であり x について 1 の *Gevrey* 関数である.

証明. $\bar{u}$ が収束することを示す. 形式的な解 $\bar{u}$ を

$$\begin{aligned} \bar{u}(t,x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Y^{(2i)}(t) \frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Z^{(2i)}(t) \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!} \\ &= \bar{u}^1(t,x) + \bar{u}^2(t,x), \end{aligned}$$

と表す. このとき,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^{m+n} \bar{u}}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial^{m+n} \bar{u}^1}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x) \right| + \left| \frac{\partial^{m+n} \bar{u}^2}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x) \right|, \end{aligned}$$

であるから, $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ が t について α であり x について 1 の *Gevrey* 関数であることを示せばよい. 以下 $\bar{u}^1$ を評価する.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^{m+n} \bar{u}^1}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x) \frac{L^n}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right| \\ &= \left| \sum_{4i+2 \geq n}^{\infty} (-1)^i Y^{(2i+m)}(t) \frac{x^{4i+2-n}}{(4i+2-n)!} \frac{L^n}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right| \\ &< \sum_{4i+2 \geq n}^{\infty} \left| Y^{(2i+m)}(t) \frac{x^{4i+2-n}}{(4i+2-n)!} \frac{L^n}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right|, \end{aligned}$$

和の一般項を計算すると,

$$\begin{aligned} &\left| Y^{(2i+m)}(t) \frac{x^{4i+2-n}}{(4i+2-n)!} \frac{L^n}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right| \\ &\leq \left| Y^{(2i+m)}(t) \frac{L^{4i+2}}{(4i+2-n)!} \frac{1}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right|, \end{aligned}$$

となる. 関数 Y は *Gevrey* クラス α としているので, *Gevrey* クラスの評価式より, ある正の定数 M_1, A_1 が存在して,

$$\begin{aligned} &\left| Y^{(2i+m)}(t) \frac{L^{4i+2}}{(4i+2-n)!} \frac{1}{(m!)^{\alpha}(n!)} \right|, \\ &\leq M_1 \frac{(2i+m)!^{\alpha}}{A_1^{2i+m}} \frac{L^{4i+2}}{(4i+2-n)!} \frac{1}{(m!)^{\alpha}(n!)} \\ &\leq \frac{M_1 L^{4i+2}}{A_1^{2i+m}} \frac{(2i)!^{\alpha}}{(4i+2-n)!(n!)} \frac{(2i+m)!}{(m!)(2i)!}^{\alpha} \\ &\leq \frac{M_1 L^{4i+2}}{A_1^{2i+m}} \frac{(2i)!^{\alpha-4}(2i)!^4}{(4i+2-n)!(n!)} \frac{(2i+m)!}{(m!)(2i)!}^{\alpha}, \end{aligned}$$

となる．スターリングの不等式より

$$\begin{aligned}
&\frac{M_1 L^{4i+2}}{A_1^{2i+m}} \frac{(2i)!^{\alpha-4}(2i)!^4}{(4i+2-n)!(n!)} \frac{(2i+m)!}{(m!)(2i)!}^{\alpha} \\
\sim&\frac{M_1 L^{4i+2}}{A_1^{2i+m}} \frac{(2i)!^{\alpha-4}}{(4i+2-n)!(n!)} \\
&\quad\times \frac{(2i+m)!}{(m!)(2i)!}^{\alpha} \frac{(8i)!}{2} \frac{(4\pi i)^{\frac{3}{2}}}{4^{8i}} \\
\leq&\frac{M_1 L^{4i+2-n}}{A_1^{2i+m}}(2i)!^{\alpha-4}(2^{2i+m})^{\alpha} 4^2 (4i)! \frac{(4\pi i)^{\frac{3}{2}}}{2} \\
=&M_1 L^{4i+2} \frac{1}{R_1^{2i}} \frac{1}{R_1^m}(2i)!^{\alpha-4}(4i)! 8(4\pi i)^{\frac{3}{2}} \\
=&M_1 \frac{v_i}{R_1^m},
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，

$$R_1 = \frac{A_1}{2^{\alpha}}, \quad v_i = L^{4i+2}\frac{1}{R_1^{2i}}(2i)!^{\alpha-4}(4i)!8(4\pi i)^{\frac{3}{2}},$$

