

# Properties of a Reflection Quandle and Related Quandles

Tomoaki KASAMATSU\*, Akira KONO\*

(Received October 20, 2017)

A quandle, which is an algebraic system, is used when one considers some knot invariants. A. Inoue<sup>1)</sup> considered and studied coloring of knots by  $\text{Rot}\mathbb{E}^2$ , where  $\text{Rot}\mathbb{E}^2$  is the *rotation quandle* consisting of all rotations of the Euclidean plane with a suitable binary operation. In this paper, we consider the quandle consisting of all reflections of the Euclidean plane, which generates  $\text{Rot}\mathbb{E}^2$ . Then we consider the quandles of lines and angles formed by the  $x$ -axis and those lines. We study coloring of knots by these quandles.

**Key words :** knot, quandle, reflection

**キーワード :** 結び目, カンドル, 対称変換

## 対称変換カンドルとそれに関連するカンドルの性質

笠松 朋晃, 河野 明

### 1. はじめに

結び目の不变量には様々なものが存在するが、カンドルという代数系を用いると不变量が構成できる。カンドルにも様々なものがあり、それらの種類や性質を調べることは結び目理論の1つのテーマである。A. Inoue<sup>1)</sup>はユーフリッド平面での回転運動に適切な2項演算を入れることにより、回転運動カンドル  $\text{Rot}\mathbb{E}^2$  を構成した。今回は回転運動を生成することができるユーフリッド平面の対称変換からカンドルを構成し、さらにそこから自然に出てくる新しいカンドルの性質を述べる。

### 2. カンドルと彩色

はじめに、カンドルの定義を述べる。(詳しくは M. Elhamdadi and S. Nelson<sup>2)</sup> を参照。)  
 $X$  を空でない集合とし、 $X$  上の2項演算  $* : X \times X \rightarrow$

$X$  を次の3条件を満たすものとする:

(i) 任意の  $x \in X$  に対して

$$x * x = x, \quad (1)$$

(ii) 任意の  $x, y \in X$  に対して  $z \in X$  が唯一存在して

$$z * y = x, \quad (2)$$

(iii) 任意の  $x, y, z \in X$  に対して

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z). \quad (3)$$

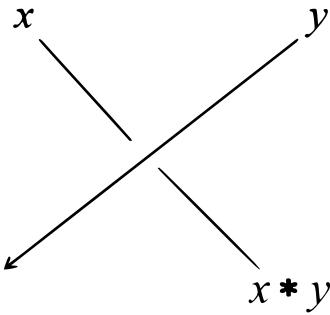
このとき  $(X, *)$  をカンドルという。

**例 2.1**  $X$  を群の部分集合とし、共役で閉じているものとする。2項演算  $*$  を  $x, y \in X$  に対して

$$x * y := y^{-1}xy \quad (4)$$

で定めると、 $(X, *)$  はカンドルになる。このとき  $(X, *)$  を共役カンドルという。

\* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto  
 E-mail : akono@mail.doshisha.ac.jp

Fig. 1. a  $X$ -coloring.

次に彩色について述べる。

$K$ を向きづけられた結び目,  $D$ を $K$ のダイアグラム,  $(X, *)$ をカンドルとする。 $D$ の各弧に $X$ の元を対応させる写像  $\mathcal{A} : \{D\text{の弧}\} \rightarrow X$  が  $D$ の各交点で Fig.1 のような関係をみたしているとき,  $\mathcal{A}$ を  $D$ の  $X$ -彩色という。 $\mathcal{A}$ が定値写像のとき  $\mathcal{A}$ を自明な彩色といい, 自明な彩色以外の彩色が存在するとき,  $D$ は  $X$ -彩色可能であるという。また,  $D$ の  $X$ -彩色全体の集合の濃度のことを  $D$ の  $X$ -彩色数という。カンドルの演算はライデマイスター変形に対応しているので,  $D$ が  $X$ -彩色可能かどうかは結び目の不变量である。また,  $D$ の  $X$ -彩色数も結び目の不变量である。よって  $D$ が  $X$ -彩色可能であるとき,  $K$ は  $X$ -彩色可能であるといい,  $D$ の  $X$ -彩色数のことを  $K$ の  $X$ -彩色数という。ただし,  $X$ が無限集合の場合,  $X$ -彩色数をみつけるのは一般には難しい。

