A Factorization of Min-Plus Polynomials

Yuto TOZUKA,* Sennosuke WATANABE** and Yoshihide WATANABE***

(Received April 17, 2015)

Min-plus algebra is one of many idempotent semirings which have been studied in various fields of mathematics. In the present paper, we focus on the factorization of univariate polynomials in min-plus algebra. We present the necessary and sufficient condition under which univariate polynomials in min-plus algebra can be factorized into linear factors. Moreover, we prove that roots of a univariate polynomial in min-plus algebra express breakpoints of the graph of the piecewise-linear function represented by the polynomial.

Key words ： Min-Plus algebra, polynomials, roots, breakpoints

キーワード ： Min-Plus 代数，多項式，根，屈折点

Min-Plus代数における多項式の因数分解

戸 塚 雄 人，渡 辺 扇 之 介，渡 邊 芳 英

1. はじめに

Min-Plus 代数とは，実数 $\mathbb{R}$ に $+\infty$ を付け加えた集合に，2 つの 2 項演算 $\oplus = \min$ と $\otimes = +$ を定義した代数系であり，半環と呼ばれる代数構造を持つ [1, 2, 3]．本論文ではまず，Min-Plus 代数における n 次の多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes n-1} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ の因数分解について考える．一般の代数 $(\mathbb{R}, +, \times)$ における任意の n 次の多項式が因数分解可能であるわけではないことと同様に，Min-Plus 代数における多項式も全てが因数分解可能であるわけではない．本論文において我々は，Min-Plus 代数における n 次の多項式の因数分解が可能であるための必要十分条件を与える．次に，Min-Plus 代数における多項式によって定義される関数のグラフについてを考える．Min-Plus 代数においては，その演算の性質から，冪が通常の積に置き換わる: $x^{\otimes n} = nx$．よって，Min-Plus 代数における n 次の多項式で定義される関数のグラフは，複数の直線によってできる折れ曲がった区分的に線形なグラフとなる．Min-Plus 代数における多項式で定義される関数のグラフの折れ曲がる点を屈折点と呼ぶ．本論文において我々は，Min-Plus 代数における n 次の多項式が定義する関数のグラフの屈折点の x 座標と，多項式を因数分解した際に現れる根が一致することを示す．

2. Min-Plus 代数

実数の集合 $\mathbb{R}$ に $+\infty$ を付け加えた集合を $\mathbb{R}_{\min}$ と書く: $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$．また，$a, b \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し

* Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone:0774-65-6302, E-mail:dum0924@mail4.doshisha.ac.jp
** Organization for Research Initiatives and Development, Doshisha University
*** Department of Mathematical Science, Doshisha University, E-mail:yowatana@mail.doshisha.ac.jp

2 項演算 $\oplus, \otimes$ を以下で定義する．

$$a \oplus b = \min\{a, b\}\ ,$$
$$a \otimes b = a + b\ .$$

このとき，代数系 $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$ は以下の (i)〜(vii) の性質を満たす．

(i) 両演算に関して結合的である．すなわち $a, b, c \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ ,$$
$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

を満たす．

(ii) 両演算に関して可換である．すなわち $a, b \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$a \oplus b = b \oplus a\ ,$$
$$a \otimes b = b \otimes a$$

を満たす．

(iii) 演算 $\oplus$ は零元 $\varepsilon = +\infty$ を持つ．すなわち $a \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$$

を満たす．

(iv) 演算 $\otimes$ は単位元 $e = 0$ を持つ．すなわち $a \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$a \otimes e = e \otimes a = a$$

を満たす．

(v) 演算 $\otimes$ は演算 $\oplus$ に関して分配的である．すなわち $a, b, c \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)\ ,$$
$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

を満たす．

(vi) 演算 $\otimes$ は $\varepsilon = +\infty$ を吸収元として持つ．すなわち $a \in \mathbb{R}_{\min}$ に対し，

$$a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$$

を満たす．

(vii) 演算 $\otimes$ に関して，$\varepsilon = +\infty$ 以外の任意の元で逆元が存在する．すなわち，任意の $a \in \mathbb{R}_{\min} \setminus \{+\infty\}$ に対して，

$$a \otimes b = b \otimes a = e$$

を満たす $b \in \mathbb{R}_{\min} \setminus \{+\infty\}$ が存在する．しばしば，この b を $b = a^{-1}$ と書く．

