

## Thermal Convection in an Oscillating Cube Analysed with POD

Katsuya HIRATA\*, Keisuke TATSUMOTO\*, Masaki NOBUHARA\* and Hirochika TANIGAWA\*\*

(Received April 8, 2015)

The authors analyse thermal convection in a cube heated differentially using the proper orthogonal decomposition, in order to reveal fundamental and dominant flow patterns. We conduct direct numerical simulations based on the Boussinesq approximation for a forcedly-oscillating cube under the zero-gravity environment, at vibrational Rayleigh number  $Ra_\eta = 5.0 \times 10^4 - 1.1 \times 10^5$ , Prandtl number  $Pr = 7.1$  (water) and non-dimensional forced-oscillating frequency  $\omega = 1.0 \times 10^0 - 2.0 \times 10^2$ . The direction of the forced sinusoidal oscillation is parallel to the temperature gradient. From obtained consecutive series of computations, it appears that the first POD modes account for the transient process on spacial flow structures during one forcing period. The first POD modes well correspond to the steady and laminar flow structures which appear in a non-oscillating cube under the terrestrial environment. The expansion coefficient is useful in particular, as we could predict the transient process of the dominant flow structures.

**Key Words:** Rayleigh-Bénard convection, forced vibration, POD, laminar flow, unsteady flow

**キーワード:** レイリー・ベナール対流, 強制加振, POD, 層流, 非定常流れ

### 振動する立方体容器内の熱対流の固有直交分解

平田 勝哉, 立元 恵祐, 延原 正起, 谷川 博哉

#### 1. はじめに

熱対流は熱伝達や物質移動において重要な現象であり, 例えば, 地質学や気象学, 原子炉の安全面, 製造業など様々な分野において中心課題の一つである. そのため, 熱対流に関して 1900 年の Bénard の実験<sup>1)</sup>に始まり, これまでに多くの研究がなされてきた. これらの分野では, 熱対流の応用により, 物質混合や拡散, 熱伝達の向上などが期待できる.

よって, 静止容器内の対流についての研究は, 数多くなされている. (例えば, 立方体容器については, 文献<sup>2-10)</sup>がある). 一方, 容器に振動を加えて熱対流への影響を調べる研究は, 対流制御の観点から工学

的意味はあるが, その数は少ない<sup>11-23)</sup>. そのうち, 著者ら<sup>15-17)</sup>は, 軸対称円筒容器内と二次元正方形容器内の対流に対する周波数応答を数値解析により調べ, 最も活発な流動を生じる最適周波数の存在を報告している. ここで, それらの初期の研究<sup>11-17)</sup>は, 二次元流れを対象としている. 一方, 三次元流れについては, Biringen & Peltier<sup>18)</sup>が, 一定重力下と無重力下で, ランダムもしくは正弦的に変動する重力場における立方体容器内部の熱対流について数値解析を実施している. その後, 著者ら<sup>19)</sup>は, 立方体容器において周波数応答を調べ, 微小加振振幅時の最適周波数の存在を報告している. また,  $Ra = 1.0 \times 10^4$

\*Department of Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto

Telephone: +81-774-65-6461, FAX: +81-774-65-6830, E-mail: khirata@mail.doshisha.ac.jp

\*\*Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Maizuru College, Maizuru

にて、最適周波数に及ぼす加振振幅の影響も明らかにしている<sup>20)</sup>。更に、 $Ra = 1.0 \times 10^4$ に加え、顕著な履歴効果を示す  $Ra = 4.0 \times 10^4$ において、最適加振周波数の近傍以外の広い加振振幅範囲に渡り、運動エネルギーや対流構造を系統的に調べている<sup>21)</sup>。

近年、宇宙船内での結晶製造などに振動が悪影響をおよぼすことから、微小重力場での重力変動による対流の発生も問題になっている<sup>13, 17, 22, 23)</sup>。スペース・ラボやISS内での広い周波数幅をもつ重力変動の存在は、よく知られた事実である。この重力変動は、搭載された機械の振動や宇宙船の軌道修正、搭乗員の活動等が原因で、完全に除去できない。船内での製造工程において、この様な予期しない重力変動は熱・物質伝達過程に影響を与え、宇宙空間で製造された製品の質の低下をもたらす。結晶成長過程でこのことが特に深刻であり、自然対流の抑制は結晶製造にとって不可欠である。

熱対流への無重力場での振動影響については、Kamotani et al.<sup>22)</sup>が、変動場に対する線形化方程式と平均場に対する定常方程式とを用いて、二次元正方形容器内の対流の解析を行っている。また、Biringen & Danabasoglu<sup>13)</sup>は、重力変動を与えた完全非線形方程式を用いて、アスペクト比2の二次元矩形容器内の対流の解析を行っている。Hirata et al.<sup>17)</sup>は、温度勾配と平行に重力振動を与えた二次元正方形容器内において解析を行い、解の種類や対流構造の分布を調べている。最近、Melnikov et al.<sup>23)</sup>は、低重力状態での不均一加熱流体における振動熱対流を、実験によって調べている。

一般に、非定常な三次元流れを評価することは難しい。この種の流れの評価において有効な手法の候補の一つとして、固有直交分解(以降、PODと呼ぶ)が挙げられる。PODは、他分野において主成分解析(PCA)やKarhunen-Loève(KL)展開とも呼ばれる。他の線形分解法と比較してPODの優れた点は、全スナップショットに含まれるエネルギーの最も大きな成分を代表する一連のモードを把握できることにある。ここで、一連の生データは、全データセットにわたり直交基底を構成する多数のモードへと分解される。エネルギーに関して最も支配的な流れ構造

が、PODのいくつかの第一モードとして抽出される。従って、もしその流れが少数の流れ構造だけで支配されている時、データは少数の第一モードを用いるだけで十分に表現できる。ここで、最も重要なモードが、支配的流れ構造を反映することが期待できる。一般に、対象とする流れのスナップショットを充分細かい時間分解能で得ることは、しばしば、不可能である。また、対象とする流れの一つのスナップショットは、乱流によるランダム変動を含んでいるかもしれないし、あるいは、いくつかのコヒーレント構造の重ね合わせの結果かもしれない。そこで、意味のある流れ構造の把握には、様々な統計学に基づくデータの解析手法が求められる。条件付きサンプリング法等とは対照的に、PODは何らかの流れの仮定/単純化を必要としない。よって、これまでに様々な実験や数値解析結果にPODは適用されてきた<sup>24)</sup>。

本研究では、三次元正方形容器内部の水の熱対流を考える。プラントル数  $Pr$  は 7.1 である。境界条件は、一面加熱かつ対面冷却かつ側面完全熱伝導とする。数値解析は、有限差分法による。今回、振動方向は、温度勾配と平行方向とする。そして、振動レイリー数  $Ra_\eta$  は  $5.0 \times 10^4 \leq Ra_\eta \leq 1.1 \times 10^5$  かつ無次元角振動数  $\omega$  は  $1 \leq \omega \leq 200$  の範囲内で、空間平均運動エネルギーや流れ構造を調べる。無重力場で振動する三次元立方体容器内の非圧縮性流体の流れを解析するために、Boussinesq 近似を用いた三次元のNavier-Stokes方程式とエネルギー方程式を用いる。これらの支配方程式を、有限差分法を用いて解析する<sup>19-21)</sup>。本研究では特に、一加振周期間で、周期変動する流れの解明を試みる。そして、熱対流の遷移域での支配的流れ構造の把握のために、有限差分法による計算結果に対してPODによる解析を実施する。

## 2. 計算方法

### 2.1 モデル、支配方程式と数値解析法

Fig. 1 に本研究の解析モデルおよび座標、境界条件を示す。流れ場は、一辺が  $H^*$  の立方体を満たす流体を考え水平横方向に  $x^*$ 、水平奥行き方向に  $y^*$ 、鉛直方向に  $z^*$  とする。内部流体は非圧縮性流体を考え、

プラントル数  $Pr = 7.1$  (水) とする. 加熱面は一様加熱, 冷却面は一様冷却とし一方の温度が他方の温度より高くなっている. 以降, それぞれを高温壁と低温壁と呼ぶ. 四方の側壁は完全熱伝導とする. 容器は, 温度勾配と平行方向に振動する.

支配方程式は, Boussinesq 近似した無次元 Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式であり, それらを以下に示す.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + Pr\Delta\mathbf{u} + Ra_\eta Pr T \sin \omega t \mathbf{e}_z. \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \Delta T. \quad (3)$$

ここに,  $\mathbf{u}$  は速度ベクトル,  $t$  は時間,  $p$  は圧力,  $T$  は温度,  $\mathbf{e}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトル,  $\omega$  は(角)振動数である. なお,  $Ra_\eta$  と  $Pr$  は, 後の 2.2 節で定義する.

計算に一般性を持たせるために, 本論では, 独立変数を以下の様に無次元化する.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{H^*} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$t = \frac{t^*}{H^{*2}/\alpha^*}. \quad (5)$$

ここで,  $\alpha^*$  は熱拡散率であり, 上添字“\*”は有次元量であることを示す. 同様に, 従属変数は以下の様に無次元化する.