### 3. 対称変換カンドル

ここからは, ユークリッド平面での対称変換に2項演算を入れて新しいカンドルを構成することを考える。その後, ユークリッド平面での対称変換は直線によって決まるので, 直線にも2項演算を入れることでカンドルを構成できることを見る。まずはユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視し,  $\mathbb{R}^2$ の元を列ベクトルとみなす。

$a \in \mathbb{R}^2$ を定点,  $n \in S^1$ を単位ベクトルとする。写像  $r_{a,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定める:

$$r_{a,n}(x) := x - 2\{(x - a) \cdot n\}n. \quad (5)$$

これは  $a$  を通り,  $n$  に垂直な直線に関する対称変換を表す。また,

$$l_{a,n} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r_{a,n}(x) = x\} \quad (6)$$

は  $a$  を通り,  $n$  に垂直な直線を表している。

以下のことが, 簡単な考察でわかる。

**性質 3.1**  $l_{a,n} \cap l_{b,m} \neq \emptyset$  ならば  $x \in l_{a,n} \cap l_{b,m}$  に対して

$$r_{a,n}(x) = r_{b,m}(x). \quad (7)$$

特に  $l_{a,n} = l_{b,m}$  のとき, 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$r_{a,n}(x) = r_{b,m}(x). \quad (8)$$

今,

$$\text{Ref}\mathbb{E}^2 := \{r_{a,n} \mid a \in \mathbb{R}^2, n \in S^1\} \quad (9)$$

とおく。 $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ に演算を入れて, カンドルになるようにしよう。ここで  $r_{a,n} \in \text{Ref}\mathbb{E}^2$  の逆変換  $r_{a,n}^{-1}$  は

$$r_{a,n}^{-1} = r_{a,n} \quad (10)$$

であることに注意しておく。

演算  $*$ :  $\text{Ref}\mathbb{E}^2 \times \text{Ref}\mathbb{E}^2 \rightarrow \text{Ref}\mathbb{E}^2$  を

$$r_{a,n} * r_{b,m} := r_{b,m}^{-1} \circ r_{a,n} \circ r_{b,m} \quad (11)$$

と定める。すると  $(\text{Ref}\mathbb{E}^2, *)$  は共役カンドルになる。この  $(\text{Ref}\mathbb{E}^2, *)$  をユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ の対称変換カンドルと呼ぶ。実際にこの演算が閉じていることを確認しておこう。

$$\begin{aligned} & (r_{a,n} * r_{b,m})(x) \\ &= x - 2\{(x - a) \cdot n - 2(n \cdot m)(x - b) \cdot m\} \\ & \quad (n - 2(n \cdot m)m) \end{aligned} \quad (12)$$

とできる。ここで

$$|n - 2(n \cdot m)m| = 1 \quad (13)$$

より  $n - 2(n \cdot m)m \in S^1$  である。

(i)  $l_{a,n} = l_{b,m}$  のとき。

$r_{a,n} = r_{b,m}$  となるので

$$r_{a,n} * r_{a,n} = r_{a,n}^{-1} \circ r_{a,n} \circ r_{a,n} = r_{a,n}. \quad (14)$$

(ii)  $l_{a,n} \neq l_{b,m}$ かつ $l_{a,n} \cap l_{b,m} \neq \emptyset$ のとき.

$y \in l_{a,n} \cap l_{b,m}$ とすると

$$\begin{aligned} & (x-y) \cdot (n - 2(n \cdot m)m) \\ &= (x-a) \cdot n - 2(n \cdot m)(x-b) \cdot m \end{aligned} \quad (15)$$

とできるので

$$\begin{aligned} & (r_{b,m}^{-1} \circ r_{a,n} \circ r_{b,m})(x) \\ &= x - 2\{(x-y) \cdot (n - 2(n \cdot m)m)\} \\ &\quad (n - 2(n \cdot m)m). \end{aligned} \quad (16)$$

よって  $r_{a,n} * r_{b,m} = r_{y,n-2(n \cdot m)m}$ .

(iii)  $l_{a,n} \cap l_{b,m} = \emptyset$ のとき.

このとき  $n//m$  であるので  $m = \pm n$ .

つまり

$$n - 2(n \cdot m)m = n - 2(n \cdot (\pm n))(\pm n) = -n \quad (17)$$

であり,

$$\begin{aligned} & (x-a) \cdot n - 2(n \cdot m)(x-b) \cdot m \\ &= \{x - (2b-a)\} \cdot (-n) \end{aligned} \quad (18)$$

となるので,

$$\begin{aligned} & (r_{b,m}^{-1} \circ r_{a,n} \circ r_{b,m})(x) \\ &= x - 2[\{x - (2b-a)\} \cdot (-n)](-n). \end{aligned} \quad (19)$$

よって  $r_{a,n} * r_{b,m} = r_{2b-a,-n}$ .