性質 (i)〜(vi) までを満たす代数系を半環と呼ぶ．つまり，Min-Plus 代数 $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$ は半環に加え，積に関して逆元を持つ特殊な代数系である．

3. Min-Plus 多項式の因数分解

$x \in \mathbb{R}_{\min}$ を変数，$a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}_{\min}$ を係数とする $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes(n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ を n 次の Min-Plus 多項式と呼ぶ．本節では Min-Plus 多項式の因数分解について議論を行う．

3.1 2 次の Min-Plus 多項式の因数分解

まず 2 次の Min-Plus 多項式 $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ を $(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta)$ の形に因数分解することを考える．$(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta) = x^{\otimes 2} \oplus (\alpha \oplus \beta) \otimes x \oplus (\alpha \otimes \beta)$ であるから，$a_1 = \alpha \oplus \beta$, $a_0 = \alpha \otimes \beta$ を満たす α, β を求めればよい．ここで因数分解の例をいくつか挙げる．

例 1. $x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 4$
$(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta)$ と因数分解されると仮定すると，$\alpha \oplus \beta = 1$, $\alpha \otimes \beta = 4$ を満たす α, β を求めればよい．すなわち，

$$\min\{\alpha, \beta\} = 1 \quad \alpha + \beta = 4$$

を α, β は満たすため，$(\alpha, \beta) = (1, 3), (3, 1)$ となり，$x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 4 = (x \oplus 1) \otimes (x \oplus 3)$ と因数分解されることがわかる．

例 2. $x^{\otimes 2} \oplus 2 \otimes x \oplus 4$
前例と同様に $(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta)$ と因数分解されると仮定すると，α, β は

$$\min\{\alpha, \beta\} = 2 \quad \alpha + \beta = 4$$

を満たすため，$(\alpha, \beta) = (2, 2)$ となり，$x^{\otimes 2} \oplus 2 \otimes x \oplus 4 = (x \oplus 2)^{\otimes 2}$ と因数分解される．

例 3. $x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus 4$
同様に $(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta)$ と因数分解されると仮定すると，α, β は

$$\min\{\alpha, \beta\} = 3 \quad \alpha + \beta = 4$$

を満たすはずであるが，これらを満たす α, β は存在しない．よって $x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus 4$ は因数分解することができない．

2 次の Min-Plus 多項式が因数分解可能であるための必要十分条件を次の定理で述べる．

定理 4. 2 次の Min-Plus 多項式 $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能であるための必要十分条件は $a_1 \leqq a_0 - a_1$ が成り立つことである．

証明. 十分性について．$x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能，すなわち $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = (x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta)$ $(\alpha \leqq \beta)$ と因数分解できると仮定する．このとき，$(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta) = x^{\otimes 2} \oplus (\alpha \oplus \beta) \otimes x \oplus (\alpha \otimes \beta)$ であるから，

$$a_1 = \alpha \oplus \beta = \min\{\alpha, \beta\}, \quad a_0 = \alpha \otimes \beta = \alpha + \beta$$

が成り立つ．$\alpha \leqq \beta$ より，$a_1 = \alpha$ であり，$\beta = a_0 - a_1$ となる．よって再び $\alpha \leqq \beta$ より，$a_1 \leqq a_0 - a_1$ である．
次に必要性について．$x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ において，$a_1 \leqq a_0 - a_1$ が成り立っていると仮定し，多項式 $(x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1))$ の展開を考える．

$$\begin{aligned} &(x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1)) \\ &\quad = \quad x^{\otimes 2} \oplus (a_1 \oplus (a_0 - a_1)) \otimes x \oplus (a_1 \otimes (a_0 - a_1)) \\ &\quad = \quad x^2 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 \end{aligned}$$

よって $x^2 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ は $a_1 \leqq a_0 - a_1$ が成り立っているならば $x^2 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = (x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1))$ と因数分解することができる．　□

証明から明らかなように，$x^2 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能であれば $x^2 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = (x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1))$ の形に因数分解される．