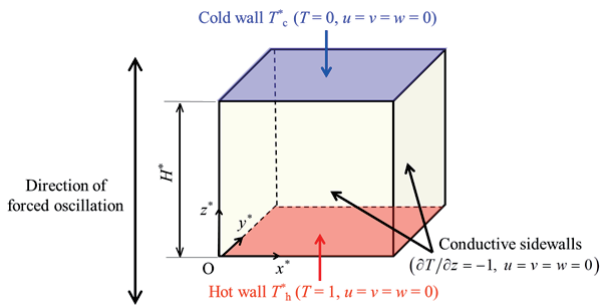


Fig. 1. Computational domain, together with coordinate system and boundary conditions.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{H^*}{\alpha^*} \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix}, \quad T = \frac{T^* - T_c^*}{T_h^* - T_c^*}, \quad p = \frac{p^* H^{*2}}{\rho^* \alpha^{*2}}. \quad (6)$$

ここで,  $T_c^*$  は低温壁温度,  $T_h^*$  は高温壁温度,  $\rho^*$  は平均流体密度である.

支配方程式(1)–(3)を, MAC 法に基づく有限差分法により近似的に解く. 差分スキームは FTCS とし, 計算格子は等間隔千鳥格子 (スタガード格子) を用い, 格子数は  $81^3$ , 時間刻み幅  $\Delta t$  は  $5.0 \times 10^{-7}$  とする. 非線形問題ではいくつかの不明な要因が存在するので, 数値精度の確認の為に, 主計算に先駆けて, 過去の研究<sup>19–21)</sup>と同様に多くの予備計算を実施する. 更に, 主計算のいくつかの場合では,  $\Delta t$  が数値精度に及ぼす影響が小さいことを確認する. なお, 本論では,  $t > 20$  で厳密な周期性が確認できたため,  $t > 20$  の結果を常に議論する.

## 2.2 支配パラメータ

三つの無次元支配パラメータには, 振動レイリー数  $Ra_\eta$  とプラントル数  $Pr$ , 無次元(角)振動数  $\omega$  を用いる. それらの定義を, 以下に示す.

$$Ra_\eta = \frac{\eta^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*}. \quad (7)$$

$$Pr = \frac{\nu^*}{\alpha^*}. \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\omega^* H^{*2}}{\alpha^*}. \quad (9)$$

ここで,  $\beta^*$  は熱膨張係数,  $\nu^*$  は動粘度,  $\eta^*$  は加速度振幅である. 本研究では, 内部流体を水 ( $Pr = 7.1$ ) とし, 振動レイリー数  $Ra_\eta$  については  $5.0 \times 10^4 \leq Ra_\eta \leq 1.1 \times 10^5$  の範囲で, 無次元角振動数  $\omega$  については  $1 \leq \omega \leq 200$  の範囲で, 解析を行う.

なお, 支配パラメータとして地球重力場の様な一定重力下にあるときは  $Ra_\eta$  と  $Pr$ ,  $\omega$  の三つの代わりに, レイリー数  $Ra$  と  $Pr$ ,  $\omega$ , 無次元加速度振幅  $\eta$  の四つを用いる<sup>21)</sup>. 特に無重力時は,  $Ra = 0$  となり, 無加振時は,  $\eta = 0$  となる. ここで,  $Ra$  と  $\eta$ ,  $Ra_\eta$  との関係は,

$$Ra \eta = Ra_\eta. \quad (10)$$

である.

### 2.3 境界条件

流速の境界条件は、以下の通りである。

$$u = v = w = 0. \quad (\text{on all the walls}) \quad (11)$$

圧力の境界条件は、以下の通りである。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Pr \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{at } x = 0 \text{ and } x = 1) \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = Pr \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (\text{at } y = 0 \text{ and } y = 1) \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Pr \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Ra_\eta Pr T \sin \alpha t. \quad (\text{at } z = 0 \text{ and } z = 1) \quad (14)$$

温度の境界条件は、以下の通りである。

$$T = 1, \quad (\text{at } z = 0) \quad (15)$$

$$T = 0, \quad (\text{at } z = 1) \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -1 \quad (\text{at } x = 0, x = 1, y = 0 \text{ and } y = 1) \quad (17)$$

ここで、式(17)は、四つの側壁が完全熱伝導であることを示す。

### 2.4 状態量

流れ場の状態を示す量として、以下の空間平均運動エネルギー  $\bar{K}$  を考える。

$$\bar{K} = \frac{1}{V} \iiint K dx dy dz. \quad (18)$$

ここで、 $K$  は局所運動エネルギーであり、以下の様に定義する。

$$K = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2). \quad (19)$$

また、 $V$  は立方体容器の体積を示す。なお、状態量に  $\bar{K}$  を用いる理由は、ベジヤン数やヌセルト数、空間平均内部エネルギー（または、空間平均温度）などといった状態量よりも有用だからである<sup>19,20</sup>。より具体的に述べると、 $\bar{K}$  のスペクトル・ピークが他の状態量よりも明瞭になるためである。

### 2.5 固有直交分解

本研究では、様々な POD 手法の中でも、スナップショット POD<sup>24-29</sup> と呼ばれる手法を用いる。本研究では、各瞬間の計算結果を、流れ場の一枚のスナップショットとみなす。POD 解析は、一加振周期中で立方体容器内の全空間を対象とする 25 - 400

枚のスナップショットで行う。

一般に、POD 解析では、まず、第零番目のモードとして平均流速場を考える。POD 解析は、変動速度成分を対象として計算を行う為である。しかし、本研究で調査対象とした流れに関しては、一加振周期ごとに少なくとも、ある一定時間は、至る所で流体が完全に静止する。よって、この手順を省く。遷移状態にある流れの変動速度成分の POD の適用に注目する為、平均流速場（それは、完全静止状態ではなく対流状態を表す）を、取り除かないのである。

解析対象として、速度成分  $(u_l^j, v_l^j, w_l^j)$  を扱う。ここで、 $u, v, w$  は三つの速度成分を示す。添え字  $l$  は  $n$  枚のスナップショットのうちの  $l$  番目であることを示す。同様に、添え字  $j$  は、与えられたスナップショットにおいて  $M^3$  個ある流速ベクトルの  $j$  番目であることを示す。（例えば、 $u_j = u(x_j, y_j, z_j)$ ）。ここで、 $M$  は格子数である。 $n$  枚のスナップショットにおける全ての変動速度成分は、以下の行列  $\mathbf{X}$  の様に配置する。

$$\mathbf{X} = [\chi(t_1), \chi(t_2), \dots, \chi(t_n)]$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{M^3}^1 & u_{M^3}^2 & \dots & u_{M^3}^n \\ v_1^1 & v_1^2 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{M^3}^1 & v_{M^3}^2 & \dots & v_{M^3}^n \\ w_1^1 & w_1^2 & \dots & w_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{M^3}^1 & w_{M^3}^2 & \dots & w_{M^3}^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (20)$$

ここで、 $m = 3 \times M^3$  である。

実際には、時間あるいは空間の不均一を考慮して、 $\mathbf{X}$  に重み  $c^q$  ( $q = 1, 2, \dots, n$ ) を導入する。この時、式 (20) は、

$$\mathbf{X} = [\sqrt{c^1} \chi(t_1), \sqrt{c^2} \chi(t_2), \dots, \sqrt{c^n} \chi(t_n)] \quad (21)$$

となる。もっとも、本研究では、一連のスナップショットを等時間間隔とし、かつ、空間メッシュも均一としているため重みは考慮しない。

式(20)より、以下の式を得る。

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b}^q = \lambda^q \mathbf{b}^q, \quad \mathbf{b}^q \in \mathbb{R}^n, \quad n \ll m. \quad (22)$$

式(22)の固有値を、以下の様に、値の大きな順に並べ替える。

$$\lambda^1 > \lambda^2 > \dots > \lambda^n = 0. \quad (23)$$

Table 1. Test cases and their parameters ( $Pr = 7.1$ ).