(i)～(iii) よりこの演算は閉じていることがわかった.

ユークリッド平面での対称変換は直線を 1 つ定めれば唯一 1 つに決まり, 逆に対称変換を 1 つ定めれば直線が唯一 1 つに決まる. つまり  $r_{a,n}$  と  $l_{a,n}$  は 1 対 1 に対応している. そこでユークリッド平面上の直線の全体の集合  $\text{Line}\mathbb{E}^2$  にも 2 項演算を定めることでカンドルを構成することができる.  $\text{Line}\mathbb{E}^2$  上の演算  $*$  :  $\text{Line}\mathbb{E}^2 \times \text{Line}\mathbb{E}^2 \rightarrow \text{Line}\mathbb{E}^2$  を

$$l_{a,n} * l_{b,m} := l_{r_{b,m}(a), n-2(n \cdot m)m} \quad (20)$$

で定める. すると  $(\text{Line}\mathbb{E}^2, *)$  はカンドルになり, また,  $r_{a,n}$  と  $l_{a,n}$  の対応はカンドルの演算  $*$  を保つ. 幾何的にみると  $l_{a,n} * l_{b,m}$  は直線  $l_{a,n}$  を直線  $l_{b,m}$  に関して対称変換して得られる直線になっている.

$\text{Ref}\mathbb{E}^2$  および  $\text{Line}\mathbb{E}^2$  の彩色の例をみてみる.

**例 3.2** 右三葉結び目は  $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ -彩色可能であるかを

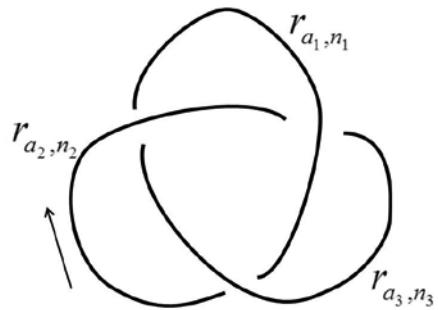


Fig. 2. a  $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ -coloring of a right hand trefoil.

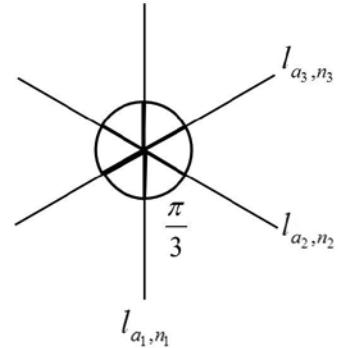


Fig. 3. a  $\text{Line}\mathbb{E}^2$ -coloring of a right hand trefoil.

みる.

Fig.2 のように彩色されたとすると

$$r_{a_1,n_1} * r_{a_3,n_3} = r_{a_2,n_2} \quad (21)$$

$$r_{a_3,n_3} * r_{a_2,n_2} = r_{a_1,n_1} \quad (22)$$

$$r_{a_2,n_2} * r_{a_1,n_1} = r_{a_3,n_3} \quad (23)$$

となり, 直線でいえば

$$l_{a_1,n_1} * l_{a_3,n_3} = l_{a_2,n_2} \quad (24)$$

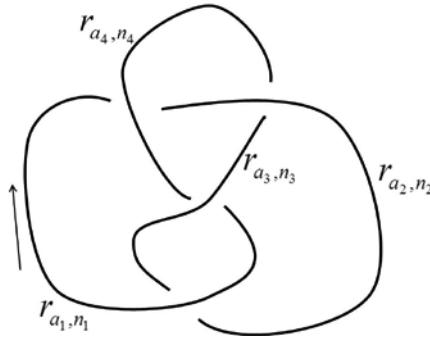
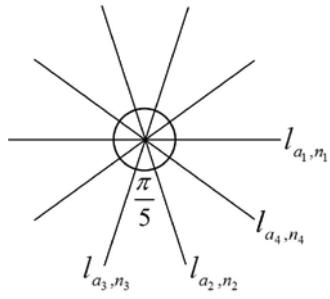
$$l_{a_3,n_3} * l_{a_2,n_2} = l_{a_1,n_1} \quad (25)$$

$$l_{a_2,n_2} * l_{a_1,n_1} = l_{a_3,n_3} \quad (26)$$

となる. このとき Fig.3 のような自明でない彩色を考えられるので, 右三葉結び目は  $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ -彩色可能である.

