The Estimation of the Credit Risk of Individual Local Governments by taking into account Liquidity Risk of Municipal Bond Market

Naoyuki INADA*, Hiroshi TSUDA*

(Received October 20, 2015)

The purpose of this study is to estimate the credit risk of individual local governments by taking into account liquidity risk through a method based on the concept of the straight coupon bond cross-sectional market (SCBCSM), a model for the price valuation of corporate bonds proposed by Tsuda (2002,2006). By obtaining credit risk information, such as the probability of default, from the market price of the bonds, this model uses the price fluctuation structure between bonds to estimate the implied default probability. It is assumed that municipal bond defaults will not occur in Japan's local financial system, thanks to a variety of institutions, but since there is no guarantee that debt payments will be made on time, bond prices are believed to be set at levels that reflect the credit risk involved. In this study, we estimated a model for municipal bond price valuation using market price data for municipal bonds issued by prefectures and could obtain further information regarding differences in the term structures of implied default probabilities between those prefectures by taking into account liquidity risk of municipal bond market.

Key words : municipal bond, credit risk, liquidity risk

キーワード : 地方債，信用リスク，流動性リスク

地方債市場の流動性リスクを考慮した地方自治体の信用リスク評価

稲田　直之，津田　博史

1. はじめに

本研究は，津田(2002，2006)[1-3]により提案された社債価格評価モデル SCBCSM(Straight Coupon Bond Cross-Sectional Market)のコンセプトに準拠した方法により，地方公共団体が財政上必要とする資金を調達するために発行した地方債の価格評価モデルを推定し，そのモデルを通じて各地方公共団体の信用リスクを推定することが目的である．従来の地方自治体の財政破綻リスク，すなわち，信用リスク評価手法は，地方の財政状態に基づき，定量的に評価したスコアリングモデルを用いて財政破綻の可能性，信用リスクを評価する方法が主であった．また，これまでの方法では，破綻するかしないかの可能性に関する情報に限定されていたが，このモデルは，債券の市場価格から累積デフォルト確率の期間構造などの信用リスク情報を得るアプローチをとっており，銘柄間の価格変動構造を通して，インプライドなデフォルト確率を推定するものである．日本の地方財政制度は，さまざまな制度を通じて，地方債がデフォルトすることはないとされているが，債務に関する支払いが期日通りに執行されることが保証されていないことから，信用リスクが反映した形で価格が形成されていると考えられる．本研究では 2003 年から 2015 年までの各年度末の地方債に対して信用リスク評価を行ったものから，東京都債から推定した流動性リスクを除き，各都道府県の

*Department of Mathematical Sciences, Doshisha University, Kyoto
Telephone/Fax: +81-774-65-6681, E-mail:duo0903@mail4.doshisha.ac.jp,htsuda@mail.doshisha.ac.jp

インプライドなデフォルト確率を推定している. 流動性リスクを考慮することで, 各都道府県の期間構造の相違, そして, 各都道府県の信用リスクのランク分類が前回の研究報告 [4]よりも評価することが出来た. 本論文は, 第 2 章で地方債に関して説明し, 次に第 3 章で研究の目的や背景に関して述べる. 続いて, 第 4 章で研究の理論や分析手法を紹介し, 最後の第 5 章で分析結果に関して述べる.

2. 地方債に関して

2.1　地方債

地方債は,「地方公共団体が一般会計年度を越えて借り入れるために発行する公募債」である. 地方債を国内の資金調達元から分類すると, 先ず, 政府系資金（財政融資資金による地方債, 公営企業金融公庫基金による地方債）と, 民間資金（銀行等引受資金による地方債, 市場公募資金による地方債）に分けられる. 本研究では, これらの地方債の内, 市場公募資金による地方債である市場公募地方債を分析対象とする.

地方債は, 信用リスクのある債券市場の中で社債に次いで現存量が多く, 2014 年度末時点で約 58 兆円, 2014 年度に発行された地方債は 407 銘柄である. 普通社債が 439 銘柄で, 約 59 兆円であることを考えると, 普通社債とほぼ同じ市場規模があることがわかる.

また, 市場公募資金による 2014 年度の地方債発行額は約 6.9 兆円と多く, 現在の発行額よりも今後拡大することが予測される.

2.2　地方債の信用リスクとは

本研究における地方債の信用リスクとは, 「利子や元本の期日通りの支払いが確保されない可能性」と定義し, 累積デフォルト確率で表現する.
本研究では, 地方自治体の信用リスクを評価する際, 地方債の信用リスクと地方自治体の信用リスクは同等であると仮定する.

3. 本研究の背景

3.1　先行研究

第2章で紹介したように, 債券市場の中での地方債の存在感は年々高まっているが, 地方債の信用リスクに関する先行研究は少なく, 主に地方債と国債の金利差(地方債の対国債スプレッド)がどのような要因によって変化するのかを研究するものが多かった. 例えば, 王（2011）[5]は, 債券と国債の金利差が生じる要因の一つに流動性リスクがあることを取り上げている. また, 神楽岡（2010）[6]は金利差が生じる要因に, 債券市場特有のシステマティックリスクがあることを挙げている.

一方で, 地方債の価格に着目をし, 地方債の発行体である地方自治体のリスクを推定する研究はこれまであまり行われていない.

3.2　本研究の目的

本研究の目的は, 地方自治体の累積デフォルト確率(信用リスク)の期間構造を, 流動性リスクを考慮した形で推定することである.

従来の地方債の信用リスクに関する研究では, 国債とのスプレッドが全て信用リスクと仮定をしていたが, 今回の分析では流動性リスクを考慮した. したがって, 本研究における地方自治体の累積デフォルト確率の期間構造の情報は, 投資家に対して地方債投資判断のためのより詳細な情報を与えることができ, 地方自治体にとっては地方自治体の財政政策を考える上での意思決定情報になりうる.

4. 分析方法

本研究は津田(2002, 2006)[1-3]により提案された社債価格評価モデルのコンセプトに準拠した方法により, 銘柄間の価格変動構造から地方自治体の累積デフォルト確率の期間構造を推定する. 社債価格評価モデルは, 債券の市場価格からデフォルト確率などの信用リスク情報を得るアプローチをとっており, 銘柄間の価格変動構造を考慮し, 一般化最小二乗法を用いることで, インプライドな累積デフォルト確率の期間構造を推定することが可能なモデルである.

4.1　地方債価格モデルによる地方自治体の累積デフォルト確率の推定

この節では，社債価格評価モデルのコンセプトに準拠した方法を用いて，地方債価格モデルを定式化し，地方自治体の累積デフォルト確率を推定する．その際，以下の順で説明していく．

①まず，国債価格モデルから平均割引関数を求める．これは，地方債価格モデルを考える際に無リスクの平均割引関数が必要となるためである．流れとしては，

(1)国債価格モデルとは何かを説明し，

(2)国債価格モデルから平均割引関数を求める．

②次に，東京都債から流動性リスク割引関数を求める.流動性リスク割引関数とは，地方債と国債のスプレッドの中には，信用リスクによるスプレッドと流動性によるスプレッドに分けられると考えられる．地方債の中で最も信用リスクの小さい東京都債から流動性による増加割合を仮定し，流動性リスク割引関数を求める．