	$Ra_\eta \left( \equiv \frac{\eta^* \beta^* (T_h^* - T_c^*) H^{*3}}{\nu^* \alpha^*} \right)$	$\omega \left( \equiv \frac{\omega^* H^*}{\alpha^*} \right)$
Case I	$7.0 \times 10^4$	$5.0 \times 10^1$
Case II	$5.0 \times 10^4$	$1.0 \times 10^1$
Case III	$1.1 \times 10^5$	$1.0 \times 10^0$
Case IV	$9.0 \times 10^4$	$2.0 \times 10^2$

式(22)の固有ベクトル  $\mathbf{b}^l$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ) は、以下の様にPODモード  $\boldsymbol{\phi}^l$  を構成する基底の一つなので、

$$\boldsymbol{\phi}^l = \frac{\sum_{j=1}^n b_j^l \boldsymbol{\chi}^j}{\left\| \sum_{j=1}^n b_j^l \boldsymbol{\chi}^j \right\|} \in \mathbb{R}^m, l=1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

ここで、 $b_j^l$  は、式(22)の固有値  $\lambda^l$  に対応する固有ベクトルの  $j$  番目の要素である。また、「 $\| \cdot \|$ 」は自乗和の平方根を示す。それぞれのスナップショットは、PODモード  $l$  に対する展開係数  $a_l$  を持つ一連のPODモードに展開できる。 $a_l$  は、POD係数とも呼ばれる。以下に示す様に、PODモード上に速度場の変動部分を投影することで、次式を得る。

$$\mathbf{a}^l = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\chi}^l \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\phi}^1, \boldsymbol{\phi}^2, \dots, \boldsymbol{\phi}^n]$  である。以上から、スナップショット  $l$  の変動部分の展開式は、以下の式となる。

$$\boldsymbol{\chi}^l = \sum_{j=1}^n a_j^l \boldsymbol{\phi}^j = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{a}^l \in \mathbb{R}^m. \quad (26)$$

速度変動成分の総運動エネルギーの中で、ある一つのPODモードに関する部分は、そのPODモードに対応する固有値に比例する<sup>30)</sup>。それゆえ、式(23)の様に並べ替えた固有値と固有ベクトルを考える限り、エネルギーの観点から最も影響力のあるモードはいくつかの第一モードのみとなる。このことは、いくつかの第一モードのみが大規模流れ構造に関

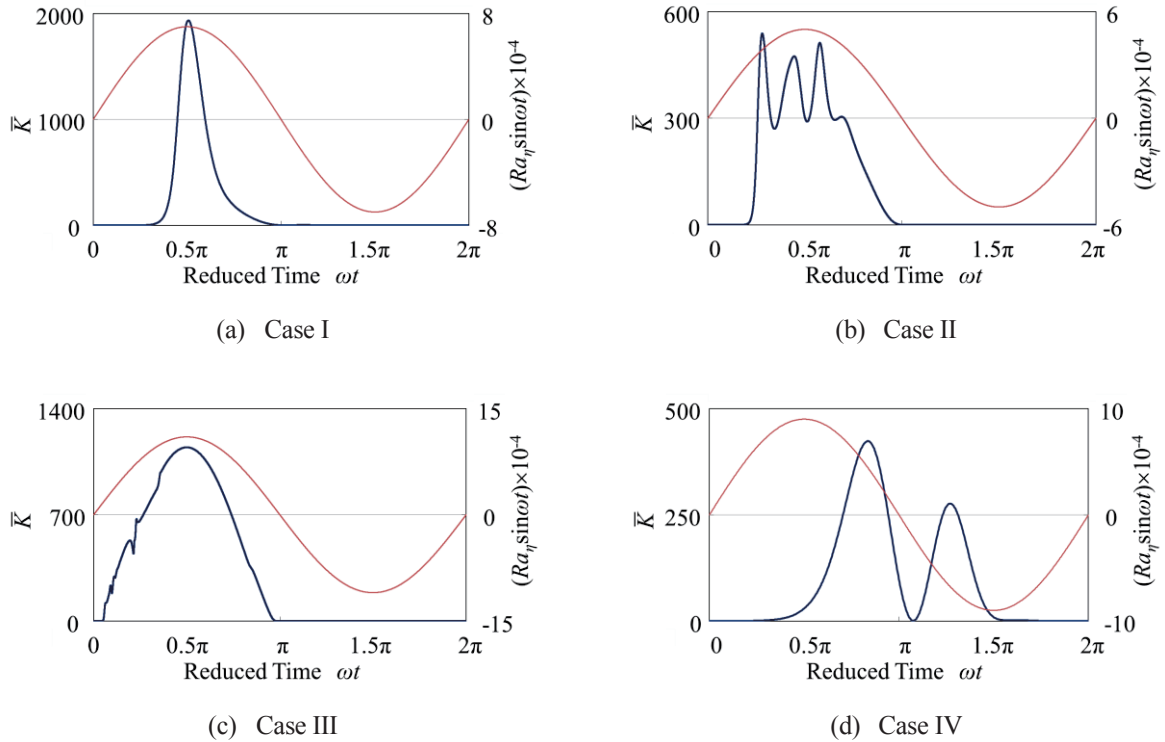


Fig. 2. Time history of  $\bar{K}$ , together with  $Ra_\eta \sin \omega t$ . Blue and red lines denote  $\bar{K}$  and  $Ra_\eta \sin \omega t$ , respectively.



係する可能性を示唆する。従って、もし支配的な流れ構造が存在するなら、これらの流れ構造はいくつかの第一モードに良く反映されており、よって、与えられたスナップショットは少数の第一モードのみを用いることで充分再構成できる。

### 3. 結果と考察

#### 3.1 $\bar{K}$ の時系列波形について

本研究では、四つのテストケース Cases I–IV を調べる。Table 1 に、これらのテストケースを、支配パラメータ  $Ra_\eta$  や  $\omega$  と共に示す。四つのテストケースは、 $Ra_\eta = 5.0 \times 10^4 - 1.1 \times 10^5$  かつ  $\omega = 1.0 \times 10^0 - 2.0 \times 10^2$  の範囲内にある。ここで、 $Ra_\eta$  の範囲の最小値は対流の発生に関係しており、地上重力場での無加振状態の臨界レイリー数 ( $Ra \approx 6.8 \times 10^3$ ) を参考に決定している。また、 $Ra_\eta$  の範囲の最大値は自励発振ならびに乱流に関係しており、ホップ分岐 ( $Ra \approx 2.6 \times 10^5$ ) や層流/乱流遷移 ( $Ra \approx 3.7 \times 10^5$ ) を参考に決定している。 $\omega$  の範囲の最小値は、本来は、準定常近似の有効性を議論できる程度まで小さくするべきであろう。しかし、計算機能力の制限により、本研究での  $\omega$  の最小値は Case III の  $1.0 \times 10^0$  であり、この値は

充分小さいとは言えない (Fig. 2(c) と Fig. 10(c) を参照)。  $\omega$  の範囲の最大値は、高すぎる周波数の為に流体が速い重力変動についていけなくなり対流が静止すること<sup>17)</sup>を考慮して決定している。

Fig. 2 に一加振周期中の  $\bar{K}$  の時系列を、 $Ra_\eta \sin \omega t$  の時系列と共に示す。図 (a) と (b), (c), (d) は、それぞれ、Cases I と II, III, IV に対応する。各図の青太線と赤細線は、それぞれ、 $\bar{K}$  と  $Ra_\eta \sin \omega t$  に対応する。また、横軸は、無次元時間  $\omega t$  である。

Fig. 2 からは、全てのテストケースで、一加振周期内のある一定期間は、 $\bar{K}$  がゼロでない状態 (対流状態) となることが確認できる。 $\bar{K}$  の周期性は、数値計算の開始直後の一加振周期を除くと、厳密である。従って、Fig. 2 のすべての時系列波形は、完全周期状態にある一周期分だけを示す。四つのテストケース全てで、 $\bar{K}$  が零になる期間が存在する。その期間においては温度分布が熱伝導状態であることを確認でき、一加振周期内のある一定期間は熱伝導状態 ( $\bar{K} = 0$  の線形温度分布) が実現する。この事実は、先行する一周期内の対流の履歴は、現在の一周期内の対流に何の影響も及ぼさないことを示唆する。もちろん、この一周期ごとの履歴効果からの独立

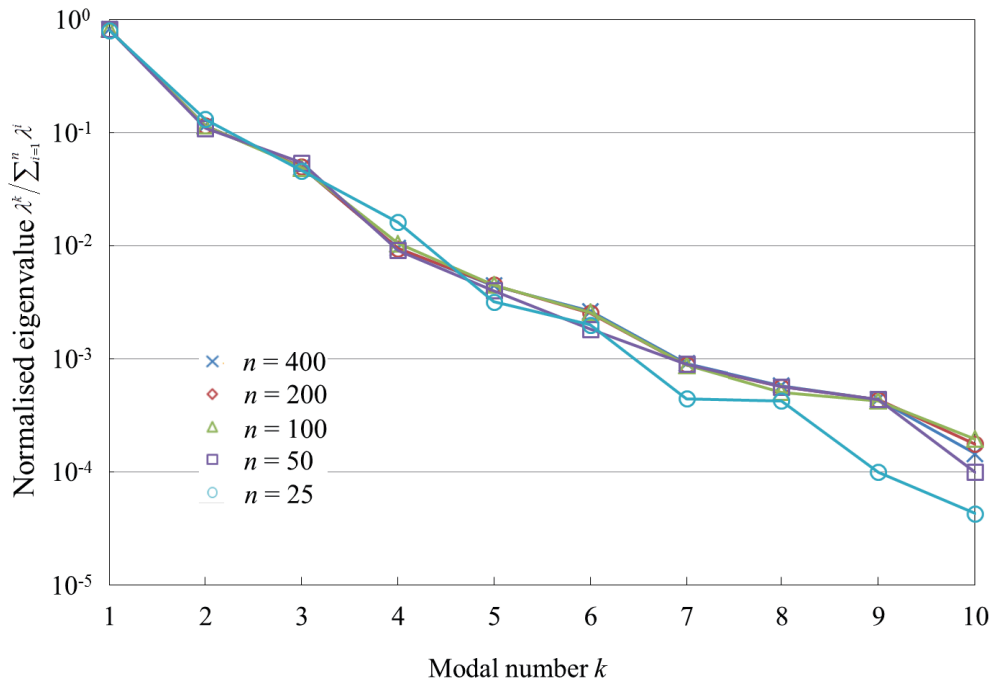


Fig. 3. Eigenvalues of the first ten POD modes in Case III: influence of the number  $n$  of snapshots.