**例 3.3** 8 の字結び目が  $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ -彩色可能かどうかをみる.

Fig.4 のように彩色されたとすると

Fig. 4. a RefE<sup>2</sup>-coloring of a figure eight knot.Fig. 5. a LineE<sup>2</sup>-coloring of a figure eight knot.

$$r_{a_1,n_1} * r_{a_4,n_4} = r_{a_2,n_2} \quad (27)$$

$$r_{a_2,n_2} = r_{a_3,n_3} * r_{a_1,n_1} \quad (28)$$

$$r_{a_4,n_4} = r_{a_1,n_1} * r_{a_3,n_3} \quad (29)$$

$$r_{a_3,n_3} * r_{a_2,n_2} = r_{a_4,n_4} \quad (30)$$

となり、直線でいえば

$$l_{a_1,n_1} * l_{a_4,n_4} = l_{a_2,n_2} \quad (31)$$

$$l_{a_2,n_2} = l_{a_3,n_3} * l_{a_1,n_1} \quad (32)$$

$$l_{a_4,n_4} = l_{a_1,n_1} * l_{a_3,n_3} \quad (33)$$

$$l_{a_3,n_3} * l_{a_2,n_2} = l_{a_4,n_4} \quad (34)$$

となる。このとき Fig.5 のような自明でない彩色を考えられるので、8の字結び目は RefE<sup>2</sup>-彩色可能である。

#### 4. $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色と $n$ -彩色

上の2つの例のように、1点で交わる直線群で、適切ななす角をもったものをみつけることができれば RefE<sup>2</sup>-彩色可能であることがわかる。

そこで次は角度に注目してカンドルを構成し、それを

用いて RefE<sup>2</sup>-彩色可能になるための十分条件を与える。さらにそれを用いて、 $n$ -彩色と RefE<sup>2</sup>-彩色との関係を考えよう。

直線  $l_{a,n}$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\theta \in [0, \pi)$  とする。このとき

$$n = \begin{pmatrix} \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \sin \theta \\ \pm \cos \theta \end{pmatrix} \text{ (複合同順)} \quad (35)$$

なので、 $[0, \pi)$  から  $S^1$  への写像  $N : [0, \pi) \rightarrow S^1$  を

$$N(\theta) := \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

とすると、 $x$  軸の正の向きとのなす角から直線の法線ベクトルを求めることができる。

また、2つの単位ベクトル  $n, m \in S^1$  が  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$  を用いて

$$n = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

のようにならねば

$$n - 2(n \cdot m)m = \begin{pmatrix} \sin(2\theta_2 - \theta_1) \\ -\cos(2\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} \quad (38)$$

となり、 $2\theta_2 - \theta_1 \in [0, \pi)$  であれば

$$N(\theta_1) - 2(N(\theta_1) \cdot N(\theta_2))N(\theta_2) = -N(2\theta_2 - \theta_1) \quad (39)$$

とかけれる。

しかし  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$  より  $2\theta_2 - \theta_1$  の範囲は  $-\pi < 2\theta_2 - \theta_1 < \pi$  であるので、一般にはそのようにはかけない。

そこで  $x$  軸とのなす角  $\theta$  を  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  の元

$$[\theta] := \theta + \pi\mathbb{Z} \quad (40)$$

と同一視することにし、同じ記号を用いて、 $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  から  $S^1$  のべき集合  $2^{S^1}$  への写像  $N : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow 2^{S^1}$  を次のように定める:

$$N([\theta]) := \left\{ \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\}. \quad (41)$$

また、 $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  に加法、減法、整数倍を以下のように定める:

$$[\theta] + [\varphi] := [\theta + \varphi], \quad (42)$$

$$[\theta] - [\varphi] := [\theta] + [-\varphi], \quad (43)$$

$$n[\theta] := [n\theta] \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (44)$$

これより

$$N(\theta_1) - 2(N(\theta_1) \cdot N(\theta_2))N(\theta_2) \in N(2[\theta_2] - [\theta_1]) \quad (45)$$

とかくことができる。さらに  $2^{S^1}$  から Line $\mathbb{E}^2$  のべき集合  $2^{\text{Line}\mathbb{E}^2}$  への写像  $L_0 : 2^{S^1} \rightarrow 2^{\text{Line}\mathbb{E}^2}$  を

$$L_0(N) := \{l_{0,n} \in \text{Line}\mathbb{E}^2 \mid n \in N \in 2^{S^1}\} =: l_N \quad (46)$$