とおいた．この式に対して，ダランベールの判定法より

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \frac{v_{i+1}}{v_i} \\
=&\lim_{i\to\infty} \frac{L^4}{R_1^2} \frac{(4i+4)(4i+3)(4i+2)(4i+1)}{(2i+1)^{4-\alpha}(2i+2)^{4-\alpha}} (\frac{i+1}{i})^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

となる．仮定より $\alpha \in [1, 2)$ であるので，$\bar{u}^1$ は収束する．次に $\bar{u}^1$ が t について α であり x について 1 の *Gevrey* 関数であることを示す．

$$\bar{M}_1 = M_1 \sum_{4i+2\geq n}^{\infty} v_i,$$

とおく．$\bar{u}^1$ は $\alpha \in [1, 2)$ のとき，

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\bar{u}^1}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x)\right| < \bar{M}_1 \frac{(m!)^{\alpha}(n!)}{R_1^m L^n},$$

となる．$\bar{u}^2$ に対しても同様にして，ある正の定数 $\bar{M}_2$, R_2 が存在して，

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\bar{u}^2}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x)\right| < \bar{M}_2 \frac{(m!)^{\alpha}(n!)}{R_2^m L^n},$$

と求められる．よって，ある正の定数 M, R により，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^{m+n}\bar{u}}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x)\right| \\
\leq&\left|\frac{\partial^{m+n}\bar{u}^1}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{m+n}\bar{u}^2}{\partial_t^m \partial_x^n}(t,x)\right| \\
\leq&M\frac{(m!)^{\alpha}(n!)}{R^m L^n},
\end{aligned}$$

となる．

よって，べき級数で表した解が収束する条件は x について *Gevrey* クラス 1としたとき，t についての条件は *Gevrey* クラス $\alpha \in [1, 2)$ となる． (証明終)

この補題により収束する条件は分かったので，それを満たすように関数 Y, Z を決定する．そのために，関数 P_0, P_0^1, P_T, P_T^1 の係数と定義 2 で決めた *Gevrey* クラス $1+(\frac{1}{\gamma})$ の関数 Ψ_γ を用いて,Y, Z を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
Y(t) =& \sum_{i=0}^{N}(-1)^i P_{0,i}\frac{t^{2i}}{(2i)!}(1-\Psi_\gamma(t)) \\
&+ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i P_{T,i}\frac{(t-T)^{2i}}{(2i)!}\Psi_\gamma(t), \\
Z(t) =& \sum_{i=0}^{N}(-1)^i P_{0,i}^1\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}(1-\Psi_\gamma(t)) \\
&+ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i P_{T,i}^1\frac{(t-T)^{2i+1}}{(2i+1)!}\Psi_\gamma(t),
\end{aligned}$$

ここで，$\gamma \in (1, \infty)$ とする．この関数を用いることで，形式的な解 $\bar{u}$ を収束するものとして表すことができた．この無限和で表された解 $\bar{u}$ をある有限な N 項目までの和として

$$\sup_{0\leq t\leq T, 0\leq x\leq L} |\bar{u}-\hat{u}| < \epsilon, \tag{9}$$

を満たす関数

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t,x) =& \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Y^{(2i)}(t)\frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!} \\
&+ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Z^{(2i)}(t)\frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!},
\end{aligned}$$

として定義する．

方程式 (8) より $\bar{h}(t) = \bar{u}(t, L)$, $\bar{I}(t) = \partial_x \bar{u}(t, L)$ は求まる．有限和で表された関数 $\hat{u}$ から求まる $\tilde{h}, \tilde{I}$ は,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left|\bar{h}-\tilde{h}\right| < \epsilon, \tag{10}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left|\bar{I}-\tilde{I}\right| < \epsilon, \tag{11}$$

を満たすものとする．条件 (9), (6)-(7) と (10)-(11) を満たすように N を取り直す．よって，

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(t) =& \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Y^{(2i)}(t)\frac{L^{4i+2}}{(4i+2)!} \\
&+ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Z^{(2i)}(t)\frac{L^{4i+3}}{(4i+3)!}, \\
\tilde{I}(t) =& \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Y^{(2i)}(t)\frac{L^{4i+1}}{(4i+1)!} \\
&+ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i Z^{(2i)}(t)\frac{L^{4i+2}}{(4i+2)!},
\end{aligned}$$

と求められる．この関数を入力として用いる．

3. 梁振動の方程式の弱形式と評価式

ここでは, Evans [2] の §7.2 の議論を梁振動方程式の場合に適用し, エネルギー不等式を導く. 梁振動の方程式が

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \partial_x^4 w = f, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ \quad w(0,x) = w_0(x), \\ \partial_t w(0,x) = w_0^1(x), \quad x \in (0,L), \\ \quad w(t,0) = 0, \\ \quad w(t,L) = 0, \quad t \in (0,T), \\ \partial_x w(t,0) = 0, \\ \partial_x w(t,L) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

で与えられたとする.