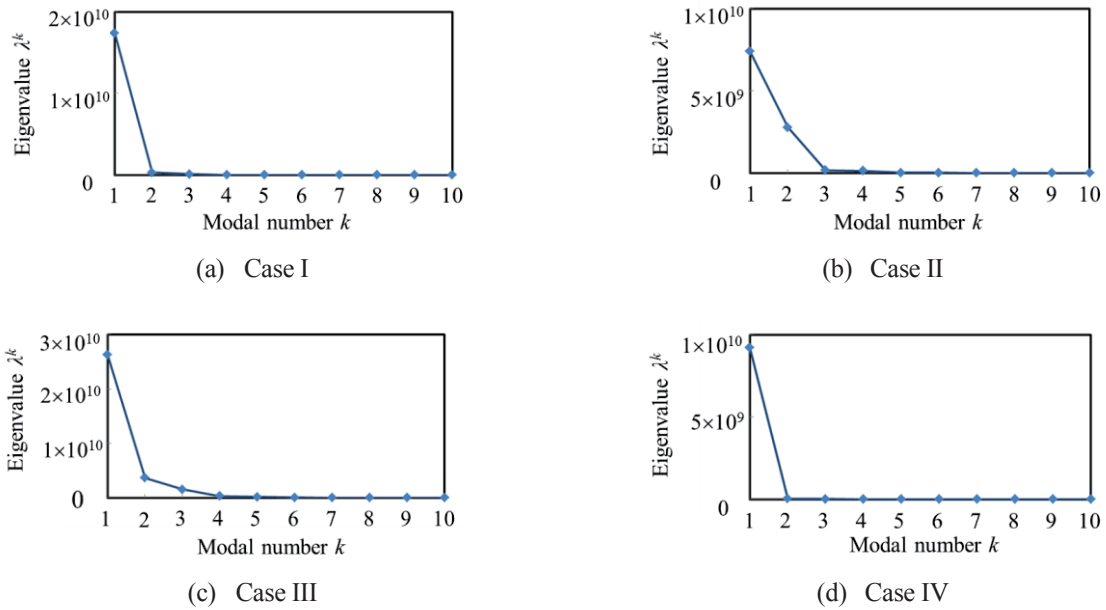


Fig. 4. Eigenvalues  $\lambda^k$  of the first ten POD modes (for  $n = 100$ ).

性は、常に成立するわけではない。つまり、各加振周期毎の完全熱伝導状態の出現は、支配パラメータである  $Ra_\eta$  と  $\omega$  の適当な選択による。

Case I (図(a)) での  $\bar{K}$  の波形は、四つの中でも最も単純である。つまり、 $\omega t = 0 - \pi$  に唯一つの孤立波を確認できる。一方、他の三つの波形は Case I よりも複雑である。Case II では、顕著な三つのピークが一つの孤立波の頂上付近に現れる。Case III では、孤立波の両斜面が滑らかではなく、むしろささくれている。Case IV では、 $\omega t \approx 0 - \pi$  にある一つの孤立波に加えて、 $\omega t \approx \pi - 2\pi$  にもう一つ別の孤立波が現れる。

### 3.2 固有値

POD 解析の最初に、スナップショット枚数  $n$  の影響を確認する。Fig. 3 は、Case III での十個の第一

POD モードの固有値を示す。横軸と縦軸は、それぞれ、モード数  $k$  とその固有値  $\lambda^k$  を示す。厳密に述べると、縦軸は正規化した固有値  $\lambda^k / \sum_{i=1}^n \lambda^i$  であり、これは全エネルギーの総和に対する割合を示す。 $n = 25 - 400$  のいずれの  $n$  においても、 $\lambda^k$  は  $k$  の増加に伴い単調減少する。この減少の仕方は、 $n = 25$  の場合を除き、 $n \geq 50$  で同様の傾向を示す。そのため、スナップショット数  $n$  に関しては  $n \geq 50$  が充分と見做せそうであるので、以降の POD 解析では  $n = 100$  で解析を行う。

Fig. 4 は、縦軸を固有値  $\lambda^k$  とし、横軸をモード数  $k$  として、十個の第一モードについて示す。Fig. 2 と同様に、図の (a) と (b), (c), (d) は、それぞれ、Cases I と II, III, IV を示す。Table 2 は、Fig. 4 の結果の内、第一 POD モードの最初の五個のみについて固有値の値を定量的に示す。厳密にいうと、表の中の

Table 2. Normalised eigenvalues  $\lambda^k / \sum_{i=1}^n \lambda^i$  of the first five POD modes (for  $n = 100$ ).

Modal number $k$	1	2	3	4	5
Case I	97.43 %	1.77 %	0.60 %	0.13 %	0.04 %
Case II	70.14 %	26.39 %	1.62 %	1.22 %	0.24 %
Case III	81.66 %	11.47 %	4.87 %	1.04 %	0.45 %
Case IV	99.13 %	0.48 %	0.22 %	0.10 %	0.06 %

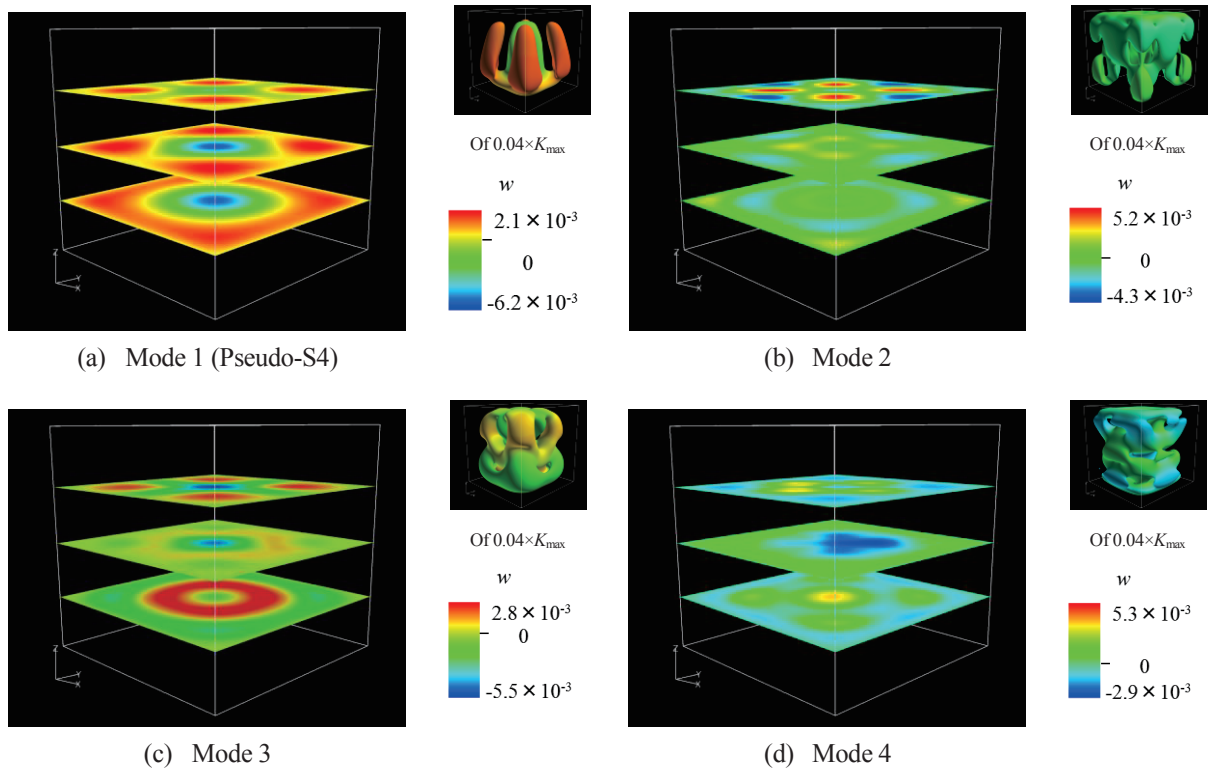


Fig. 5. The first four POD modes in Case I; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ , together with iso-kinetic-energy surfaces.