③そして，地方債価格モデルを推定する．地方債価格モデルとは，国債価格モデルに信用リスク(累積デフォルト確率関数で表現したもの)を考慮したモデルである．

モデルの定式化の順序としては，

(1)累積デフォルト確率の定式化をし，

(2)地方債の期待キャッシュ・フローを定式化する．

(3)その後，地方債価格モデルの定式化を行う．

④最後に，一般化最小二乗法を用いて地方債価格データから地方債価格モデルの累積デフォルト確率関数の係数を推定することで，地方自治体の累積デフォルト確率の期間構造を求める．

① 国債価格モデルから無リスク平均割引関数を求める

(1)国債価格モデルとは

国債価格モデルとは，国債の理論価格を統計的モデルで表現したものであり，国債とは，一定の期間間隔で事前に定めた利息(クーポンと呼ばれる)，及び，償還時点で元本(額面金額100円)を支払うことを約束した債務証書である．

ある国債iの理論価格Pとは，将来時点で発生する各キャッシュ・フロー$C(s_{ij})$を，その期間s_{ij}に対応した割引率$D(s_{ij})$で割り引いた現在価値の合計の値と考えられる．

次に，国債の理論価格を式で表現する際の期間s_{ij}やキャッシュ・フロー$C(s_{ij})$，割引率$D(s_{ij})$の表現を説明していく．

キャッシュ・フローに関しては，本研究において信用リスク(デフォルトの可能性)がないと考えている国債に関して，現時点をtとし，ある国債iのキャッシュ・フローの発生する時点は，ある国債iに依存する．それらを

$$(t <)t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{iM(t)} \tag{1}$$

とし，各キャッシュ・フローの発生する時点を現時点tからみた期間で，以下のように表現する．

$$s_{ij} = t_{ij} - t\ (j = 0, \ldots, M(i)), t_{i0} = t, s_{i0} = 0$$

ここで$t_{iM(i)} = t + s_{iM(i)}$はある国債$i$の満期時点であり，$s_{iM(i)}$は，現時点$t$からみた償還期間となる．年2回クーポン$C$が支払われるある国債$i$（利付債）の場合，各キャッシュ・フローは，

$$\begin{aligned} C_i(s_{i1}) = C_i(s_{i2}) = \cdots = C_i(s_{iM(i)-1}) \\ = 0.5c, \\ C_i(s_{iM(i)}) = 100 + 0.5c \end{aligned} \tag{2}$$

である．

割引率は，各キャッシュ・フロー期間に対応して，$D(s)(0 \le s \le s_{aM})$と表現する．

したがって，国債の理論価格は以下の式で表現できる．

$$\begin{aligned} P_i &= C(s_{i1})D_i(s_{i1}) + C(s_{i2})D_i(s_{i2}) + \cdots \\ &\quad + C(s_{iM(i)})D_i(s_{iM(i)}) \\ &= \sum_{j=1}^{M(i)} C(s_{ij})D_i(s_{ij}) \end{aligned} \tag{3}$$

国債の理論価格をモデル化する際は，ある１銘柄の理論価格を考える場合とキャッシュ・フローが発生する期間s_{ij}の記号が変わり，分析対象のN銘柄すべてのキャッシュ・フローの発生時点を小さい順に並べて，次のように表す．

$$s_{a1} < s_{a2} < \cdots < s_{aM}\,, s_{aM} = max\{s_{1M(1)}, \ldots, s_{NM(N)}\} \tag{4}$$

ここで，s_{aM}のaは，N銘柄すべてのキャッシュ・フローの発生時点を表す.

以上から，国債の理論価格を表現した国債価格モデルは,

$$P_i(0) = \sum_{m=1}^{M} C_i(s_{am}) D_i(s_{am}) \quad (s_{am} \neq s_{ij} のとき C_i(S_{am}) = 0) \tag{5}$$

となる.

(2)国債価格モデルから平均割引関数を求める.

国債価格モデルから求める無リスク平均割引関数(信用リスクのない債券の平均割引関数)は，地方債価格モデルから累積デフォルト確率を求める際に利用する.

将来のキャッシュ・フローが確定的な信用リスクのない国債などの債券を考えた場合，式(5)から分かるように，確率変数である市場価格との関係で，割引率が確率変数となる．したがって，割引関数D_iについて定式化する必要がある．満期での元本100円の返済も含めて将来のM回発生するキャッシュ・フローに対して割引率がM個存在することから，国債価格と割引率は，1対1対応しておらず，割引関数の確率プロセスを考える必要がある．それは，第i国債のt時点での価格変動構造を推定することになり，割引率を期間の関数と考えた割引関数モデルが必要となる.

したがって，本稿では，平均割引関数として以下の多項式を仮定する.

$$\overline{D_i}(s) = 1 + \sum_{j=1}^{p} \delta_j(z_i) s^j \tag{6}$$

ここで，p次の多項式の係数は，q個の銘柄属性に依存する関数である．また，その係数は銘柄属性の1次の線形関数

$$\delta_j(z_i) = \delta_{j1} z_{i1} + \delta_{j2} z_{i2} + \cdots + \delta_{jq} z_{iq} \tag{7}$$

であるということを仮定する．未知パラメータδ_{jk}は，銘柄全てに対して共通である．したがって，N個の個別債券価格から$p \times q$個の銘柄共通なパラメータδ_{jk}を推定することになる.

このとき，式(5)より第i国債のt時点の市場価格$P_i(0)$は

$$P_i(0) = C'_i D_i = C'_i(\overline{D_\iota} + \Delta) = C'_i \overline{D_\iota} + \eta_i \tag{8}$$

と表現される．ここで,

$$\overline{D_\iota} = E(D_i)\,, \Delta = D_i - \overline{D_\iota}\,, \eta_i = C'_i \Delta$$
$$C_i = \left(C_i(s_{a1}), \ldots, C_i(s_{aM})\right)', \tag{9}$$
$$D_i = \left(D_i(s_{a1}), \ldots, D_i(s_{aM})\right)'$$

である．式(8)のη_iは，市場価格$P_i(0)$において将来キャッシュ・フローが確率的割引率によって割り引かれた部分である．その価格変動の定式化にあたっては，現実に観察される次の2つの債券価格変動特性を考慮する.

1) 償還期間$s_{iM(i)}$が短くなると債券価格$P_i(0)$の変動が小さくなること.
2) 銘柄iと銘柄uとの間の償還期間差$|s_{iM(i)} - s_{uM(u)}|$が小さいものほど連動性が高いこと.

つまり，各銘柄η_iの分散が償還時点に近づくにつれて小さくなること．また，銘柄間の償還期間差が大きいほど，η_iの連動性が低くなる事を考慮する.以上から，国債価格モデルは，次の式で表現できる.

$$y = X\beta + \eta \tag{10}$$

ここで,

$$y = (y_1\,, \ldots, y_N)', \qquad y_i = P_i - \sum_{m=1}^{M} C_i(s_{am})\,,$$
$$\beta_1 = \left(\delta_1\,, \ldots, \delta_p\right), \qquad \delta_k = \left(\delta_{k1}, \ldots, \delta_{kq}\right)',$$
$$X = (x_1, \ldots x_N)', \qquad x_i = \left(u_{i1}, \ldots, u_{ip}\right)',$$
$$u_{ir} = \left(u_{i1r}\,, \ldots, u_{iqr}\right)', \tag{11}$$
$$u_{ikr} = \sum_{m=1}^{M} z_{ik} s_{am}^r C_i(s_{am})\,,$$
$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)',$$
$$Cov(\eta) = \sigma_B^2 b_{iu} C'_i \Phi_{iu} C_u = \sigma_B^2 B$$