ここで $f \in L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right), w_0 \in H_0^2(0,L), w_0^1 \in L^2(0,L)$ の関数とする. このとき関数 w を

$$w \in L^2\left(0,T;H_0^2(0,L)\right),$$

とする. ただし, $\partial_t w \in L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)$, $\partial_t^2 w \in L^2\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right)$ とする. このとき任意の $v \in H_0^2(0,L)$ に対して $t \in [0,T]$ で

$$\left(\partial_t^2 w, v\right)_{L^2(0,L)} + B[w,v;t] = (f,v)_{L^2(0,L)}, \tag{13}$$

を考えたとき, これの式が梁振動の方程式 (12) の弱形式である. ここで $B[u,v;t]$ は任意の $u,v \in H_0^2(0,L)$ に対して

$$B[u,v;t] := \int_0^L \partial_x^2 u\, \partial_x^2 v\, dx,$$

とする.

補題 5 梁振動の方程式の弱形式 *(13)* が与えられたとき, その弱解は $t \in [0,T]$ で定数 C に対して,

$$\begin{aligned} &||\partial_t w||_{L^2(0,L)}^2 + ||w||_{H^2(0,L)}^2 \\ \leq& C\left(||w_0^1||_{L^2(0,L)}^2 + ||w_0||_{H^2(0,L)}^2 + ||f||_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2\right), \end{aligned} \tag{14}$$

を満たす.

証明. *Galerkin* 近似を用いて証明する. そのために滑らかな関数として, $\theta_k = \theta_k(x)(k=1,2,\ldots)$ を $H_0^2(0,L)$ で直交基底とし, $L^2(0,L)$ で正規直交基底であるものとする. このとき, ある自然数 m を用いて新たに関数 w_m を

$$w_m(t,x) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t)\theta_k(x),$$

とする. ここで係数 $d_m^k(k=1,2,\cdots)$ は任意の $k=1,2,\ldots$ に対して $t \in [0,T]$ で

$$\begin{aligned} d_k^m(0) &= (w_0,\theta_k), \\ \frac{d}{dt}d_k^m(0) &= \left(w_0^1,\theta_k\right), \\ (\partial_t^2 w_m,\theta_k) + B[w_m,\theta_k;t] &= (f,\theta_k), \end{aligned}$$

を満たす関数とする. この 3 つ目の式の両辺に $\frac{d}{dt}d_k^m(t)$ を掛け $k=1$ から $k=m$ までの和をとることで,

$$\left(\partial_t^2 w_m, \partial_t w_m\right) + B[w_m,\partial_t w_m;t] = (f,\partial_t w_m),$$

を得ることができる. この式の 3 つの項についてそれぞれ考える. まず, 左辺の第 1 項目から

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 w_m, \partial_t w_m\right) &= \int_0^L \partial_t^2 w_m \partial_t w_m dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\partial_t w_m\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \left(\partial_t w_m\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||\partial_t w_m||_{L^2(0,L)}^2, \end{aligned}$$

が求まる. 次に第 2 項目を計算すると,

$$\begin{aligned} B[w_m,\partial_t w_m;t] &= \int_0^L \partial_x^2 w_m \partial_x^2 \partial_t w_m dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\partial_x^2 w_m\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L (\partial_x^2 w_m)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||\partial_x^2 w_m||_{L^2(0,L)}^2, \end{aligned}$$

が求まる. 右辺を計算すると,

$$\begin{aligned} (f,\partial_t w_m) &= \int_0^L f\ \partial_t w_m dx \\ &\leq \int_0^L |f|\ |\partial_t w_m|\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^L |f|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\partial_t w_m|^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}||f||_{L^2(0,L)}^2 + \frac{1}{2}||\partial_t w_m||_{L^2(0,L)}^2, \end{aligned}$$