で定めると、 $l_{N([\theta])}$  は 1 点集合になる。 $2^{\text{Line}\mathbb{E}^2}$  の 1 点集合を Line $\mathbb{E}^2$  の元と同一視する写像を  $P : 2^{\text{Line}\mathbb{E}^2} \supset \{1 \text{ 点集合}\} \rightarrow \text{Line}\mathbb{E}^2$  とすると  $P \circ L_0 \circ N : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \text{Line}\mathbb{E}^2$  は角度から原点を通る直線を決定していると考えられる。

ここで  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  上の演算  $* : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  を次のように定める：

$$[\theta] * [\varphi] := 2[\varphi] - [\theta]. \quad (47)$$

すると  $(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, *)$  はカンドルになり、 $P \circ L_0 \circ N$  はカンドルの準同型になる。よって次のことが自然と成り立つ。

**定理 4.1**  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色可能ならば Ref $\mathbb{E}^2$ -彩色可能である。

次に、よく知られている彩色を考える。

$n$  を正の整数とする。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  上の演算  $* : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  を

$$a * b := 2b - a \pmod{n} \quad (48)$$

で定める。このとき  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, *)$  はカンドルになる。このカンドルは R. H. Fox<sup>3)</sup> によって導入されたので、 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, *)$  による彩色を Fox- $n$ -彩色、または単に  $n$ -彩色という。

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  への写像  $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  を

$$f(a) := \left[ \frac{a}{n} \pi \right] \quad (49)$$

で定める。すると  $f$  はカンドルの準同型になる。実際、

$$\begin{aligned} f(a * b) &= f(2b - a) \\ &= \left[ \frac{1}{n} (2b - a) \pi \right] \\ &= \left[ \frac{a}{n} \pi \right] * \left[ \frac{b}{n} \pi \right] \\ &= f(a) * f(b). \end{aligned} \quad (50)$$

よって  $K$  が  $n$ -彩色可能ならば  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色可能になる。

そこで定理 4.1 の系として次のことを得る。

**系 4.2** ある正の整数  $n$  に対して、 $K$  が  $n$ -彩色可能であれば、 $K$  は Ref $\mathbb{E}^2$ -彩色可能である。

先程の例で  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色を使ってみてみる。

**例 4.3** 右三葉結び目が Ref $\mathbb{E}^2$ -彩色可能であること  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色を用いて確かめてみる。

$\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  で彩色できたとすると、それらの角度に対応する直線はすべて原点で交わり、直線同士のなす角は  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  の彩色の仕方によって決まっている。

今、ある交点に対して Fig.6 のように彩色されているとする。このとき対応している直線をすべて直線同士のなす角を保ったまま角度  $\psi$  だけ回転させたとすると

$$[\theta] \mapsto [\theta + \psi], \quad (51)$$

$$[\varphi] \mapsto [\varphi + \psi], \quad (52)$$

$$[\theta] * [\varphi] \mapsto [\theta] * [\varphi] + [\psi] \quad (53)$$

のようにそれぞれ移るが

$$[\theta] * [\varphi] + [\psi] = [\theta + \psi] * [\varphi + \psi] \quad (54)$$

となり、彩色の関係を保っている。

よって結び目を  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  で彩色できたとすると、それらに対応する直線のうち、1 本を  $x$  軸に重なるように回転させることができる。すなわち彩色の際、1 つの角度を  $[0]$  としてよい。

そこで右三葉結び目が Fig.7 のように彩色されたとすると

$$[0] * [0] = [0] \quad (55)$$

$$[\theta_1] * [0] = [\theta_2] \quad (56)$$

$$[\theta_2] * [\theta_1] = [0] \quad (57)$$

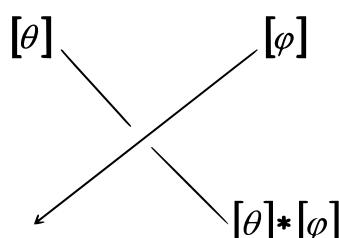
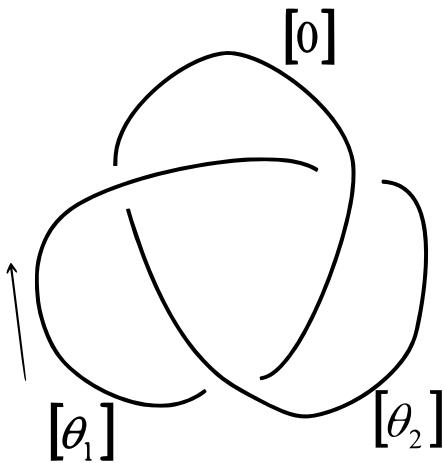


Fig. 6. a  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -coloring of a crossing.