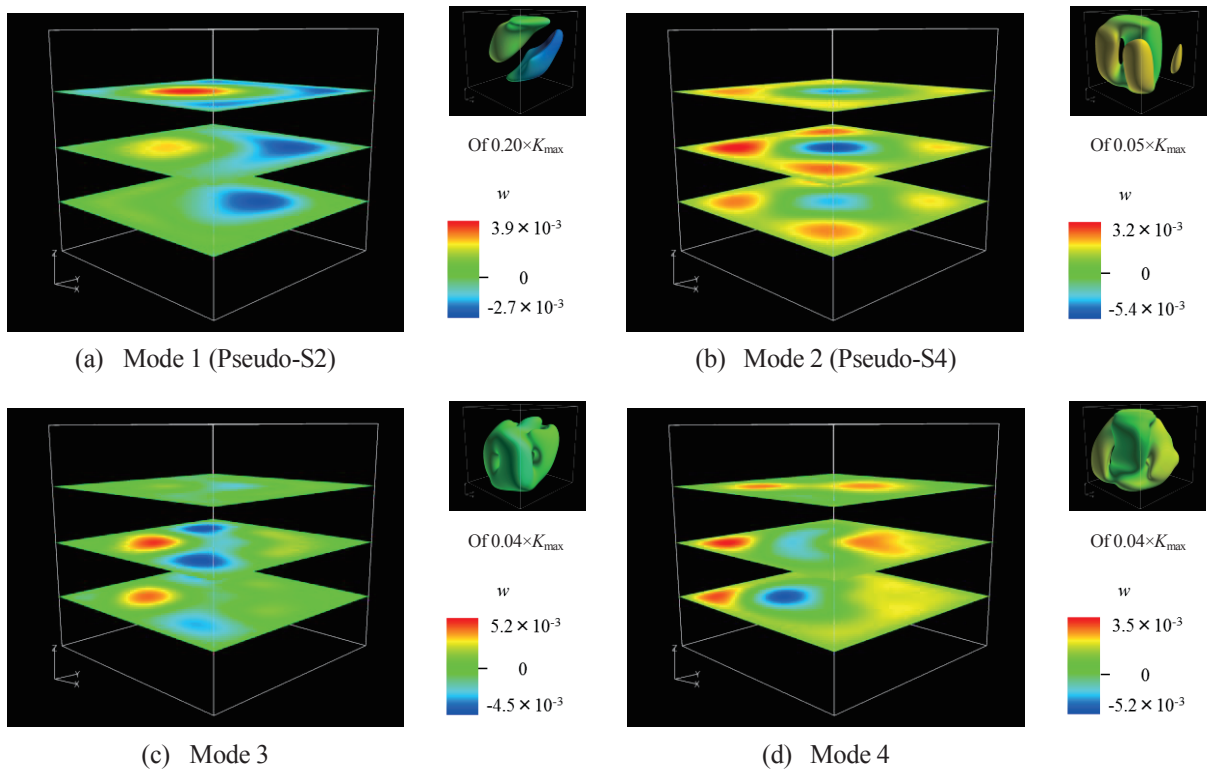


Fig. 6. The first four POD modes in Case II; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ , together with iso-kinetic-energy surfaces.



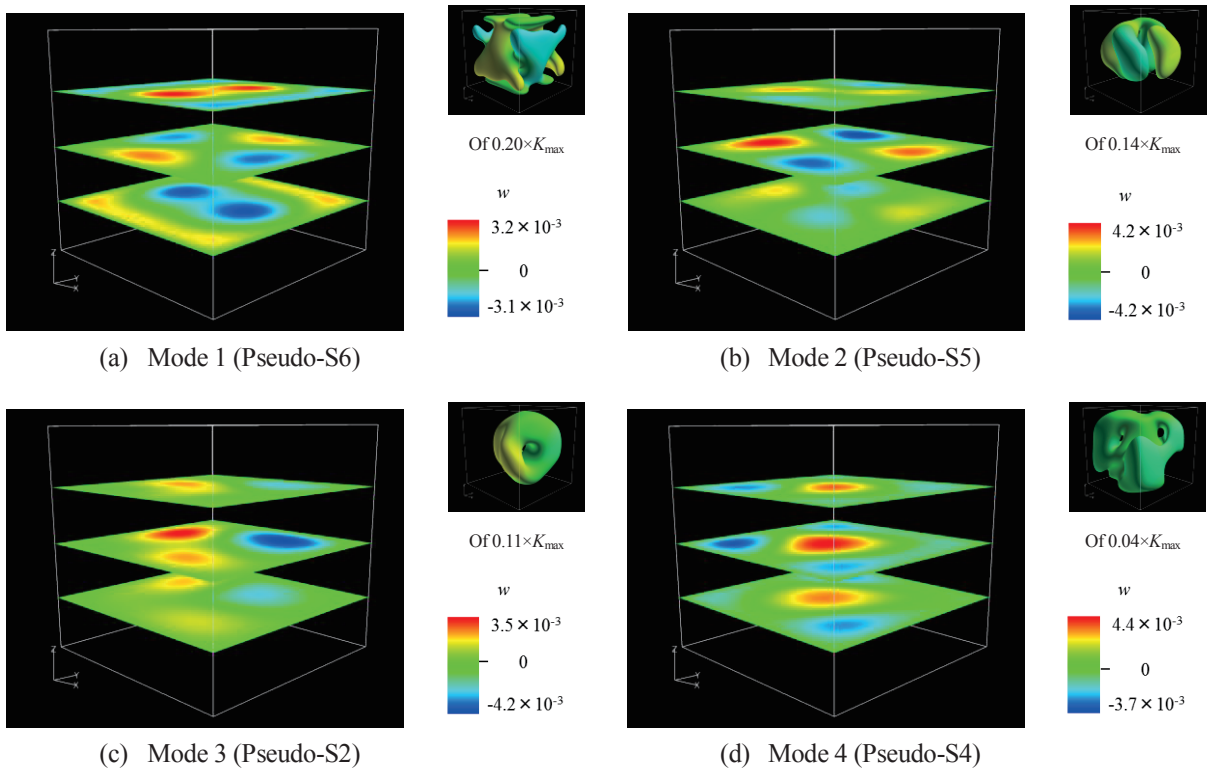


Fig. 7. The first four POD modes in Case III; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ , together with iso-kinetic-energy surfaces.

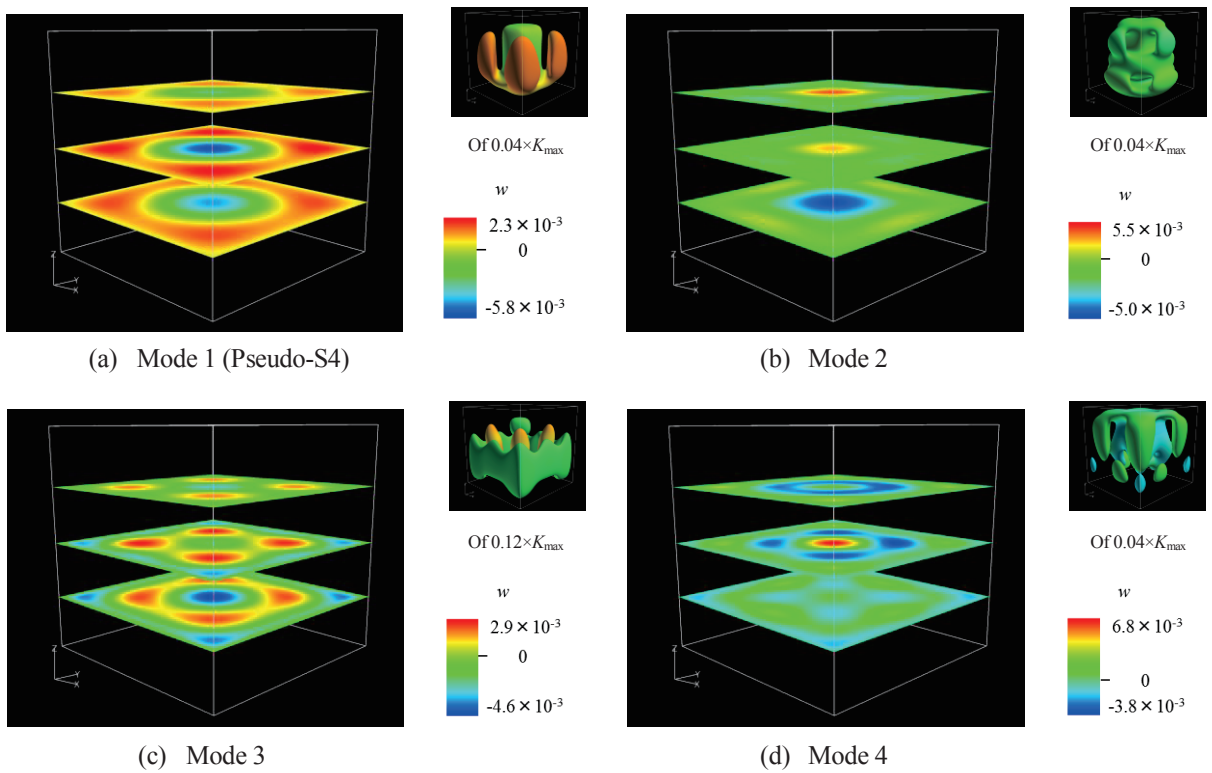


Fig. 8. The first four POD modes in Case VI; perspective views of eigenfunctions of vertical velocity component  $w$  on three horizontal planes at  $z = 0.25, 0.5$  and  $0.75$ , together with iso-kinetic-energy surfaces.

Table 3. Definitions of flow structures S1 – S7 (Pallares et al., 1996, 1999 & 2002). Gray zones of schematic diagrams represent ascending ( $z$ -ward) fluid, and white zones represent descending ( $-z$ -ward) fluid. Chained lines of schematic diagrams denote the roll axes of flow structures, and solid thin lines denote vertical ( $z$ -ward) symmetry planes.