が求まる. よってこれらの式から弱形式より,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(||\partial_t w_m||_{L^2(0,L)}^2 + ||\partial_x^2 w_m||_{L^2(0.L)}^2\right) \\ \leq&\frac{1}{2}\left(||\partial_t w_m||_{L^2(0,L)}^2 + ||f||_{L^2(0,L)}^2\right) \\ \leq&\frac{1}{2}\left(||\partial_t w_m||_{L^2(0,L)}^2 + ||\partial_x^2 w_m||_{L^2(0.L)}^2 + ||f||_{L^2(0,L)}^2\right), \end{aligned}$$

となる. 新たに

$$\eta(t) := ||\partial_t w_m||^2_{L^2(0,L)} + ||\partial_x^2 w_m||^2_{L^2(0.L)},$$
$$\xi(t) := ||f||^2_{L^2(0,L)},$$

とする. このとき, もとの不等式は

$$\partial_t \eta(t) \le \eta(t) + \xi(t),$$

となる. この式にグロンウォールの不等式を用いると, $t \in [0,T]$ で

$$\eta(t) \le e^t(\eta(0) + \int_0^t \xi(s)ds),$$

が得られる. $\eta(0)$ は

$$\begin{aligned}\eta(0) &= ||\partial_t w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} + ||\partial_x^2 w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} \\ &= ||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||\partial_x^2 w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} \\ &\le ||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} \\ &\quad + ||\partial_x w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} + ||\partial_x^2 w_m(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} \\ &= ||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_m(0,\cdot)||^2_{H^2(0,L)} \\ &= ||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_0||^2_{H^2(0,L)},\end{aligned}$$

となる. この式を用いることで

$$\begin{aligned}&||\partial_t w_m||^2_{L^2(0,L)} + ||\partial_x^2 w_m||^2_{L^2(0.L)} \\ &\le e^T \left(||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_0||^2_{H^2(0,L)} + \int_0^t ||f||^2_{L^2(0,L)} ds\right) \\ &\le e^T \left(||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_0||^2_{H^2(0,L)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right),\end{aligned}$$

が得られる. θ_k は $H_0^2(0,L)$ の直交基底であったから, 特に $w_m, \partial_x w_m \in H_0^1(0,L)$ である. よって, w_m, $\partial_x w_m$ にポアンカレの不等式を適用できて, 十分大きい正の定数 C により,

$$\begin{aligned}&||\partial_t w_m||^2_{L^2(0,L)} + ||w_m||^2_{H^2(0.L)} \\ &\le C\left(||w_0^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_0||^2_{H^2(0,L)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

となる.

式 (15) より, $(w_m)_{m=1}^\infty$ は $H^2(0,L)$ で弱収束する部分列 $(w_{m_l})_{l=1}^\infty$ を持ち, 弱収束極限 w が方程式 (12) の弱解になっていることが分かる. さらに, $\|w\|_{H^2(0,L)} \le \liminf_{l\to\infty} \|w_{m_l}\|_{H^2(0,L)}$ が成り立つ (例として, 定理 8.29 [3]). よって,

$$\begin{aligned}&||\partial_t w||_{L^2(0,L)} + ||w||_{H^2(0.L)} \\ &\le C\left(||w_0^1||_{L^2(0,L)} + ||w_0||_{H^2(0,L)} + ||f||_{L^2(0,T;L^2(0,L))}\right),\end{aligned}$$

を得ることができる. (証明終)

4. 主結果

§2-§3 を用いることで方程式 (1)-(3) の近似制御問題を解くことができた.

定理 6 ある与えられた $t=0$ での状態 u_0, u_0^1 から, 与えられた $t=T$ での状態 $u_T = u(T,x)$, $u_T^1 = \partial_t u(T,x)$ への状態の変化を考える. そのとき, 方程式 *(1)-(3)* を $h=\tilde{h}$, $I=\tilde{I}$ としたときの方程式の解 $\tilde{u}$ は, ある $K>0$ に対して,

$$||u_T - \tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)} < K\epsilon, \tag{16}$$
$$||u_T^1 - \partial_t \tilde{u}(T,\cdot)||_{L^2(0,L)} < K\epsilon, \tag{17}$$

となる.