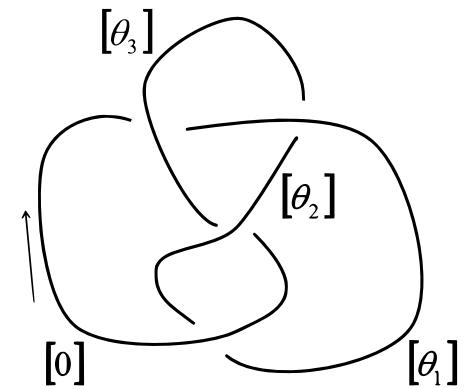
Fig. 7. a  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -coloring of a right hand trefoil.

すなわち

$$[2\theta_2] = [\theta_1] \quad (58)$$

$$[-\theta_1] = [\theta_2] \quad (59)$$

$$[2\theta_1 - \theta_2] = [0] \quad (60)$$

Fig. 8. a  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -coloring of a figure eight knot.

そこで Fig.8 のように彩色されたとすると

$$[0] * [\theta_3] = [\theta_1] \quad (66)$$

$$[\theta_1] = [\theta_2] * [0] \quad (67)$$

$$[\theta_2] * [\theta_1] = [\theta_3] \quad (68)$$

$$[\theta_3] = [0] * [\theta_2] \quad (69)$$

すなわち

$$[2\theta_3] = [\theta_1] \quad (70)$$

$$[\theta_1] = [-\theta_2] \quad (71)$$

$$[2\theta_1 - \theta_2] = [\theta_3] \quad (72)$$

$$[\theta_3] = [2\theta_2] \quad (73)$$

となる。式(60)より

$$\theta_2 = 2\theta_1 + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (61)$$

とかけ、式(59)より

$$\theta_2 = -\theta_1 + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (62)$$

とかけるので、

$$\theta_1 = \frac{1}{3}(m-n)\pi \quad (63)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{3}(2m+n)\pi \quad (64)$$

と表せる。ここで  $n=0, m=1$  とすれば

$$[\theta_1] = \left[ \frac{\pi}{3} \right], [\theta_2] = \left[ \frac{2}{3}\pi \right] \quad (65)$$

となり、式(58)-(60)をみたす。つまり式(55)-(57)をみたすので  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色可能である。したがって右三葉結び目は  $\text{RefE}^2$ -彩色可能である。

**例 4.4** 8の字結び目が  $\text{RefE}^2$ -彩色可能であることを見  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色を用いて確かめてみる。

上でみたように 1 つの角度は  $[0]$  としてよい。

となる。式(71)より

$$\theta_1 = -\theta_2 + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (74)$$

式(73)より

$$\theta_3 = 2\theta_2 + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad (75)$$

式(70)より

$$2\theta_3 = \theta_1 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (76)$$

とかける。これらより

$$\theta_1 = \frac{1}{5}(4n+2m-l)\pi \quad (77)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{5}(n-2m+l)\pi \quad (78)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{5}(2n+m+2l)\pi \quad (79)$$

と表せる。ここで  $n=1, m=0, l=0$  とすると

$$[\theta_1] = \left[ \frac{4}{5}\pi \right], [\theta_2] = \left[ \frac{\pi}{5} \right], [\theta_3] = \left[ \frac{2}{5}\pi \right] \quad (80)$$

となり, 式(70)-(73)をみたす. つまり式(66)-(69)をみたすので  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ -彩色可能である.

よって 8 の字結び目は  $\text{Ref}\mathbb{E}^2$ -彩色可能である.

### 参考文献

- 1) A. Inoue, “On Colorability of Knots by Rotations, Torus Knot and PL Trochid”, *Topology and Its Applications*, **183**, 36-44 (2015).
- 2) M. Elhamdadi and S. Nelson, *Quandles: an Introduction to the Algebra of Knots*, (American Mathematical Society, Rhode Island, 2015).
- 3) R. H. Fox, “A Quick Trip through Knot Theory”, *Proc. The Univ. of Georgia Institute*, 120-167 (1961).