【論　説】

Gale-Nikaido の補題の構成的数学による分析

田　中　靖　人

概　要

本稿では，競争経済における均衡の存在証明に用いられる Gale-Nikaido の補題を Bishop による構成的数学（Bishop[1], Bridges and Richman[2], Bridges and Vîţă[3]）の観点から分析し，それが近似的に成り立つことが構成的に証明できることを示す．また，その近似的な Gale-Nikaido の補題が Sperner の補題を意味することを証明する [1)].

1　は　じ　め　に

Brouwer の不動点定理が構成的に証明できないことはよく知られている．したがって多価関数（あるいは対応）に関する角谷の不動点定理も，需要・供給関数が多価関数であるような競争経済における均衡の存在も構成的に証明できない．一方，Brouwer の不動点定理の証明に用いられる Sperner の補題は構成的に証明可能である．最近この Sperner の補題を用いて近似的な Brouwer の不動点定理（近似的な不動点の存在，近似的な不動点とは不動点に近い点ということではなく不動点の条件を近似的に満たす点である）の構成的な証明が与えられている（van Dalen[4], Veldman ［7]参照）．不動点定理の構成的な証明と

1)　本稿は拙著“Gale-Nikaido lemma and Sperner's lemma: A constructive analysis”, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, Vol. 7, pp. 145-163, Research India Publications, 2012，に基づき「一様に閉グラフを持つ」という多価関数の性質の定義と主要な定理の証明を大幅に修正したものである．この研究は科学研究費補助金基盤研究（C)20530165 の補助を受けている．

は具体的に不動点を見つけられるような証明でなければならない.「不動点が存在しないと仮定すると矛盾が生じる．だから不動点は存在する」という背理法による証明は構成的な証明ではない.

本稿では近似的な Brouwer の不動点定理を用いて，需要・供給関数が多価関数であるような競争経済における均衡の存在証明に用いられる Gale-Nikaido の補題が近似的に成り立つことを構成的に証明する．さらに，その近似的な Gale-Nikaido の補題から Sperner の補題が導かれることを示す.

通常の Gale-Nikaido の補題は次のような内容である.

> Δ を n 次元単体，Z を空でない内部を持つ $n+1$ 次元ユークリッド空間のコンパクトな凸集合とする．Δ から Z の空でない部分集合の集合への多価関数 F が弱ワルラス法則と閉グラフ性を含むいくつかの条件を満たすとき，ある $\mathrm{p}^* \in \Delta$ に対して以下に示す性質を持つ $\mathrm{z}^* \in Z$ が存在する.

$$\mathrm{z}^* \in F(\mathrm{p}^*), \qquad \mathrm{z}^* \leq 0.$$

本稿では同じような条件のもとで次の結果が得られることを証明する.

> $\varepsilon > 0$ とすると，ある $\mathrm{p}^* \in \Delta$ に対して以下に示す性質を持つ z^* が存在する.

$$|F(\mathrm{p}^*) - \mathrm{z}^*| < \varepsilon, \qquad \mathrm{z}^* < \varepsilon\,\mathrm{e}.$$

e はすべての成分が 1 であるようなベクトルである．ここで $|F(\mathrm{p}^*) - \mathrm{z}^*|$ は $F(\mathrm{p}^*)$ と z^* との距離を表し，$|F(\mathrm{p}^*) - \mathrm{z}^*| = \inf \mathrm{q} \in F(\mathrm{p})|\mathrm{q} - \mathrm{p}^*|$ である.
したがって $|F(\mathrm{p}^*) - \mathrm{z}^*| < \varepsilon$ は

$$\text{ある } \mathrm{q} \in F(\mathrm{p}^*) \text{ について } |\mathrm{q} - \mathrm{z}^*| < \varepsilon$$

であることを意味する．多価関数の閉グラフ性については，通常のものより強い**一様に閉グラフを持つ**という条件を要求する．詳しくは本文で説明する.