である．この時,

$$(y - X\beta_1)'\{B(\rho_B)\}^{-1}(y - X\beta_1) \tag{12}$$

を，$\beta_1\,, \rho_B$ に関して最小にすることで，一般化最小二乗推定量

$$\widehat{\beta_1} = (X'\{B(\widehat{\rho_B})\}^{-1}X)^{-1}X'\{B(\widehat{\rho_B})\}^{-1}y \tag{13}$$

を得る．$\widehat{\beta_1} = (\widehat{\delta_1}, \ldots, \widehat{\delta_p})$が得られたことにより,

平均割引関数$\overline{D_\iota}(s)$が求められる．

②　東京都債から流動性リスク割引関数を求める

東京都は他の地方自治体と比較し，経常収支比率や公債費負担比率，財政力指数が良く信用リスクは低いと考えられる．

(1)流動性リスク割引関数の定式化を行う．

流動性リスク割引関数は，東京都債価格から，国債価格モデルに沿って行う．

流動リスク割引関数は，以下のp次の多項式で表現する．すなわち，地方債の流動性リスク割引関数として，

$$\overline{U}(s) = \chi_1 s + \cdots + \chi_p s^p \tag{14}$$

を仮定する．式(14)の未知パラメータ$\chi_1, \ldots, \chi_q$は，銘柄すべてに共通である．東京都債価格モデルも国債価格モデルと同じ仮定を置く為，次の式で表現できる．

$$y = X\beta + \mu \tag{15}$$

ここで，

$$\begin{gathered} y = (y_1, \ldots, y_N)', \\ y_i = P_i - \sum_{m=1}^{M} C_i(s_{am}) D_i(s_{am}), \\ \beta_2 = (\chi_1, \ldots, \chi_p), \qquad \delta_k = (\delta_{k1}, \ldots, \delta_{kq})', \\ X = (x_1, \ldots x_N)', \qquad x_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ip})', \\ u_{ir} = (u_{i1r}, \ldots, u_{iqr})', \\ u_{ikr} = \sum_{m=1}^{M} z_{ik} s_{am}^r C_i(s_{am}), \\ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)', \\ Cov(\eta) = \sigma_Q^2 b_{iu} C_i' \Phi_{iu} C_u = \sigma_Q^2 Q \end{gathered} \tag{16}$$

である．この時，

$$(y - X\beta_2)'\{Q(\rho_Q)\}^{-1}(y - X\beta_2) \tag{17}$$

を，β_2, ρ_Q に関して最小にすることで，一般化最小二乗推定量

$$\widehat{\beta_2} = (X'\{Q(\widehat{\rho_Q})\}^{-1}X)^{-1}X'\{Q(\widehat{\rho_Q})\}^{-1}y \tag{18}$$

を得る．$\widehat{\beta_2} = (\widehat{\chi_1}, \ldots, \widehat{\chi_p})$が得られたことにより，流動性リスク割引関数$\overline{U_\iota}(s)$が求められる．

③　地方債価格モデルを定式化する

地方債価格モデルとは，国債価格モデルに信用リスク(累積デフォルト確率関数で表現したもの)を考慮し，地方債に応用したモデルである．

(1)累積デフォルト確率の定式化を行う．

累積デフォルト確率は，地方債価格モデルの定式化の際に用いる．

累積デフォルト確率は，以下のp次の多項式で表現し，地方自治体の属性z_{iu}とした関数を仮定する．すなわち，第i地方債のデフォルト確率として，

$$\begin{gathered} h_i(s) = \zeta_1(z_i)s + \cdots + \zeta_p(z_i)s^p \\ (i = 1, \ldots, N) \\ \zeta_l(z_i) = \zeta_{l1} z_{i1} + \cdots + \zeta_{lq} z_{iq} \\ (l = 1, \ldots, p) \end{gathered} \tag{19}$$

を仮定する．式(19)の未知パラメータ$\zeta_{l1}, \ldots, \zeta_{lq}$は，銘柄すべてに共通である．

(2)地方債の期待キャッシュ・フローを定式化する．

地方債価格モデルを考える際に重要な点は，国債価格モデルを考えた際と比べ，信用リスク(デフォルトの可能性)があることにより，将来に発生するキャッシュ・フローが不確実である点である．したがって，地方債の期待キャッシュ・フローを定式化する必要がある．

第i地方債のキャッシュ・フロー$G_i(s_{ij})$は，信用リスクがない場合の確定的なキャッシュ・フロー$C_i(s_{ij})$と信用リスクの存在により減価する損失額$L_i(s_{ij})$の部分に分けると，

$$G_i(s_{ij}) = C_i(s_{ij}) - L_i(s_{ij}) \tag{20}$$

と表現される．損失額$L_i(s_{ij})$は，不確実であるため確率変数であり，期待キャッシュ・フロー$E\left(G_i(s_{ij})\right)$は，期待損失額$E\left(L_i(s_{ij})\right)$を用いて，

$$E\left(G_i(s_{ij})\right) = C_i(s_{ij}) - E\left(L_i(s_{ij})\right) \tag{21}$$

と表現される．ここで，期待損失額$E\left(L_i(s_{ij})\right)$について定式化していく．

地方債発行地方自治体が第i地方債の現時点からみた将来の第jキャッシュ・フロー発生時点，すなわち，$t + s_{ij}$時点までに倒産する確率(累積デフォルト確率)は，期間s_{ij}と第i地方債の発行地方自治体の格付けkに依存し，

$$h_i(s_{ij} : k) \tag{22}$$

とする．第i地方債を発行する地方自治体が$t + s_{i,j-1}$時点と$t + s_{ij}$時点の間にデフォルトした場

合，元本の回収は$t+s_{ij}$時点で行われると仮定する．

仮にデフォルトが起こった際に元本をどのくらい回収できるかという回収率（回収可能率）$\gamma(k(i))(0 \leq \gamma(k(i)) \leq 1)$は，将来の回収時点$t+s_{ij}$が違えば異なると考えられるが，ここでは地方自治体の格付けkにのみ依存すると仮定する．したがって，デフォルトが起きる期間をτとすると，地方自治体kの第i地方債のキャッシュ・フローの期待値$E\left(G_i(s_{ij})\right)$は，定義関数を用いて

$$E\left(G_i(s_{ij})\right) = E[C_i(s_{ij})\,1_{\{s_{ij}<\tau\}} + 100\gamma(k(i))1_{\{s_{i,j-1}<\tau<s_{ij}\}}] \tag{23}$$

と表現される．

ここで，累積デフォルト確率$h_i(s_{ij})$を用いて，

$$\begin{aligned} E\left(G_i(s_{ij})\right) &= \overline{G_\iota}(s_{ij}) \\ &= C_i(s_{ij})\left[1-h_i(s_{ij})\right] \\ &\quad +100\gamma(k(i))\left[h_i(s_{ij})-h_i(s_{i,j-1})\right] \\ &= C_i(s_{ij}) - \{C_i(s_{ij})h_i(s_{ij}) \\ &\quad -100\gamma(k(i))\left[h_i(s_{ij})-h_i(s_{i,j-1})\right]\} \\ &= C_i(s_{ij}) - \overline{L_\iota}(s_{ij}) \end{aligned} \tag{24}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \overline{L_\iota}(s_{ij}) &= C_i(s_{ij})h_i(s_{ij}) \\ &\quad -100\gamma(k(i))\left[h_i(s_{ij})-h_i(s_{i,j-1})\right] \end{aligned} \tag{25}$$