Flow Structure	Definitions	Schematic diagram on the mid plane (at $z = 0.5$ )
S1 (including S3 and S7 with twisted axis of rotation)	A single roll.  (For the difference among the S1, S3 and S7, we have to consider the hysteresis of $Nu$ with increasing $Ra$ . (See Pallares et al. (2002)))	
S2	A single diagonally-oriented roll.	
S4	A nearly-toroidal roll.	
S5	Four rolls. Each one is with its axis perpendicular to one sidewall.	
S6	Four rolls. Each one is with its axis perpendicular to one vertical ( $z$ -ward) edge.	

値は、正規化した固有値  $\lambda^k / \sum_{i=1}^k \lambda^i$  であり、その値は各第一モードが全体のエネルギーの何%を占めるかを表している。

Fig. 4 から、Case I では  $\lambda^k$  の値については最初の一つ目の第一 POD モードのみが支配的であることが分かる。同様に、Cases II と III, IV では、それぞれ、 $\lambda^k$  の値について、最初の二つ目と三つ目、一つ目の第一 POD モードが支配的である。定量的観点からは、正規化された固有値において、以上の支配的な第一 POD モードは概ね 5%以上に該当することが Table 2 から分かる。ただし、全てのケースにおいて、一番目の第一 POD モードの固有値は、他の第一 POD モードの固有値よりも明らかに大きい

値を示す。

### 3.3 POD モード

本節では POD モードの空間構造について、考える。Fig. 5 と 6, 7, 8 は、それぞれ、Cases I と II, III, IV の第一 POD モードを示す。各図は全て、最初の四つの第一モードを示す。すなわち、図(a)と(b), (c), (d)は、それぞれ、一つ目と二つ目、三つ目、四つ目の第一 POD モードに対応する。これらの POD モードは、 $z = 0.25$  と  $0.5, 0.75$  の三つの平面上で、速度ベクトルの  $z$  方向成分  $w$  の固有関数の俯瞰図として可視化されている。さらに、各図の右上には、POD モードの等運動エネルギー面による可視化を示す。

平面上の色と等運動エネルギー面上の色は、 $w$  の値に対応し、その値を各図の右下に凡例として示す。

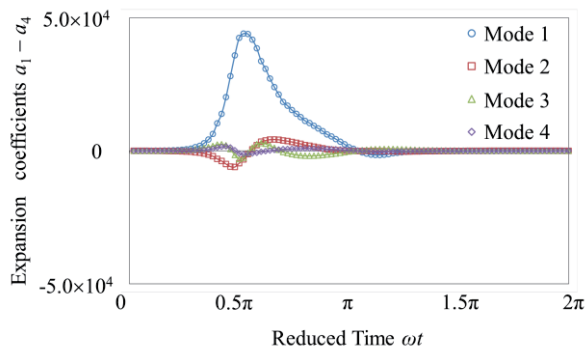
Fig. 5–8 の 16 枚の図の内のいくつかは、地上重力場かつ無加振状態で現れる対流構造とよく似ている。Table 3 に、地上重力場かつ無加振状態での立方体容器中に現れる、定常かつ層流状態にある対流構造 S1 – S7 をまとめる。これらの対流構造の定義の詳細は Pallares et al.<sup>6,8,9</sup> を参照されたい。表中の模式図は、中央平面 ( $z=0.5$ ) における上昇流/下降流を示す。具体的には、図の灰色部分は上昇流 ( $z$  方向) を、白色部分は下降流 ( $-z$  方向) を示す。鎖線は流れ構造の回転中心軸を、細実線は垂直 ( $z$  方向) 対称面を表す。ここで、注意すべきことは、対称性を考えると、回転中心軸と上昇/下降領域は立方体容器の垂直対称軸に関して Table 2 の模式図を  $\pi/2$  または  $\pi$ ,  $3\pi/2$  だけ回転した図に対応する流れも起こり得る事である。同様に、トロイダル・ロールに近い構造である S4 もまた、中心下降かつ周辺上昇となる構造の流れも起こり得る。Table 3 より、Case I での Mode 1 (Fig. 5 (a)) は S4 に似た形である。同様に、Case II での Mode

1 (Fig. 6 (a)) や Case II での Mode 2 (Fig. 6 (b)) , Case III での Mode 1 (Fig. 7 (a)) , Case III での Mode 2 (Fig. 7 (b)) , Case III での Mode 3 (Fig. 7(c)) , Case III での Mode 4 (Fig. 7(d)) , Case IV での Mode 1 (Fig. 8(a)) は、それぞれ、S2 や S4, S6, S5, S2, S4, S4 に似た形である。よって、以降、以上の類似した POD モードを、Pseudo-S2 あるいは Pseudo-S4, Pseudo-S5, Pseudo-S6 と呼ぶ。

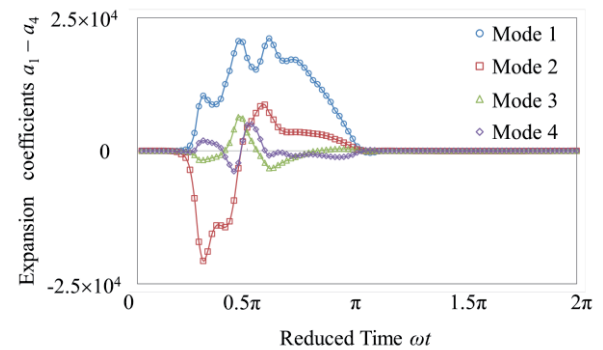
### 3.4 対流構造の時間変化

Fig. 9 は、最初の四つの第一 POD モードに対する POD 係数  $a$  を、横軸を無次元時間  $\omega t$  として一加振周期分だけ示す。Fig. 2 や Fig. 4 同様に、図 (a) と (b), (c), (d) は、それぞれ、Cases I と II, III, IV に対応する。

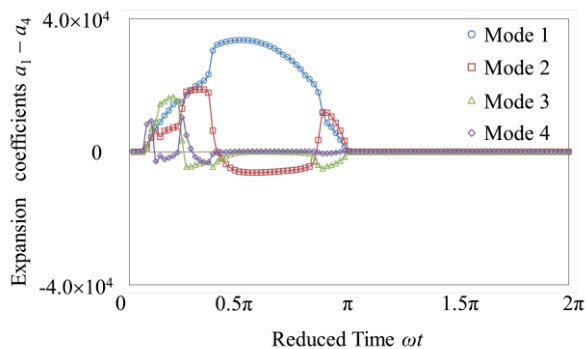
まず、Fig. 9(a) に注目する。Case I では、 $a$  に関しても、固有値  $\lambda$  と同様に (Fig. 4 と Table 2 を参照)、Mode 1 のみが支配的になる。次に Fig. 9(b) に注目する。Case II にも、 $a$  は、固有値  $\lambda$  と同様に、Modes 1 と 2 が支配的になる。ただし、Modes 3 と 4 は、



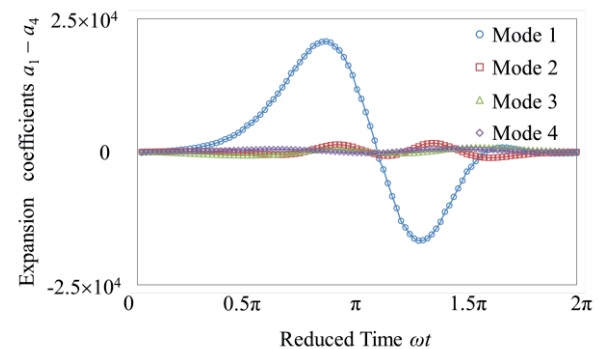
(a) Case I



(b) Case II



(c) Case III



(d) Case IV

Fig. 9. Expansion coefficients  $a_1 - a_4$  of the first four POD modes.