2　近似的な Gale-Nikaido の補題

通常の Gale-Nikaido の補題の内容は以下のようである．

■ **Gale-Nikaido の補題**　$\mathrm{p}=(p_0, p_1, \cdots, p_\mathrm{n})$ で，

$$\Delta=\{\mathrm{p}|p_i \geqq 0, i=0, 1, \cdots, n, \quad \sum_{i=0}^{n} p_i=1\}$$

また，$n+1$ 次元ユークリッド空間の空でない内部を持つコンパクトな凸集合を Z，以下の条件を満たす n 次元単体 Δ から Z の空でない部分集合の集合への多価関数を F とする．

1. 各 p について $F(\mathrm{p})$（p における F の値）は Z のコンパクトな凸集合である．
2. F は閉グラフを持つ．
3. （弱ワルラス法則）任意の $\mathrm{p}\in\Delta$，$\mathrm{z}\in Z$ について $\mathrm{pz}\leq 0$ が成り立つ．

そのとき，ある $\mathrm{p}^*\in\Delta$ に対して以下の性質を持つ z^* が存在する．

$$\mathrm{z}^*\in F(\mathrm{p}^*), \qquad \mathrm{z}^*\leq 0.$$

構成的数学において集合がコンパクトであるとは，全有界（totally bounded）かつ完備（complete）であることを意味する．ある集合 S について有限な自然数 N と $\{1, 2, \cdots, N\}$ から S の上への（onto）写像が存在するとき S は有限可算（finitely enumerable）であると言う．そのとき S はたかだか N 個の要素を持つ（ちょうど N 個の要素を持つ場合は有限（finite）であると言う）．各々の $\mathrm{p}\in S$ について $|\mathrm{p}-\mathrm{q}|<\varepsilon$ を満たす点 q によって構成される S の部分集合を，S に対する ε - 近似と呼ぶ．$|\mathrm{p}-\mathrm{q}|$ は p と q との距離を表す．各 $\varepsilon>0$ について S の有限可算な ε - 近似が存在するとき S は全有界であると言う．有限可算な ε - 近似とは ε - 近似に含まれる点の数が有限可算個であるということである．そのとき S のすべての点が S の有限可算な部分集合に含まれる点のいずれかの近くにある．完備性はすべてのコーシー列（Cauchy sequence）が収束するこ

とを意味する.

Δ から Z の空でない部分集合の集合への多価関数 F の**グラフ**は次のように定義される.

$$G(F)=\cup_{\mathrm{p}\in\Delta}\{\mathrm{p}\}\times F(\mathrm{p}).$$

$G(F)$ が閉集合であれば, F は閉グラフを持つという. それは次のことを意味する.

> $\mathrm{q}_n\in F(\mathrm{p}_n)$ を満たす点列 $(\mathrm{p}_n)_{n\geq 1}$, $(\mathrm{q}_n)_{n\geq 1}$ をとると, $\mathrm{p}_n\to\mathrm{p}$ のとき, ある $\mathrm{q}\in F(\mathrm{p})$ について $\mathrm{q}_n\to\mathrm{q}$ である.

それに対して以下の条件が満たされるとき F は**一様に閉グラフを持つ**と言うことにする.

> $\mathrm{q}_n\in F(\mathrm{p}_n)$, $\mathrm{q}'_n\in F(\mathrm{p}'_n)$ を満たす点列 $(\mathrm{p}_n)_{n\geq 1}$, $(\mathrm{q}_n)_{n\geq 1}$, $(\mathrm{p}'_n)_{n\geq 1}$, $(\mathrm{q}'_n)_{n\geq 1}$ をとると, $|\mathrm{p}_n-\mathrm{p}'_n|\to 0$ のとき, 任意の q_n と, ある q'_n について $|\mathrm{q}_n-\mathrm{q}'_n|\to 0$, かつ任意の q'_n と, ある q_n について $|\mathrm{q}_n-\mathrm{q}'_n|\to 0$ である.

[3] によればこれは次の事実に相当する.

> $|\mathrm{p}_n-\mathrm{p}'_n|\to 0$ は, 任意の $\delta>0$ に対して $n\geq n_0$ のときに $|\mathrm{p}_n-\mathrm{p}'_n|<\delta$ であるような n_0 が存在することを意味し, $|\mathrm{q}_n-\mathrm{q}'_n|\to 0$ は, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $n\geq n'_0$ のときに $|\mathrm{q}_n-\mathrm{q}'_n|<\varepsilon$ であるような n'_0 が存在することを意味する.