となる．$\overline{L_\iota}(s_{ij})$は，信用リスクのない債券価格から信用リスクに伴って減価する損失部分の期待損失額である．

(3)地方債価格モデルの定式化．

次に地方債価格モデルの定式化を述べる．

先ず，国債価格モデルを考えた際と同様に，地方自治体が発行する地方債N銘柄全てのキャッシュ・フローの発生期間を以下のように示す．

$$\begin{aligned} &s_{a1} < s_{a2} < \cdots < s_{aM}\ , s_{aM} \\ &= max\{s_{1M(1)}, \dots, s_{NM(N)}\} \end{aligned} \tag{26}$$

ここで，s_{aM}のaは，N銘柄すべてのキャッシュ・フローの発生時点を表す．また，第i地方債の$t+s_{am}$時点で発生するキャッシュ・フロー$G_i(s_{am})$は，

$$G_i(s_{am}) = \begin{cases} G_i(s_{ij}) & if\ s_{am} = s_{ij} \\ 0 & else \end{cases} \tag{27}$$

この時，信用リスクのある第i地方債のt時点の市場価格$P_i(0)$は，以下のように表現できる．

$$\begin{aligned} P_i(0) &= \sum_{m=1}^{M} G(s_{am})(D_i(s_{am}) - U(s_{am})) \\ &= G_i'(D_i - U_i) \end{aligned} \tag{28}$$

ここで，

$$\begin{aligned} G_i &= \left(G_i(s_{a1}), \dots, G_i(s_{aM})\right)', \\ D_i &= \left(D_i(s_{a1}), \dots, D_i(s_{aM})\right)' \\ U_i &= \left(U(s_{a1}), \dots, U(s_{aM})\right)' \end{aligned} \tag{29}$$

である．

キャッシュ・フローは

$$\begin{aligned} G_i &= \overline{G_\iota} + (G_i - \overline{G_\iota}) \\ &= (C_i - \overline{L_\iota}) + \{(C_i - L_i) - (C_i - \overline{L_\iota})\} \\ &= (C_i - \overline{L_\iota}) - (L_i - \overline{L_\iota}) \end{aligned} \tag{30}$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} C_i &= \left(C_i(s_{a1}), \dots, C_i(s_{aM})\right)', \\ L_i &= \left(L_i(s_{a1}), \dots, L_i(s_{aM})\right)', \\ \overline{L_i} &= \left(\overline{L_i}(s_{a1}), \dots, \overline{L_i}(s_{aM})\right)' \end{aligned} \tag{31}$$

よって，式(23)より信用リスクのある第i地方債のt時点での市場価格$P_i(0)$は，

$$\begin{aligned} P_i(0) &= G_i'(D_i - U_i) \\ &= (C_i - \overline{L_\iota})'(D_i - U_i) + v_i \end{aligned} \tag{32}$$

と表現される．ここで，

$$\begin{aligned} D_i &= \left(D_i(s_{a1}), \dots, D_i(s_{aM})\right)', \\ v_i &= (L_i - \overline{L_\iota})'(D_i - U_i) \end{aligned} \tag{33}$$

である．v_iは，損失額$L_i(s)$のt時点で評価した期待損失額$\overline{L_\iota}(s)$からの乖離部分であり，損失額の確率的部分である．v_iの価格変動の定式化にあたって，現実に観察される次のような債券価格変動特性を考慮する．

1）償還期間$s_{iM(i)}$が短くなると債券価格$P_i(0)$の変動が小さくなること．

2）銘柄iと銘柄uとの間の償還期間差$|s_{iM(i)} - s_{uM(u)}|$が小さいものほど連動性が高いこと．

つまり，各銘柄v_iの分散が償還時点に近づくにつれて小さくなること．また，銘柄間の償還期間差が大きいほど，v_iの連動性が低くなることを考慮

する．具体的には，v_iに対して，次の分散共分散構造f_{iu}

$$f_{iu}=Cov(v_i,v_u)=\sigma_A^2 A=\sigma_A^2 a_{iu}\overline{L_\iota}'\Phi_{iu}\overline{L_u} \tag{34}$$

を仮定する．σ_A^2は，分散である．ここで，a_{iu}に関して，

$$a_{iu}=\begin{cases} s_{iM(i)} & (i=u) \\ \rho_a\, min\left(s_{iM(i),}s_{uM(u)}\right)* \\ exp\left(-\left|s_{iM(i)}-s_{uM(u)}\right|\right) & (i\neq u) \end{cases} \tag{35}$$

を仮定する．また，Φ_{iu}に関して次式を定義する．

$$\Phi_{iu}=\left(\varphi_{iu,jr}\right)=\left(exp\left(-\left|s_{aj}-s_{ar}\right|\right)\right) \tag{36}$$

ここで，$\varphi_{iu,jr}$は，s_{aj}とs_{ar}時点に発生する損失額を割り引く割引率の共分散に対応する．式(34)の定式化で重要な点は，デフォルト確率が大きい，あるいは，回収率が低い，すなわち，信用リスクの大きい債券ほど，また，同一地方自治体が発行した債券で満期までの残存期間が長い債券ほど，v_iの分散が大きくなる価格変動構造を導入していることである．

また，式(32)の地方債価格モデルは，国債価格モデルで求めた無リスク平均割引率，東京都債から求めた流動性リスク割引関数を用いると，

$$\begin{aligned} P_i(0) &= (C_i-\overline{L_\iota})'(D_i-U_i)+v_i \\ &= (C_i-\overline{L_\iota})'(\overline{D_\iota}+\Delta_i)-(C_i-\overline{L_\iota})'\overline{U_\iota} \\ &\quad +(C_i-\overline{L_\iota})'(D_i-\overline{D_\iota})-(C_i \\ &\quad -\overline{L_\iota})'(U_i-\overline{U_\iota})+v_i \\ &= (C_i-\overline{L_\iota})'\overline{D_\iota}-(C_i-\overline{L_\iota})'\overline{U_\iota}+\eta_i+v_i \\ &\quad +\mu_i \end{aligned} \tag{37}$$

と表現される．ここで，

$$\begin{aligned} \overline{D_\iota} &= E(D_i)=(E[D_i(s_{a1})],\dots,E[D_i(s_{am})])' \\ &= (\overline{D_\iota}(s_{a1}),\dots,\overline{D_\iota}(s_{a1}))', \\ \eta_i &= (C_i-\overline{L_\iota})'\Delta_{1i}, \\ \Delta_{1i} &= D_i-\overline{D_\iota} \\ &= (D_i(s_{a1})-\overline{D_\iota}(s_{a1}),\dots,D_i(s_{aM})-\overline{D_\iota}(s_{aM}))' \\ &= (\Delta_{1i}(s_{a1}),\dots,\Delta_{1i}(s_{aM}))' \\ \mu_i &= (C_i-\overline{L_\iota})'\Delta_{2i}, \\ \Delta_{2i} &= U_i-\overline{U_\iota} \\ &= (U_i(s_{a1})-\overline{U_\iota}(s_{a1}),\dots,U_i(s_{aM})-\overline{U_\iota}(s_{aM}))' \\ &= (\Delta_{2i}(s_{a1}),\dots,\Delta_{2i}(s_{aM}))' \end{aligned} \tag{38}$$