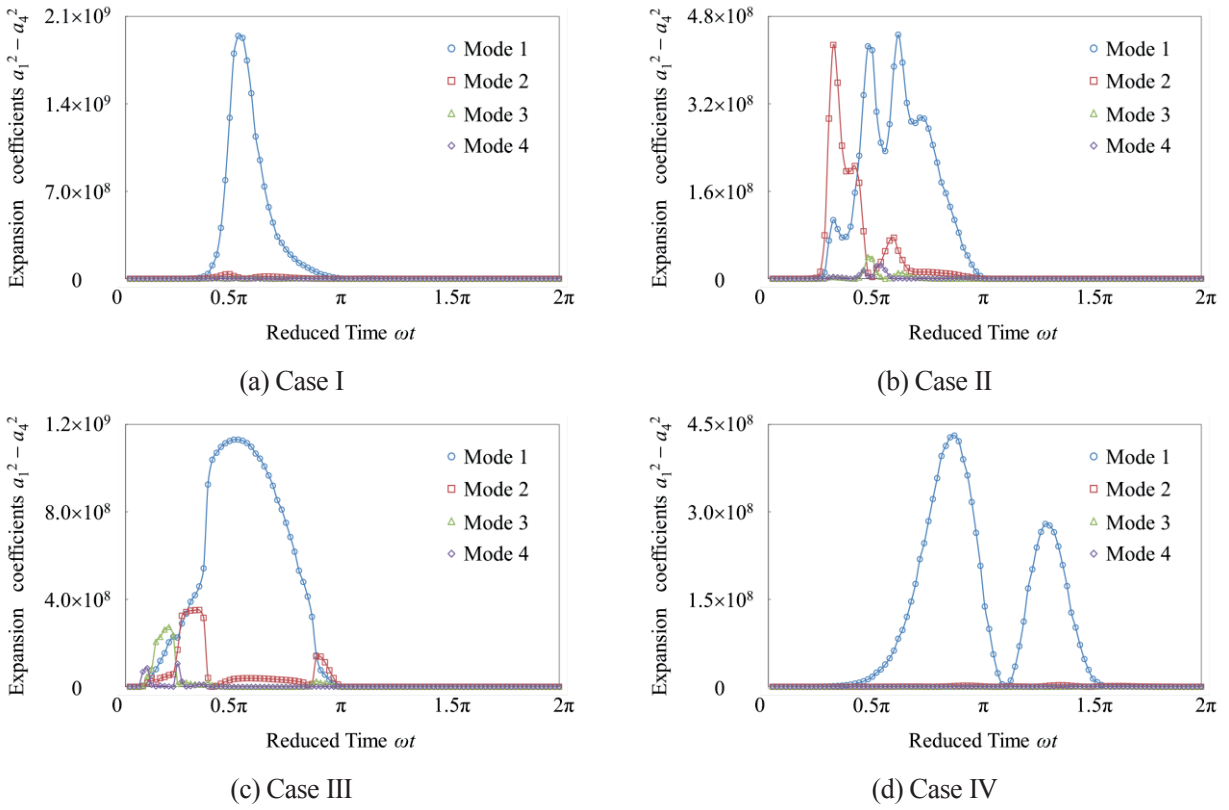


Fig. 10. Square of expansion coefficients  $a_1^2 - a_4^2$  of the first four POD modes.

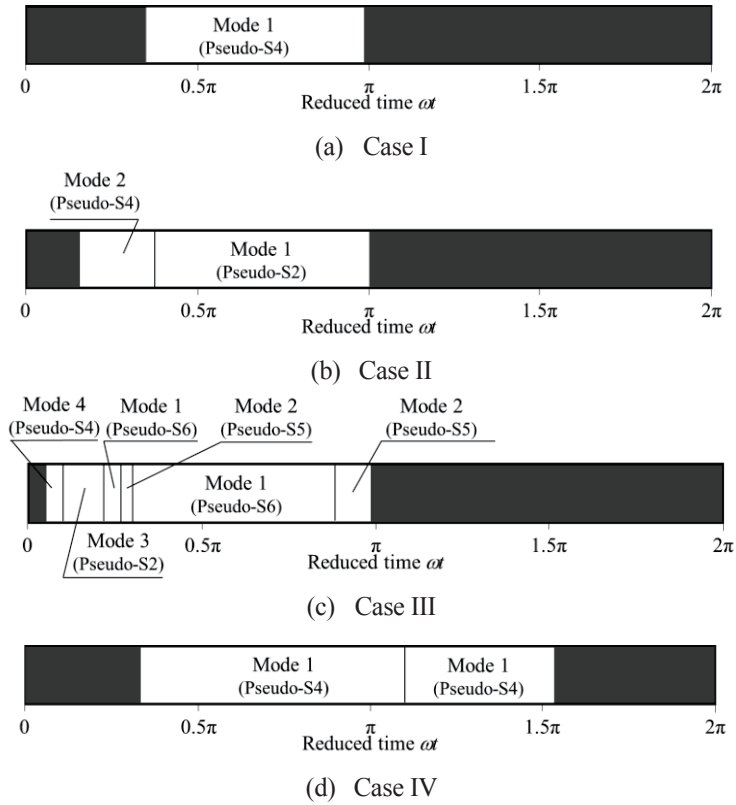


Fig. 11. Time history of the POD mode with the largest  $a^2$  at each  $\omega t$ , in each case. Black zones represent the state with  $K < 1.0 \times 10^0$ .

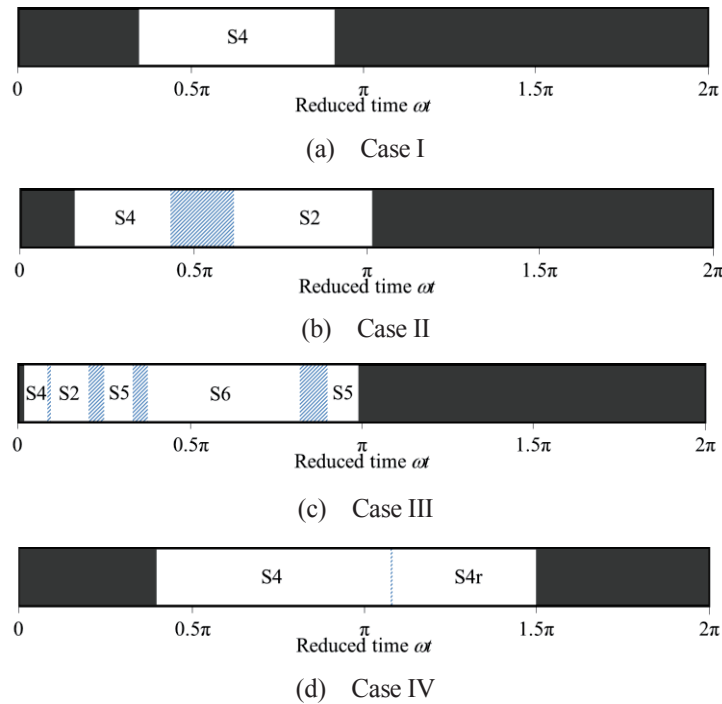


Fig. 12. Time history of flow structure in each case. Black zones denote to be in conductive state. Blue shaded zones denote the transitional states. S4r indicates the reversed S4 which has the central and peripheral currents with opposite directions to the S4.

$\omega t \approx 0.5\pi$ あたりでは無視できない。注意すべき点としては、Mode 2 で  $a$  は  $\omega t = 0.25\pi - 0.4\pi$ において負の値を取ることが挙げられる。次に、Fig. 9(c)に注目する。Case III では、Mode 1 のみが支配的である。しかし、特に  $\omega t = 0 - 0.4\pi$  と  $0.8\pi - \pi$ の期間に限っては、Modes 2-4 が無視できない。最後に、Fig. 9(d)に注目する。Case VI では、Cases IやIII同様、Mode 1 のみが支配的である。尚、Mode 1 の  $a$  は、 $\omega t > \pi$ で零ではなく、負の値を取る。よって、 $\omega t > \pi$ の  $a$  は  $\omega t < \pi$ とは対照的である。

$\bar{K}$ に対応して議論するには、 $a$ の代わりに  $a^2$ を用いるのが便利である。なぜならば、 $a^2$ は直接  $\bar{K}$ と関係しているからである(式(25)参照)。Fig. 10は、Fig. 9同様横軸を  $\omega t$ として、最初の四つの第一PODモードにおける  $a^2$ を示す。まず、Fig. 10(a)を考える。Case Iでは、Mode 1 の  $a^2$ の波形は、Fig. 2(a)の  $\bar{K}$ の波形によく似ている。次に、Fig. 10(b)を考える。Case IIでは、 $\bar{K}$ の孤立波の頂上付近に現れる三つのピーク(Fig. 2(b))の内の第一番目のものが、 $a^2$ における Mode 2のピークに対応している。同様に、 $\bar{K}$ の三つのピークの内の第二番目と第三番目の

ものは、 $a^2$ における Mode 1のピークの一番目と二番目に、それぞれ、対応している。次に、Fig. 10(c)を考える。Case IIIでは、 $\omega t = 0 - 0.4\pi$ と  $0.8\pi - \pi$ の期間で  $\bar{K}$ の孤立波の両斜面上に見られるささくれ(Fig. 2(c))は、 $a^2$ における Mode 2と3だけでなく Mode 4のピークにもまた対応している。最後に、Fig. 10(d)を考える。Case IVでは、 $a^2$ における Mode 1の波形は、Case Iと同様、 $\bar{K}$ の波形(Fig. 2(d))によく似ている。

Fig. 10に基づき、Fig. 11には、各  $\omega t$ で最も大きな  $a^2$ の値を示すPODモードを表す。図(a)と(b)，(c)，(d)は、それぞれ、Cases IとII，III，IVを示す。(なお、数値誤差が結果に反映しない様に  $\bar{K} < 1.0 \times 10^0$ となる  $\omega t$ の期間は考慮しない。Fig. 11の黒色部分は、 $\bar{K} < 1.0 \times 10^0$ の状態であることを示す。)

Fig. 11を現象論的により深く議論する為、Fig. 12を示す。生データ(速度ベクトル)から直接観測した支配的な流れ構造を示す。Fig. 12は、Fig. 11と同様、図(a)と(b)，(c)，(d)が、それぞれ、Cases IとII，III，IVに対応する。黒色部分は熱伝導状態であることを示し、青い斜線域は対流構造の遷移域を表す。