$\mathrm{z}=(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ とおき, 次の関数を考える.

$$\varphi(\mathrm{p},\mathrm{z})=(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\ \varphi_i(\mathrm{p},\mathrm{z})=\frac{p_i+\max(z_i,0)}{1+\sum_{j=0}^{n}\max(z_j,0)}$$

$\varphi_i\geq 0, \sum_{i=0}^{n}\varphi_i=1$ であり, φ_i は (p,z) の一様連続な関数であるから, $\varphi(\mathrm{p},\mathrm{z})$ は $\Delta\times Z$ から Δ への一様連続な関数である.

関数 f が一様連続であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $|x-y|<\delta$ のときに $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となるように $\delta>0$ を選ぶことができるということである．

また $F(\mathrm{p})$ は凸なので，$\varphi(\mathrm{p},\mathrm{z})\times F(\mathrm{p})$ は $\Delta\times Z$ の凸集合である．

ここで次の多価関数を定義する．

$$g(\mathrm{p},\mathrm{z})=\varphi(\mathrm{p},\mathrm{z})\times F(\mathrm{p}). \tag{1}$$

$g(\mathrm{p},\mathrm{z})$ は $\Delta\times Z$ から $\Delta\times Z$ の空でない部分集合の集合への多価関数である．$\varphi(\mathrm{p},\mathrm{z})$ は通常の関数であるが，それも多価関数の一種と見なすことができる．Δ 自身も Δ の空でない部分集合の一つなので φ の値域が Δ の空でない部分集合の集合であると考えることができる．したがって g は $\Delta\times Z$ から $\Delta\times Z$ の空でない部分集合の集合への多価関数である．φ は一様連続で，F は一様に閉グラフを持つ多価関数であるから，g も一様に閉グラフを持つ多価関数である．Z は $n+1$ 次元単体と同相（homeomorphic）であるから，$\Delta\times Z$ は $2n+1$ 次元単体と同相である．

点列 $((\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n))_{n\geq1}$，$((\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n))_{n\geq1}$ をとり，$|(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n)-(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n)|\rightarrow0$ とする．φ は一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ について $|(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n)-(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n)|<\delta$ のときに $|\varphi(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n)-\varphi(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n)|<\varepsilon$ となるように $\delta>0$ を選ぶことができる．ε は任意なので $|(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n)-(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n)|\rightarrow0$ を満たす点列 $((\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n))_{n\geq1}$，$((\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n))_{n\geq1}$ に対応して $|\varphi(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n)-\varphi(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n)|\rightarrow0$ を満たす点列 $(\varphi(\mathrm{p}_n,\mathrm{z}_n))_{n\geq1}$，$(\varphi(\mathrm{p}'_n,\mathrm{z}'_n))_{n\geq1}$ をとることができるから φ は一様に閉グラフを持つ．F も一様に閉グラフを持つので g は一様に閉グラフを持つ．

近似的な Gale-Nikaido の補題は次のように表現される．

定理 1（近似的な Gale-Nikaido の補題）．通常の Gale-Nikaido の補題の条件の内，2 を F が一様に閉グラフを持つという条件で置き換える．$\varepsilon>0$ とすると，ある $\mathrm{p}^*\in\Delta$ に対して

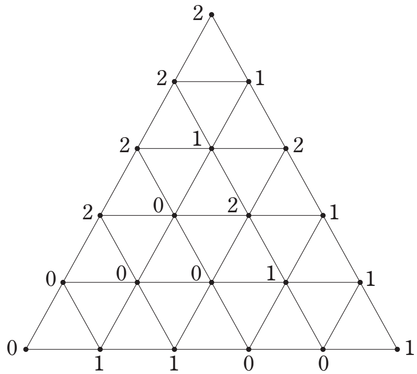
$$|F(\mathrm{p}^*) - \mathrm{z}^*| < \varepsilon,\ \ \mathrm{z}^* < \varepsilon\,\mathrm{e}$$