である．式(37)のη_iは，市場価格$P_i(0)$において確率的割引率に関係する部分で，その価格変動の定式化にあたって，既に述べた現実に観察される債券価格変動特性を考慮する．具体的には，η_iに対して，次の分散共分散構造を仮定する．

$$\begin{aligned} g_{iu} &= Cov(\eta_i,\eta_u) \\ &= \sigma_B^2 b_{iu}(C_i-L_i)'\Phi_{iu}(C_i-L_i) \end{aligned} \tag{39}$$

ここで，σ_B^2は分散である．b_{iu}に関して，

$$b_{iu}=\begin{cases} s_{iM(i)} & (i=u) \\ \rho_b\, min\left(s_{iM(i),}s_{uM(u)}\right)* \\ exp\left(-\left|s_{iM(i)}-s_{uM(u)}\right|\right) & (i\neq u) \end{cases} \tag{40}$$

を仮定する．また式(37)のμ_iは，確率的流動性リスク割引率に関係する部分で，こちらも現実に観測される債券価格変動特性を考慮する．

$$\begin{aligned} w_{iu} &= Cov(\mu_i,\mu_u) \\ &= \sigma_q^2 b_{iu}(C_i-L_i)'\Phi_{iu}(C_i-L_i) \end{aligned} \tag{41}$$

ここで，σ_q^2は分散である．

これらはキャッシュ・フローが発生する２時点間に関して，期間が長いほど割引関数の相関が小さくなるように，Φ_{iu}に関して式(36)を仮定する．式(39)，(41)の定式化で重要な点は，割引率の変動によるη_i，μ_iの変動構造として，デフォルト確率が小さい，あるいは，回収率が高い，すなわち，信用リスクの小さい債券ほど，η_i,μ_iの分散が大きくなる構造を導入していることである．

以上の定式化により表現された地方債価格モデルは，

$$\begin{aligned} P_i(0) &= (C_i-\overline{L_\iota})'(\overline{D_\iota}-\overline{U_\iota})+\eta_i+v_i+\mu_i \\ &= (C_i-L_i)'(\overline{D_\iota}-U_i)+\varepsilon_i \end{aligned} \tag{42}$$

と表現される．この式を変形したものが，下式(43)である．

$$C_i(\overline{D_\iota}-\overline{U_\iota})-P_i(0)=\overline{L_\iota}(\overline{D_\iota}-\overline{U_\iota})+\varepsilon_i \tag{43}$$

式(43)は，地方債の確定部分のキャッシュ・フローを無リスクである国債の割引率で割り引いた理論価格から，地方債の市場価格を引いた差が，地方債の信用リスク，流動性リスクによって減価した部分であることを表現している．

債券価格の確率的変動部分ε_iの平均・共分散は，

$$E(\varepsilon_i)=0, \tag{44}$$

$$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_u) = g_{iu} + f_{iu} + w_{iu}$$
$$= \sigma_A^2 A + \sigma_B^2 B + \sigma_Q^2 Q$$

である．なお，実証分析においては，簡略化のため$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_Q^2 = \sigma^2$と仮定する．また，$\eta_i$と$v_i, \mu_i$の共分散は，$Cov(\eta_i, v_i) = 0$, $Cov(v_i, \mu_i) = 0, Cov(\mu_i, \eta_i) = 0$である．

④　地方自治体の累積デフォルト確率を求める

最後に，地方債価格モデルに一般化最小二乗法を用いて累積デフォルト確率関数の係数を推定し，地方自治体の累積デフォルト確率の期間構造を求める．

信用リスクがある地方債価格データからモデルにおける未知パラメータである累積デフォルト確率関数の係数$(\zeta_{l1}, \dots, \zeta_{lq})$を推定するために，式(32)を整理し，次のモデルを考える．

$$y^* = X^*\beta^* + \varepsilon \tag{45}$$

ここで，

$$y^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)',$$
$$y_i^* = P_i - \sum_{m=1}^{M} C_i(s_{am})(\bar{D}(s_{am}) - \bar{U}(s_{am})),$$
$$\beta^* = (\zeta_1', \dots, \zeta_p')', \quad \delta_k = (\zeta_{l1}, \dots, \zeta_{lq})',$$
$$X^* = (x_1^*, \dots x_N^*)', \quad x_i^* = (x_{i1}^*, \dots, x_{ip}^*)',$$
$$x_{ir}^* = (x_{i1r}^*, \dots, x_{iqr}^*)', \tag{46}$$
$$x_{ilr}^* = -\sum_{m=1}^{M} z_{iv}[C_i(s_{am})\, s_{am}^r$$
$$-100\gamma(k(i))\{s_{am}^r - s_{am-1}^r\}]\, \bar{D}(s_{am})$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)',$$
$$Cov(\varepsilon) = \varepsilon^2(A + B + Q)$$

である．なお，式(38)における平均割引関数$\bar{D}_\iota(s_{am})$に関して，将来の同時点で発生するキャッシュ・フローを割引く割引率は同一という無裁定条件を仮定することにより，式(13)で求めた無リスク平均割引関数を用いることができる．さらに，$\hat{\rho}_B$，$\hat{\rho}_Q$も式(13)で求めた値に一致すると仮定する．したがって，この時，$\theta = (\beta^*, \gamma(k(i)), \rho_A)$とすると，

$$(y^* - X^*(\gamma(k(i)))\beta^*)'$$
$$\{A(\theta) + B + Q\}^{-1}\left(y^* - X^*\left(\gamma(k(i))\right)\beta^*\right) \tag{47}$$

を，$\theta = (\beta^*, \gamma(k(i)), \rho_A)$に関して最小にすることで，一般化最小二乗推定量

$$\widehat{\beta^*} = [X^*(\hat{\gamma}(k(i)))' \sum(\hat{\theta})^{-1} X^*(\hat{\gamma}(k(i)))]^{-1}$$
$$X^*(\hat{\gamma}(k(i))) \sum(\hat{\theta})^{-1} y \tag{48}$$
$$\sum(\hat{\theta}) = A(\hat{\theta}) + B + \mathrm{Q}$$

を得る．

したがって，累積デフォルト確率の係数を推定し，信用リスクの期間構造が求めることができる．

5．結果

本章では，地方債価格モデルによる累積デフォルト確率の推定結果について述べる．

5.1　実証分析

分析期間は2003年3月末から2015年3月末を対象としている．分析対象の地方自治体は，分析対象期間に市場で取引のあった市場公募地方債の内，満期が10年未満で7銘柄以上の地方債を発行する都道府県を対象とした．分析対象となった都道府県は（東京都，静岡県，新潟県，広島県，千葉県，埼玉県，京都府，愛知県，神奈川県，大阪府，兵庫県，北海道）の12都道府県である．分析に用いたデータは全て日本証券業協会のホームページから取得したものである．

以下では無リスク平均割引関数を示した後，流動性リスク割引率の期間構造を示し，各地方自治体の累積デフォルト確率を示す．

・無リスク平均割引関数

無リスク平均割引関数を仮定する際，係数の属性銘柄には，金利，残存期間を採用した．渡邉・津田の先行研究（2013）[7] ではキャッシュ・フロー発生回数を含めているが，分析をした結果，大きな変化が見られない事から，今回はキャッシュ・フロー発生回数を平均割引関数の属性から除いた．次数の決定に関しては，多項式の次数を1次から8次まで変更した中で，式(12)が最小となる7次

を選択した．

・流動性リスク割引率の期間構造

東京都債と国債のスプレッドの9割を流動性と仮定をした場合，多くの債券でデフォルト確率がマイナスや単調増加性を満たさなかった．そのため，デフォルト確率がマイナスにならないように流動性を減価したところ，5割を流動性リスクとして考慮する事とした．流動性リスクを反映した割引率の低下率の期間構造の次数は単調増加性を保つために2次を採用している．