3.2　n 次の Min-Plus 多項式の因数分解

前部分節で述べた定理 4 を踏襲し，n 次の Min-Plus 多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能であるための必要十分条件についてを述べる．

定理 5. n 次の Min-Plus 多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が $(x \oplus c_1) \otimes (x \oplus c_2) \otimes \cdots \otimes (x \oplus c_n)$ $(c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_n)$ の形に因数分解できるための必要十分条件は，$a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ を満たすことである．

証明. 十分性について．Min-Plus 多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が $(x \oplus c_1) \otimes (x \oplus c_2) \otimes \cdots \otimes (x \oplus c_n)$ と因数分解できたと仮定する：$x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = (x \oplus c_1) \otimes (x \oplus c_2) \otimes \cdots \otimes (x \oplus c_n)$．右辺を展開すると，

$$\begin{aligned} &x^{\otimes n} \oplus (c_1 \oplus c_2 \oplus \cdots \oplus c_n) \otimes x^{\otimes (n-1)} \\ &\quad \oplus (c_1 \otimes c_2) \oplus (c_1 \otimes c_3) \oplus \cdots \oplus (c_{n-1} \otimes c_n) \otimes x^{\otimes (n-2)} \\ &\quad \oplus \cdots \oplus (c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_n) \end{aligned}$$

を得る．これと左辺の係数比較すると以下の関係式を得る．

$$\begin{aligned} a_{n-1} =& c_1 \oplus c_2 \oplus \cdots \oplus c_n \\ a_{n-2} =& (c_1 \otimes c_2) \oplus (c_1 \otimes c_3) \oplus \cdots \oplus (c_{n-1} \otimes c_n) \\ &\vdots \\ a_0 =& c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_n\ . \end{aligned}$$

a_{n-1} に関する関係式は $a_{n-1} = c_1 \oplus c_2 \oplus \cdots \oplus c_n = \min\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ であるため，仮定である $c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_n$ を用いると，$a_{n-1} = c_1$ を得る．これを順に

代入することで，$a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ について以下を得る．

$$\begin{aligned} a_{n-1} =& c_1 \\ a_{n-2} =& c_1 + c_2 \\ &\vdots \\ a_0 =& c_1 + c_2 + \cdots c_n \ . \end{aligned}$$

これを c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ について書き直すと，

$$\begin{aligned} c_1 =& a_{n-1} \\ c_2 =& a_{n-2} - a_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n =& a_0 - a_1 \end{aligned}$$

となる．再び $c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_n$ より，$a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ という関係が得られ，十分性は示された．

次に必要性について．Min-Plus 多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が $a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ を満たしているとする．このとき，次の多項式の展開を考える．

$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$
$= [x^{\otimes 2} \oplus \{a_{n-1} \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes x$
$\oplus \{a_{n-1} \otimes (a_{n-2} - a_{n-1})\}\}] \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$
$= (x^{\otimes 2} \oplus a_{n-1} \otimes x \oplus a_{n-2}) \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$
以下同様に左から順に計算していくことで，

$$x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$$

を得る．よって必要性を示すことができた． □

この結果から $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ は $a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ を満たすとき，$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$ と因数分解されることがわかる．

4. Min-Plus 関数のグラフと屈折点

$y = x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ で表される関数 $f : x \mapsto y$ を n 次の Min-Plus 関数と呼ぶ．右辺を通常の演算で書き直すと，

$$\min\{nx, a_{n-1} + (n-1)x, \ldots, a_1 + x, a_0\}$$

となる．これをもとに描かれるグラフは，次節で示すような複数の直線によってできる折れ曲がったグラフとなる．グラフが折れる部分は 2 つの直線の交点であって，これを屈折点と呼ぶ．本節では，Min-Plus 関数の屈折点と前節の Min-Plus 多項式の因数分解との関連について述べる．

4.1 2 次の Min-Plus 関数と屈折点

2 次の Min-Plus 関数を定義する $y = x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ の右辺は $\min\{2x, a_1 + x, a_0\}$ と書き直せる．つまり $y = x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ のグラフは 3 つの直線 $y = 2x$, $y = a_1 + x$, $y = a_0$ のうち y の値が最も小さいものをプロットしたグラフである．2 次の多項式の因数分解で取り扱った 3 つの例について考える．