証明. 主定理を証明するために, §3 の評価式を用いて証明する. そのために, 方程式を §3 の形の方程式に変換することを考える. 関数 χ を

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \delta, \\ 1 & L-\delta < x \le L, \end{cases}$$

である $C^\infty([0,L])$ の関数と定義する. この関数によって,

$$w(t,x) := u(t,x) - \chi(x)h(t) - \chi(x)(x-L)I(t),$$

とする. w_0, w_0^1, f を

$$\begin{aligned}w_0(x) &= u_0(x) - \chi(x)h(0) - \chi(x)(x-L)I(0), \\ w_0^1(x) &= u_0^1(x) - \chi(x)\partial_t h(0) - \chi(x)(x-L)\partial_t I(0), \\ f(t,x) &= -\chi(x)\partial_t^2 h(t) - \chi(x)(x-L)\partial_t^2 I(t) \\ &\quad - \partial_x^4\chi(x)h(t) - \partial_x^4\chi(x)\cdot(x-L)I(t) \\ &\quad - 4\partial_x^3\chi(x)I(t),\end{aligned}$$

として, w は §3 の方程式を満たす形になっている. この関係を用いて不等式 (16)-(17) を示す. 1 つ目の不等式 (16) について考える. 評価式の左辺より,

$$\begin{aligned}&||u_T - \tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)} \\ &\le ||u_T - P_T||_{H^2(0,L)} + ||P_T - \tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)},\end{aligned}$$

となる. この 2 項目の $||P_T - \tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}$ の P_T と $\tilde{u}(T,x)$ はそれぞれ方程式 (8) の条件と方程式 (1)-(3) を $h=\tilde{h}$, $I=\tilde{I}$ としたときの方程式の解 $\tilde{u}$ からなる式である. それぞれの方程式を $\chi(x)$ を用いて前と同様に §3 の方程式の形に直すことを考える.

$$\bar{w}(T,x) = P_T(x) - \chi(x)\bar{h}(T) - \chi(x)(x-L)\bar{I},$$
$$\tilde{w}(T,x) = \tilde{u}(T,x) - \chi(x)\tilde{h}(T) - \chi(x)(x-L)\tilde{I}(T),$$

により, 2 項目は

$$
\begin{aligned}
&||P_T-\tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
\le&||(P_T-\chi\bar{h}(T)-\chi\cdot(x-L)\bar{I}(T))\\
&\quad-(\tilde{u}(T,\cdot)-\chi\tilde{h}(T)-\chi\cdot(x-L)\tilde{I}(T))||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi(\tilde{h}(T)-\bar{h}(T))||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi\cdot(x-L)(\tilde{I}(T)-\bar{I}(T))||_{H^2(0,L)}\\
\le&||\bar{w}(T,\cdot)-\tilde{w}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi(\tilde{h}(T)-\bar{h}(T))||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi\cdot(x-L)(\tilde{I}(T)-\bar{I}(T))||_{H^2(0,L)},
\end{aligned}
$$

となる. よって, 不等式 (16) は

$$
\begin{aligned}
&||u_T-\tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
\le&||u_T-P_T||_{H^2(0,L)}+||\bar{w}(T,\cdot)-\tilde{w}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi(\tilde{h}(T)-\bar{h}(T))||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\chi\cdot(x-L)(\tilde{I}(T)-\bar{I}(T))||_{H^2(0,L)}
\end{aligned}
$$

と求まる. この不等式の右辺は 2 項目を除き, それぞれ仮定と入力の条件 (7), (10) と (11) から, ある定数 $A>0$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&||u_T-\tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
&<||\bar{w}(T,\cdot)-\tilde{w}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}+A\epsilon
\end{aligned}
$$

と求まる. この残りの項について評価する. この項に対して, §3 の評価式 (14) を用いることで

$$
\begin{aligned}
&||\bar{w}(T,\cdot)-\tilde{w}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
<&C(||\bar{w}(0,\cdot)-\tilde{w}(0,\cdot)||_{H^2(0,L)}\\
&\quad+||\partial_t\bar{w}(0,\cdot)-\partial_t\tilde{w}(0,\cdot)||_{L^2(0,L)}\\
&\quad+||\bar{f}-\tilde{f}||_{L^2(0,T;L^2(0,L))}),
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\bar{f}$, $\tilde{f}$ は