Fig. 1は2003年から2015年末時点で推定した流動性リスク分の割引率の低下率の期間構造である．

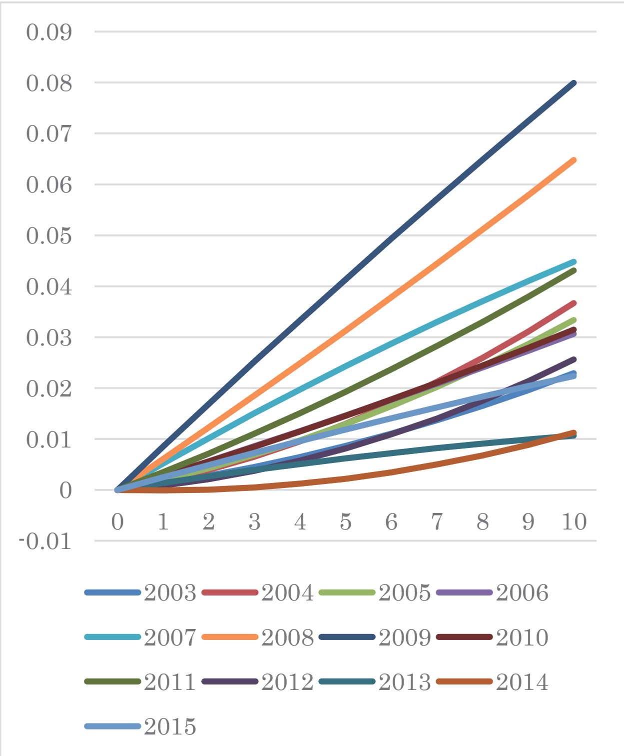

Fig. 1. Term structure of Discount factor about liquidity risk.

・累積デフォルト確率の定式化

累積デフォルト確率関数の次数は，単調増加性を保つために2次を採用している．

・地方自治体の累積デフォルト確率の推定

今回，回収率$\gamma(k(i))$の設定は全て0.9とした．理由は，地方自治体は比較的信用力があり，回収率は高いと予測されるからである．しかし，回収率を1にしてしまうと，デフォルト確率の単調増加性が崩れ，デフォルト確率がマイナスになってしまうので，今回はモデル推定において回収率を0.9とした．

Fig. 2からFig. 14は2003年3月末から，2015年3月末の1年毎の時点において推定した累積デフォルト確率の期間構造を表すグラフである．横軸は年数，縦軸は累積デフォルト確率を表す．

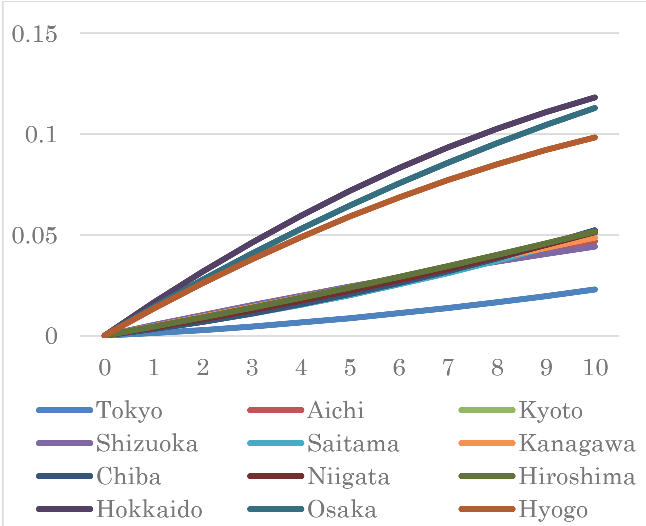

Fig. 2. Accumulated Default Probability in March 2003.

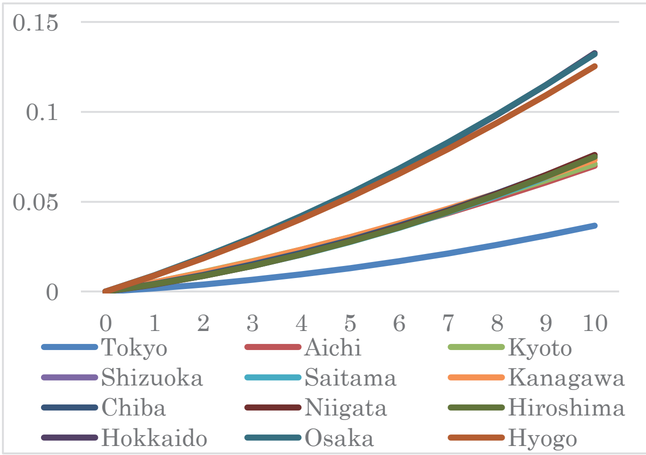

Fig. 3. Accumulated Default Probability in March 2004.

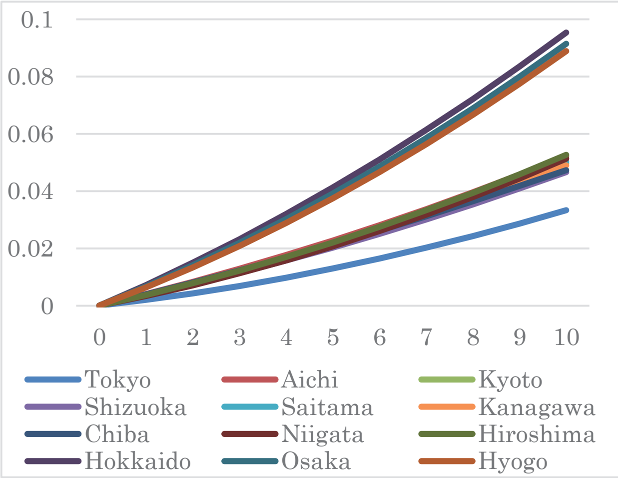

Fig. 4. Accumulated Default Probability in March 2005.

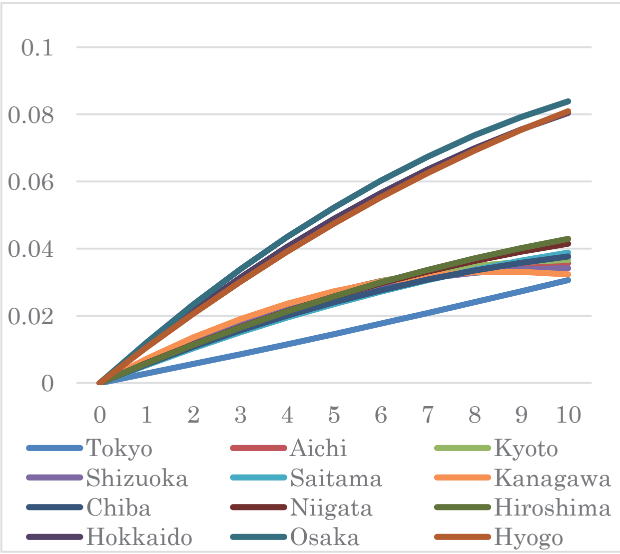

Fig. 5. Accumulated Default Probability in March 2006.