Fig. 11 と Fig. 12 を比較すると、両者がよく対応することが分かる。例えば、Case III での Mode 4 の様な非常に小さな  $a^2$  の値についてさえ、両図はよく一致する。この良好な対応関係は、非定常かつ層流状態の三次元熱対流において、遷移域における支配的な流れ構造の抽出についても、POD の適用可能性を示唆する。特に、本研究では POD 係数  $a$  が有用である。すなわち、 $a$  を考慮することにより、物理的背景がなくても純粋に数学的な運用だけで、一連の流れ構造の予想が可能となる。勿論、本研究の成功が基底の直交性を前提としたものであることを忘れてはならない。幸いにも、本研究の Cases I–IV に現れる主要な第一 POD モードのほとんどは、地上重力場かつ無加振状態での定常層流構造 S2 – S6 によく似ており、これらは互いに近似的直交性を有する。このことが、得られた POD モードに物理的な解釈を与えることを可能としている。そのため、もし同じテストケースで直交性が弱い S1 と S2 とが共に現れていたら、得られた POD モードを物理的な観点から解釈することはより難しくなる。(また、現象論的な観点から、特に Case III に見られる様な対流構造の多様性が遷移過程に現れている点は興味深い。この多様性は今回、直接は述べていないが、Hirata et al. (2013)<sup>21)</sup>で示唆されている)。

補足すると、今回は、一加振周期でのみ議論しているが、一方で、それぞれの流れ構造が対称性を持つため、多周期にわたる POD も興味深いテーマとなるであろう。例えば、S1 を考えると、Table 3 の模式図に示す構造に加えて他に三種類の構造が存在する。全てのテストケースで、一加振周期に完全熱伝導状態が一度は表れるので、毎回の加振サイクル毎に、複数の対称モードの内の一つがランダムに選択され現れる。もし、数値計算による近似を無視したなら、多周期にわたる複数のサイクルで、これらの対称モードの不規則な出現を捉えられるという点に関して、POD は有効であろう。しかし、今回を含めて、実際の数値計算では、近似の為に、複数の対称モードの内一つと同じモードのみが現れがちなので、この不規則な出現の解析は難しい。

#### 4. おわりに

本研究では、一面加熱かつ対面冷却かつ側面完全熱伝導の壁面を有する三次元正方形容器内部の水に対して得られた解析結果に、固有直交分解を用いて熱対流の支配的な流れ構造を明らかにしている。無重力場で振動する三次元立方体容器の非圧縮性流体の流れを解析するために、Boussinesq 近似を用いた三次元の Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式を用いる。これらの支配方程式は有限差分法を用いて解析する。解析は振動レイリー数  $Ra_T = 5.0 \times 10^4 - 1.1 \times 10^5$  (レイリー数の重力加速度を容器の重力変動で置き換えたもの)かつ無次元角振動数  $\omega = 1 - 200$ 、プラントル数  $Pr = 7.1$ (水)にて行い、振動方向は、温度勾配と平行方向とする。得られた解析結果から、最も大きなエネルギーを持つ POD モードまたは大きな固有値を持つ主要な固有ベクトルにより、流れ場の一加振周期中の遷移過程を説明できることが分かった。また、主要な第一固有値に対応する第一 POD モードは、地上重力場かつ無加振状態に表れる定常層流流れ構造によく一致した。特に、POD 係数は有用であることが分かった。本解析は、非定常性の強い(遷移域での)三次元現象でさえも、POD が有効となる例を示した。

#### 参考文献

- 1) M. H. Bénard, “Étude Expérimentale des Courants de Convection dans une Nappe Liquide. – Régime Permanent: Tourbillons Cellulaires”, J. de Phys., 3<sup>e</sup> Série, 513 – 524 (1900).
- 2) S. H. Davis, “Convection in a Box: Linear Theory”, J. Fluid Mech., **30**, 465 – 478 (1967).
- 3) K. Stork and U. Müller, “Convection in a Box: Experiments”, J. Fluid Mech., **54**, 599 – 611 (1972).
- 4) M. P. Arroyo and J. M. Saviron, “Rayleigh-Bénard Convection in a Small Box: Spacial Features and Thermal Dependence of the Velocity Field”. J. Fluid Mech. **235**, 325 – 348 (1992).
- 5) R. J. A. Janssen, R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, “Transition to Time-periodicity of a Natural-convection Flow in a 3D Differentially Heated Cavity”, Int. J. Heat and Mass Transfer, **36**, 2927 – 2940 (1993).
- 6) J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau and F. Giralt, “Natural

- Convection in a Cubical Cavity Heated from Below at Low Rayleigh Numbers”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **39**, 3233 – 3247 (1996).
- 7) R. Hernandez and R. L. Frederick, “Spacial and Thermal Features of Three Dimensional Rayleigh-Bénard Convection”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **37**, 411 – 424 (1994).
  - 8) J. Pallares, F. X. Grau and F. Giralt, “Flow Transitions in Laminar Rayleigh-Benard Convection in a Cubic Cavity at Moderate Rayleigh Numbers”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **42**, 753 – 769 (1999).
  - 9) J. Pallares, I. Cuesta and F. X. Grau, “Laminar and Turbulent Rayleigh-Bénard Convection in a Perfectly Conducting Cubical Cavity”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **23**, 346 – 358 (2002).
  - 10) L. Valencia, J. Pallares, I. Cuesta and F. X. Grau “Rayleigh-Bénard Convection of Water in a Perfectly Conducting Cubical Cavity: Effects of Temperature-dependent Physical Properties in Laminar and Turbulent Regimes”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **47**, 333 – 352 (2005).
  - 11) P. M. Gresho and R. L. Sani, “The Effect of Gravity Modulation on the Stability of a Heated Fluid Layer”. *J. Fluid Mech.* **40**, 783–806 (1970).
  - 12) G. Z. Gershuni and Y. M. Zhukhovitskiy, “Vibrational-induced Thermal Convection in Weight-lessness”, *Fluid Mech. – Sov. Res.*, **15**, 63–84 (1986).
  - 13) S. Biringen and G. Danabasoglu, “Computation of Convective Flow with Gravity Modulation in Rectangular Cavities”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **4**, 357 – 365.3 (1990).
  - 14) W. S. Fu and W. J. Shieh, “A Study of Thermal Convection in an Enclose Induced Simultaneously by Gravity and Vibration”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **35**, 1695–1710 (1992).
  - 15) 宮西貴子, 平田勝哉, 谷川博哉, “重力振動場における円筒容器内自然対流に関する数値解析”, *日本機械学会論文集 B 編*, **65** [637], 118–125 (1999).
  - 16) 谷川博哉, 宮西貴子, 平田勝哉, “重力振動場における二次元正方容器内自然対流に関する数値解析”, *日本機械学会論文集 B 編*, **66** [759], 1053–1060 (2000).
  - 17) K. Hirata, T. Sasaki and H. Tanigawa, “Vibrational Effects on Convection in a Square Cavity at Zero Gravity”, *Journal of Fluid Mechanics*, **445**, 327 – 344 (2001).
  - 18) S. Biringen and L. J. Peltier, “Numerical Simulation of 3-D Bénard Convection with Gravitational Modulation”, *Phys. Fluids A*, **2**, 754–764 (1990).
  - 19) 平田勝哉, 伯井涼子, 石原健太郎, 谷川博哉, 舟木治郎, “底面加熱立方体における流体の周波数応答”, *日本機械学会論文集 B 編*, **72** [714], 279 – 284 (2006).
  - 20) 谷川博哉, 中村憲通, 藤田識司, 舟木治郎, 平田勝哉, “加振した底面加熱立方体内流れへの振幅の影響”, *日本機械学会論文集 B 編*, **75** [759], 2106 – 2114 (2009).
  - 21) K. Hirata, S. Fujita, A. Okaji and H. Tanigawa, “Thermal Convection in an Oscillating Cube at Various Frequencies and Amplitudes”, *Journal of Thermal Science and Technology*, **8**, 309–322 (2013).
  - 22) Y. Kamotani, A. Prasad and S. Ostrach, “Thermal Convection in an Enclosure due to Vibrations Aboard Spacecraft”, *AIAA Journal*, **19**, 511 – 516 (1981).
  - 23) D. E. Melnikov, I. I. Ryzhkov, A. Mialdun and V. Shevtsova, “Experimental Evidence of Thermal Vibrational Convection in a Nonuniformly Heated Fluid in a Reduced Gravity Environment”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 84501.1–84501.4 (2008).
  - 24) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part I: Coherent Structures”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **45**, 561 – 571 (1987).
  - 25) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part II: Symmetries and Transformations”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **45**, 573 – 582 (1987).
  - 26) L. Sirovich, “Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part III: Dynamics and Scaling”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **45**, 583 – 590 (1987).
  - 27) K. E. Meyer, J. M. Pedersen, O. Özcan, “A Turbulent Jet in Crossflow Analysed with Proper Orthogonal Decomposition”, *Journal of Fluid Mechanics*, **583**, 199 – 227 (2007).
  - 28) 平 邦彦, “固有直交分解による流体解析: 1.基礎”, *日本流体力学会誌*, **30**, 115 – 123 (2011a).
  - 29) 平 邦彦, “固有直交分解による流体解析 : 2.応用”, *日本流体力学会誌*, **30**, 263 – 271 (2011b).
  - 30) K. Fukunaga, “Introduction to Statistical Pattern Recognition”, 2nd Edn, Academic Press (1990).