を満たす z* が存在する．

e はすべての成分が 1 であるようなベクトルである．また，p* と z* は ε に依存する．

証明． Δ を $2n+1$ 次元単体とし，その m 次の分割を考える．2 次元の場合の分割が**第 1 図**に表わされている．2 次元単体（三角形）の各辺を m 等分し，各辺に平行に線を引くことによって分割する．そうすると 2 次元単体は m^2 個の小さい単体に分割される．3 次元の場合には Δ は四面体であり，その各面は 2 次元単体なので上で述べたように m^2 個の三角形に分割される．その上で Δ の面に平行に面を描くと，3 次元単体は m^3 個の小さな四面体に分割される．以下，より高い次元についても同様である．

F を Δ から，その空でない部分集合の集合への多価関数とする．Δ の十分に細かい分割を考え，F をもとに一様連続な関数 $f^m:\Delta \to \Delta$ を次のように定義する．x が，m 次分割されてできた Δ の単体の頂点ならば，ある $y \in F(x)$ について $f^m(x) = y$ とし，それ以外の $x \in \Delta$ については各単体の頂点，$x_0^{\mathrm{m}}, x_1^{\mathrm{m}}, \cdots, x_{2n+1}^{\mathrm{m}}$



第 1 図　2 次元単体の分割と番号づけ

における f^m の値の凸結合によって $f^m(x)$ を定義する．$\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i=1$，$\lambda_i\geqq 0$ とすると

$$x=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i x_i^m \text{ として } f^m(x)=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i f^m(x_i^m)$$

である．f^m は明らかに一様連続であるから van Dalen［4］, Veldman［7］によって近似的な不動点を持つ．近似的な不動点の一つを x^* とすると任意の $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ について

$$|x^*-f^m(x^*)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．Sperner の補題と近似的な Brouwer の不動点定理の証明は田中靖人［9］を参照していただきたい．そこでの後者の証明は［4］の証明を整理したものである．

Δの分割の列 $(\Delta_m)_{m\geq 1}$ を考え，分割によって作られる小単体の頂点間の距離の列 $((|x_i^m-x_j^m|)_{m\geq 1},\ i\neq j)$ について $|x_i^m-x_j^m|\to 0$ であるとする．そのとき F が一様に閉グラフを持つことにより，任意の ε について $m\geq M$ を満たす m に対して任意の $y_i^m\in F(x_i^m)$ と，ある $y_j^m\in F(x_j^m)$ について $|y_i^m-y_j^m|\to 0$ であり，かつ任意の $y_j^m\in F(x_j^m)$ と，ある $y_i^m\in F(x_i^m)$ について $|y_i^m-y_j^m|\to 0$ となるような M が存在する．$x^*=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i x_i^m$ と表せるので，任意の $y_i^m\in F(x_i^m)$ について，ある $y_i^*\in F(x^*)$ があって $|y_i-y_i^*|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．i によって，すなわち x_i^m によって y_i^* は異なるかもしれないが，$F(\mathrm{x}^*)$ が凸であることによって

$$y^*=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i y_i^*\in F(x^*)$$

が成り立つ．各 i について $|y_i-y_i^*|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ であり，

$$f^m(x^*)=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i f^m(x_i^m)=\sum_{i=0}^{2n+1}\lambda_i y_i$$

であるから $|f^m(x^*)-y^*|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ である．$|x^*-f^m(x^*)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ なので

$$|x^*-y^*|<\varepsilon \tag{2}$$

が得られる．

x を (p, z)，F を (1) における g とし，(2) を満たす点を (p*, z*) とすると，任意の $\varepsilon>0$ について

$$\text{すべての } i \text{ について } |\varphi_i-p_i^*|<\varepsilon, \tag{3}$$

および

$$|F(\mathrm{p}^*)-\mathrm{z}^*|<\varepsilon$$

が成り立つ．$\mathrm{p}^*=(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*)$，$\mathrm{z}^*=(z_0^*, z_1^*, \cdots, z_n^*)$ として

$$\left|\frac{p_i^*+\max(z_i^*,0)}{1+\sum_{j=0}^n \max(z_j^*,0)}-p_i^*\right|=\left|\frac{\max(z_i^*,0)-p_i^*\sum_{j=0}^n \max(z_j^*,0)}{1+\sum_{j=0}^n \max(z_j^*,0)}\right|<\varepsilon$$