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(t,x)=&-\chi(x)\partial_t^2\bar{h}(t)-\chi(x)(x-L)\partial_t^2\bar{I}(t)\\
&-\partial_x^4\chi(x)\bar{h}(t)-\partial_x^4\chi(x)\cdot(x-L)\bar{I}(t)\\
&-4\partial_x^3\chi(x)\bar{I}(t),\\
\tilde{f}(t,x)=&-\chi(x)\partial_t^2\tilde{h}(t)-\chi(x)(x-L)\partial_t^2\tilde{I}(t)\\
&-\partial_x^4\chi(x)\tilde{h}(t)-\partial_x^4\chi(x)\cdot(x-L)\tilde{I}(t)\\
&-4\partial_x^3\chi(x)\tilde{I}(t),
\end{aligned}
$$

である. §3 の評価式 (14) を用いた式の項すべて, 入力の条件 (10)-(11) から, 正の定数 B, D, E に対して,

$$
\begin{aligned}
||\bar{w}(0,\cdot)-\tilde{w}(0,\cdot)||_{H^2(0,L)}&<B\epsilon,\\
||\partial_t\bar{w}(0,\cdot)-\partial_t\tilde{w}(0,\cdot)||_{L^2(0,L)}&<D\epsilon,\\
||\bar{f}-\tilde{f}||_{L^2(0,T;L^2(0,L))})&<E\epsilon,
\end{aligned}
$$

となる. よって, 正の定数 F に対して,

$$||\bar{w}(T,\cdot)-\tilde{w}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}<F\epsilon,$$

と求まる. これらをまとめることで,

$$||u_T-\tilde{u}(T,\cdot)||_{H^2(0,L)}<K\epsilon,$$

と求めることができる.

最後に不等式 (17) が成り立つことを考える. この不等式 (17) も不等式 (16) と同様に行うことで求まる. (証明終)

5.　近似多項式の構成に関する補遺

ここでは, 条件 (6)-(7) を満たす多項式の構成について述べる. 次の補題が, 構成法を示している.

補題 7 $f\in H^2(0,L)$ とする. 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある多項式 p が存在し,

$$\|f-p\|_{H^2(0,L)}<\epsilon,$$

を満たす.

証明. $C^2(0,L)$ の $H^2(0,L)$ における稠密性から, f を $[0,L]$ で 2 階連続微分可能な関数として一般性を失わない. ワイエルシュトラスの多項式近似定理により, $\partial_x^2 f$ を $[0,L]$ で一様に近似し, さらに区間 $(0,L)$ の有界性から, 任意に小さい $\epsilon>0$ に対して

$$\|\partial_x^2 f-p_0\|_{L^2(0,L)}<\epsilon, \tag{18}$$

となる多項式 p_0 が存在する.

$$p_1(x)=\int_0^x p_0(s)ds+\partial_x f(0),\quad x\in(0,L),$$

とおくと, p_1 も多項式である. さらに,

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x f-p_1\|_{L^2(0,L)}^2\\
&=\int_0^L\left|\int_0^x\left(\partial_x^2 f(s)-p_0(s)\right)ds\right|^2dx\\
&\le\|\partial_x^2 f-p_0\|_{L^2(0,L)}^2\int_0^L x\,dx\\
&\le\frac{L^2\epsilon^2}{2},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

を満たす.

$$p(x)=\int_0^x p_1(s)ds+f(0),\quad x\in(0,L),$$

とおき, 同様の評価を繰り返すことで, 十分大きな正の定数 C に対し

$$\|f - p\|_{L^2(0,L)} < C\epsilon \tag{20}$$

が成り立つことも示せる.

不等式 (18), (19), (20) より, 改めて小さな $\epsilon > 0$ を取り直せば, 補題が得られる. (証明終)

6. 結言

梁振動の方程式について研究し以下の結果を得た.

1. 梁振動の方程式の弱形式を定義することができた.
2. 定義した弱形式から解についての評価式を得ることができた.
3. 梁振動の方程式について近似制御問題を解くことができた.

参考文献

1) B. Laroche, P. Martin and P. Rouchon, "Motion Planning for the Heat Equation", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **10**, 629-643 (2000).

2) L. C. Evans, *Partial Differential Equations* , Second Edition, (American Mathematical Society, Rhode Island, 2010).

3) 黒田成俊, 関数解析, 共立数学講座 15, (共立出版, 東京, 1980), p.191.