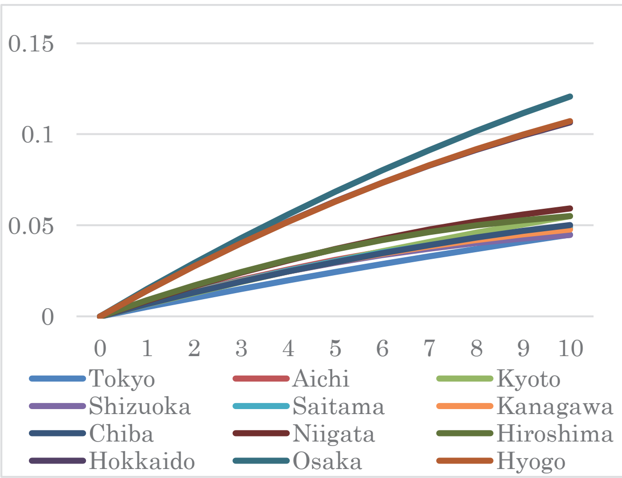

Fig. 6. Accumulated Default Probability in March 2007.

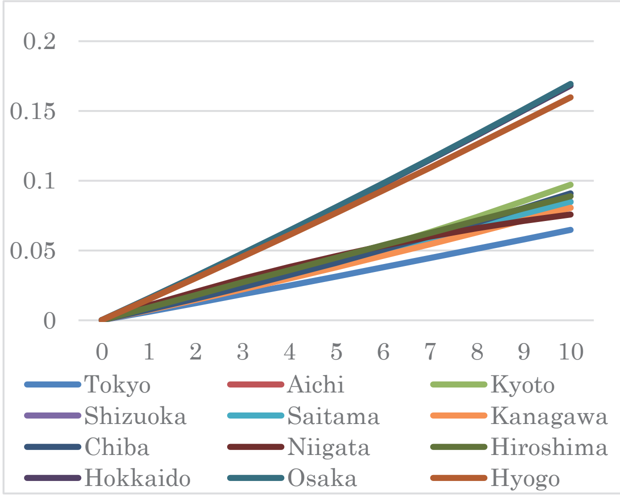

Fig. 7. Accumulated Default Probability in March 2008.

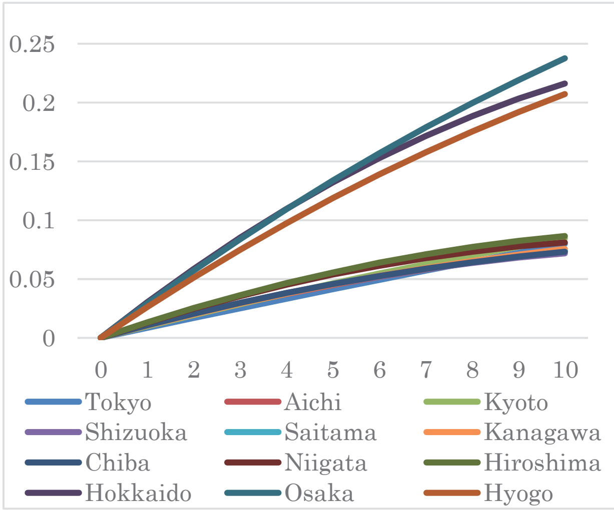

Fig. 8. Accumulated Default Probability in March 2009.

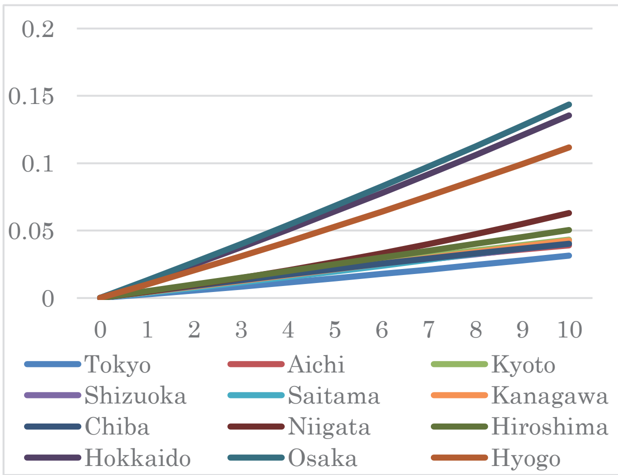

Fig. 9. Accumulated Default Probability in March 2010.

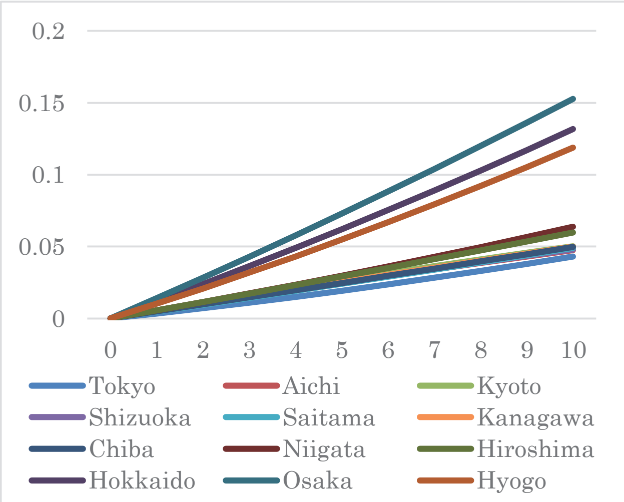

Fig. 10. Accumulated Default Probability in March 2011.

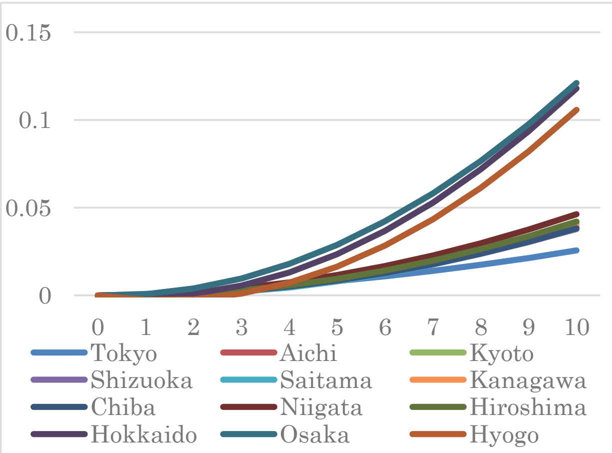

Fig. 11. Accumulated Default Probability in March 2012.

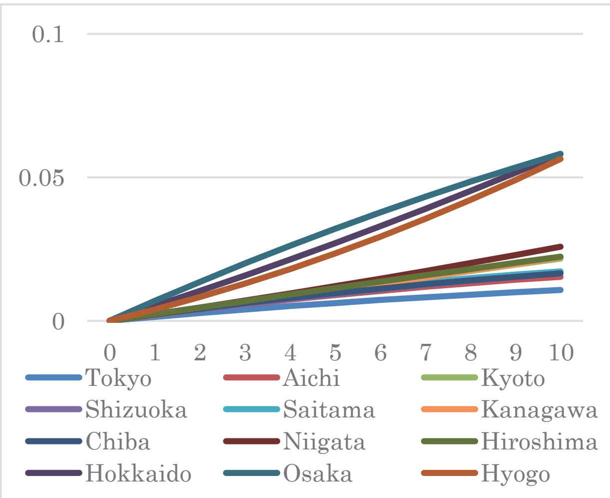

Fig. 12. Accumulated Default Probability in March 2013.