例 6. $y = x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 4$
$y = \min\{2x, x+1, 4\}$ であるからグラフは Fig. 1 の実線部分のようになる．

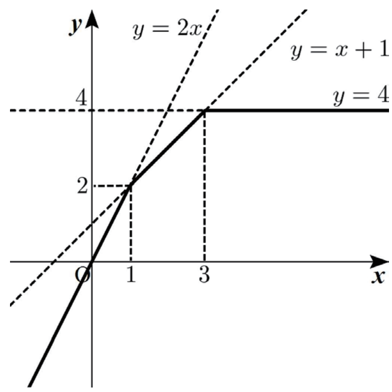

Fig. 1. A graph of $y = x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 4$.

屈折点の x 座標は 1 と 3 である．またこの関数を定義する多項式 $x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 4$ を因数分解すると $(x \oplus 1) \otimes (x \oplus 3)$ であった．

例 7. $y = x^{\otimes 2} \oplus 2 \otimes x \oplus 4$

$y = \min\{2x, x+2, 4\}$ であるからグラフは Fig. 2 の実線部分のようになる．

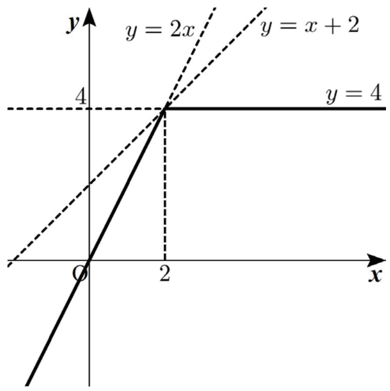

Fig. 2.　A graph of $y = x^{\otimes 2} \oplus 2 \otimes x \oplus 4$.

屈折点の x 座標は 2 である．またこの関数を定義する多項式 $x^{\otimes 2} \oplus 2 \otimes x \oplus 4$ を因数分解すると $(x \oplus 2)^{\otimes 2}$ であった．

例 8. $y = x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus 4$

$y = \min\{2x, x+3, 4\}$ であるからグラフは Fig. 3 の実線部分のようになる．

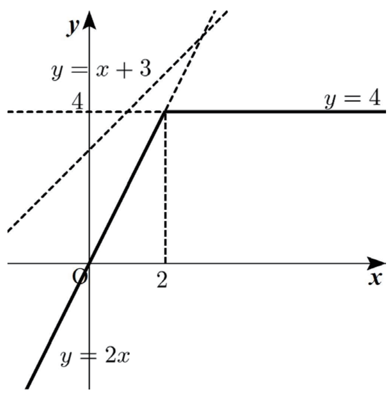

Fig. 3.　A graph of $y = x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus 4$.

屈折点の x 座標は 2 である．またこの関数を定義する多項式 $x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus 4$ は因数分解できなかった．

これらの例を踏まえて次の結果を述べる．

定理 9. 2 次の Min-Plus 関数を定義する多項式 $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能であるとき，$y = x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ のグラフの屈折点の x 座標は a_1，$a_0 - a_1$ に等しい．また，因数分解で不可能であるとき，屈折点の x 座標は $a_0/2$ に等しい．

証明. まず多項式 $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解可能であれば，定理 4 より，$x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = (x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1))$ となり，$a_1 \leqq a_0 - a_1$ を満たす．ここで以下の 3 つの場合分けを考える．

(i) $x \leqq a_1$ のとき，$(x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1)) = x \otimes x = 2x$ となる．

(ii) $a_1 \leqq x \leqq a_0 - a_1$ のとき，$(x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1)) = a_1 \otimes x = a_1 + x$ となる．

(iii) $a_0 - a_1 \leqq x$ のとき，$(x \oplus a_1) \otimes (x \oplus (a_0 - a_1)) = a_1 \otimes (a_0 - a_1) = a_0$ となる．