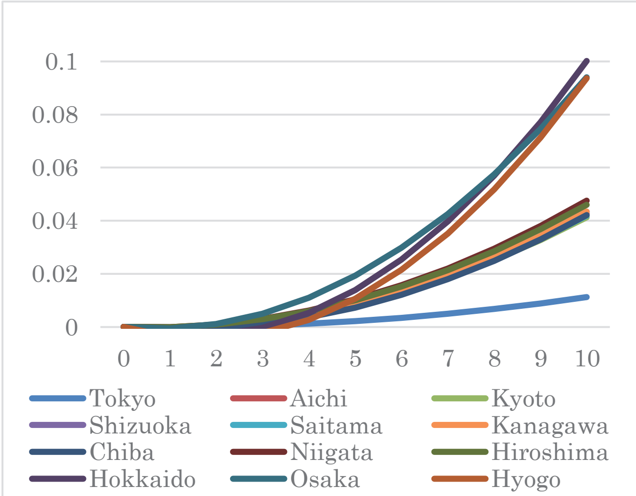

Fig. 13. Accumulated Default Probability in March 2014.

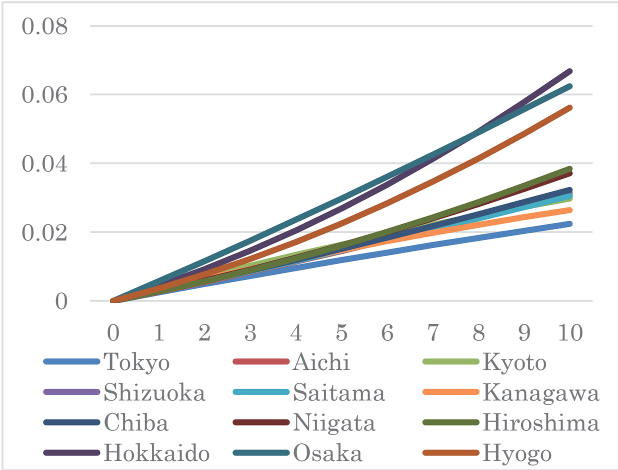

Fig. 14. Accumulated Default Probability in March 2015.

これらの図を見ると，年によって推定されるデフォルト確率が異なる．しかし，都道府県の序列はほぼ変わらず，3つのグループに分かれていることがわかる．東京都が最もデフォルト確率が低く，兵庫県，大阪府，北海道の3道府県のデフォルト確率が全体を通して高いことがわかった．以前の結果では，兵庫県，大阪府，北海道の3道府県のデフォルト確率に差異はあまり見られなかったが，流動性リスクを反映した部分を国債とのスプレッドから差し引くことで，より明確になった．

Fig. 15は，2003年3月末から，2015年3月末まで1年ごとに推定した10年後の累積デフォルト確率の

推移を表したグラフである．横軸は推定時点，縦軸は累積デフォルト確率を表す．また，Fig. 16は国債とのスプレッドから流動性リスク部分を抜き，累積デフォルト確率を表したものである．

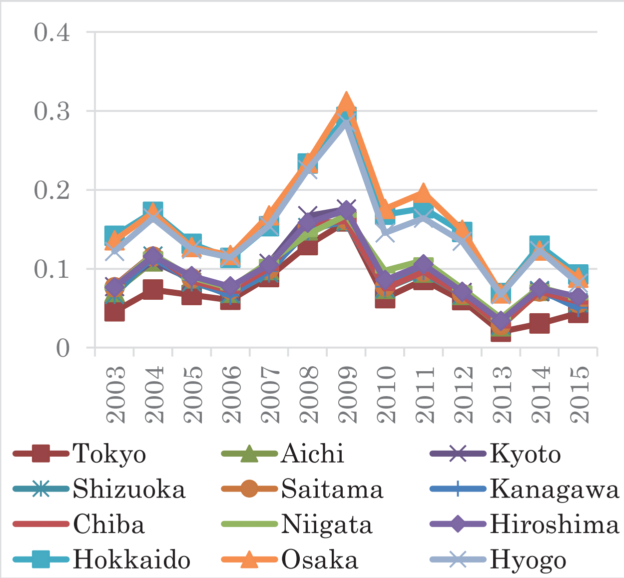

Fig. 15. Accumulated Default probability of 10 years.

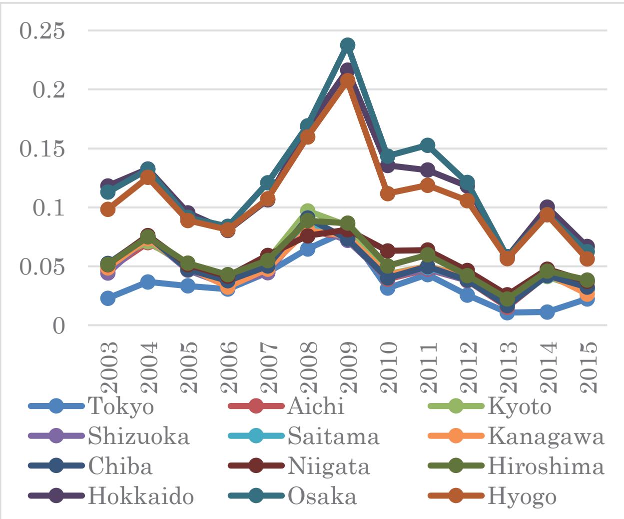

Fig. 16. Accumulated Default probability of 10 years thought liquidity risk.

Fig. 15,16からわかるように，下図は流動性リスクを考慮している分，デフォルト確率が低くなっている．これにより，都道府県別の分解能が上がるため，より正確に都道府県別の信用リスク序列を求めることが可能となった．

5.2　まとめ

本研究により，日本の12都道府県の累積デフォルト確率とその時間的な変化が流動性によるプレミアムを考慮することで，都道府県ごとの分解能の向上が見込まれた．

また，年ごとにモデルの推定を行うことによって，その時々の地方自治体の財政破綻リスクを可視化した．2007年（夕張市の財政破綻），2008年（サブプライム住宅ローン危機），2009年（リーマン・ブラザーズの破綻）などにおいて，地方自治体の財政破綻リスクが高まったことを把握することができた．

これまで地方債を発行している地方自治体の破綻が生じていないことから，実際のデフォルト確率の値は存在しない．そのため，地方債価格モデルによる推定した累積デフォルト確率の値は，あくまで地方自治体間の相対的な信用リスク差を表現したものであることに留意する必要がある．

参考文献

1) 津田博史, “銘柄間の価格連動性を考慮した社債価格モデルに基づく信用リスク情報の推定”, 統計数理, **50**[2], 217-240(2002).
2) 津田博史, “社債価格モデルによる信用リスク情報の推定－倒産確率の期間構造と回収率の推定”, ジャフィー・ジャーナル, **6**, 33-64(2006).
3) 津田博史, “社債価格モデルによる格付け変化情報：格付け変化の予測”, 数理統計, **54**[1], 39-55(2006).
4) 稲田直之, 津田博史, “地方自治体の信用リスク評価”, 同志社大学ハリス理化学研究報告, **56**[3], 193-204(2015).
5) 王京穂, “債券市場流動性の把握と金融機関のリスク管理への応用”, https://www.boj.or.jp/research/wps_rev/wps_2011/data/wp11j02.pdf, 2011.
6) Y. Kaguraoka, “A Time-Varying Common Risk Factor Affecting Corporate Yield Spreads,” http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13518470903037615#.VbB_kfn5fOs, 2010.
7) 渡邉中穂美, 津田博史,“地方債価格モデルによる地方自治体の信用リスク評価について”, 2013 IEEE SMC Hiroshima Chapter 若手研究会, Proceedings, 2013.