(i)〜(iii) より，$y = x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ のグラフは，$x \leqq a_1$ のとき直線 $y = 2x$，$a_1 \leqq x \leqq a_0 - a_1$ のとき直線 $y = a_1 + x$，$a_0 - a_1 \leqq x$ のとき直線 $y = a_0$ によって決まる．よって，屈折点の x 座標は a_1，$a_0 - a_1$ である．

次に $x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解不可能であるときを考える．$x^{\otimes 2} \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ は定理 4 より，$a_1 > a_0 - a_1$ を満たす．このとき以下の 2 つの場合を考える．

$(i)'$ $x \geqq a_1$ のとき，$a_1 + x \geqq 2a_1$ であり，$a_1 > a_0 - a_1$ より $a_1 + x > a_0$ である．

$(ii)'$ $x < a_1$ のとき，$a_1 + x > 2x$ である．

これらの関係から直線 $y = a_1 + x$ は直線 $y = a_0$ と直線 $y = 2x$ より常に上にあることがわかる．よって直線 $y = 2x$ と直線 $y = a_0$ の交点が屈折点であってその x 座標は $a_0/2$ となる． □

4.2　n 次の Min-Plus 関数と屈折点

本論文の最後の結果として，n 次の Min-Plus 関数を定義する多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が因数分解できる場合に限った次の結果を述べる．

定理 10. n 次の Min-Plus 関数を定義する多項式 $x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ が $a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ を満たす，すなわち，$(x \oplus$

$a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$ の形に因数分解できるとき，この関数のグラフの屈折点の x 座標は $a_{n-1}, a_{n-2} - a_{n-1}, \ldots, a_0 - a_1$ である．

証明． n 次の Min-Plus 関数を定義する多項式を因数分解した $(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\}$ は $a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ を満たす．ここで，以下のような場合分けを考える．

(i) $x \leqq a_{n-1}$ のとき，$a_{n-1} \leqq a_{n-2} - a_{n-1} \leqq \cdots \leqq a_0 - a_1$ より，$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\} = x \otimes x \otimes \cdots \otimes x = nx$ となる．

(ii) $a_{n-1} \leqq x \leqq a_{n-2} - a_{n-1}$ のとき，$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\} = a_{n-1} \otimes x \otimes \cdots \otimes x = a_{n-1} + (n-1)x$ となる．

(iii) $k = 0, 1, \ldots, n-3$ に対して，$a_{k+1} - a_{k+2} \leqq x \leqq a_k - a_{k+1}$ のとき，$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\} = a_{n-1} \otimes (a_{n-2} - a_{n-1}) \otimes \cdots \otimes (a_{k+1} - a_{k+2}) \otimes x \otimes \cdots \otimes x = a_{k+1} + (k+2)x$ となる．

(iv) $a_0 - a_1 \leqq x$ のとき，$(x \oplus a_{n-1}) \otimes \{x \oplus (a_{n-2} - a_{n-1})\} \otimes \cdots \otimes \{x \oplus (a_0 - a_1)\} = a_{n-1} \otimes (a_{n-2} - a_{n-1}) \otimes \cdots \otimes (a_0 - a_1) = a_0$ となる．

(i)〜(iv) より，$y = x^{\otimes n} \oplus a_{n-1} \otimes x^{\otimes (n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0$ のグラフは，$x \leqq a_{n-1}$ のとき直線 $y = nx$，$a_{n-1} \leqq x \leqq a_{n-2} - a_{n-1}$ のとき直線 $y = a_{n-1} + (n-1)x$ で決まり，$k = 0, 1, \ldots, n-3$ に対して，$a_{k+1} - a_{k+2} \leqq x \leqq a_k - a_{k+1}$ のとき，直線 $y = a_{k+1} + (k+2)x$，最後に，$a_0 - a_1 \leqq x$ のとき，直線 $y = a_0$ で決まる．よって，屈折点の x 座標は $a_{n-1}, a_{n-2} - a_{n-1}, \ldots, a_0 - a_1$ である． □

参考文献

1) M. Gondran and M. Minoux, Graph, Dioids and Semiring (Springer Verlag, 2008).

2) S. Watanabe and Y. Watanabe, “Min-Plus Algebra and Networks”, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B47**, 41-54 (2014).

3) U. Zimmermann, Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures (North-Holland Publishing Company, 1947).