である．$\sum_{j=0}^n \max(z_j^*,0)=\lambda$ とすると

$$|\max(z_i^*,0)-\lambda p_i^*|<(1+\lambda)\varepsilon$$

が得られるが，これは

$$-(1+\lambda)\varepsilon+\lambda p_i^*<\max(z_i^*,0)<(1+\lambda)\varepsilon+\lambda p_i^*. \tag{4}$$

を意味する．$\sum_{i=0}^n p_i^*=1$ により $p_k^*>0$ を満たす k が存在する．そのような k について $z_k^*>0$ であれば，p_i は負にならず $p_k^* z_k^*>0$ が相殺されないので弱ワルラス法則が成り立たなくなる．したがって ε とともに λ も任意に小さくできる正の数である．p_i^* は有限なので，$(1+\lambda)\varepsilon+\lambda p_i^*$ も任意に小さくできる正の数であるから，$(1+\lambda)\varepsilon+\lambda p_i^*$ をあらためて ε とすると

$$\max(z_i^*,0)<\varepsilon \tag{5}$$

が得られる．これはすべての i について成り立つ．よって

$$\mathrm{z}^*<\varepsilon\,\mathrm{e}$$

を得る．

p を財の価格ベクトル，z を超過需要ベクトル，F を超過需要多価関数とす

ると，近似的な Gale-Nikaido の補題は各財の超過需要が ε より小さい近似的な均衡の存在を意味している.

3　近似的な Gale-Nikaido の補題から Sperner の補題を導く

この節では近似的な Gale-Nikaido の補題から Sperner の補題を導く. n 次元単体 Δ を第 1 図のように分割し，それによって作られる小さな n 次元単体の集合を K で表す. K に含まれる単体の頂点に以下のルールに従って $0, 1, 2, \cdots,$ n のいずれかの番号をつける. 第 1 図には番号づけの例も示されている.

1. Δ の頂点には 0 から n までの番号を以下のようにしてつける. 座標（あるいはベクトルの成分）が $(1, 0, \cdots, 0)$ である頂点には 0 を，座標が $(0, 1, 0, \cdots, 0)$ である点には 1 を，座標が $(0, 0, 1 \cdots, 0)$ である点には 2 を，$\cdots$，座標が $(0, \cdots, 0, 1)$ である点には n をつける. すなわち $k(k = 0, 1, \cdots, n)$ 番目の座標が 1 で他の座標が 0 である点には k の番号をつける.
2. Δ の $n-1$ 次元の面に含まれる K の小さな単体の頂点にはその面の各頂点の番号のいずれかと同じ番号をつける.
3. Δ の $n-2$ 次元の面に含まれる K の小さな単体の頂点にはその面の各頂点の番号のいずれかと同じ番号をつける. 以下同様.
4. Δ の内部に含まれる K の小さな単体の頂点には $0, 1, \cdots, n$ のいずれかの番号をつける.

K に含まれる n 次元単体の頂点を $x^0, x^1, \cdots, x^n$ とし, x^i の第 j 成分を x^i_j として, x^i に割り振られた番号を $l(x^i)$ とする. τ がすべての x^i について $x^i_{l(x^i)}$ より小さな正の数であるとして，関数 $f(x^i)$ を次のように定義する [2].

2）　この関数の定義については Yoseloff［8］を参照した.

$$f(x^i)=(f_0(x^i), f_1(x^i), \ldots, f_n(x^i)),$$

$$f_j(x^i)=\begin{cases} x_j^i-\tau & j=l(x^i)\text{ のとき},\\ x_j^i-\dfrac{\tau}{n} & j\neq l(x^i)\text{ のとき}. \end{cases} \tag{6}$$

f_j は f の第 j 成分である．番号づけのルールにより，すべての x^i について $x^i_{l(x^i)}>0$ であるから $\tau>0$ が定義できる．$\sum_{j=0}^n f_j(x^i)=\sum_{j=0}^n x_j^i=1$ なので

$$f(x^i)\in\Delta.$$

である．単体の各頂点における f の値の凸結合をとることによって f を単体内の他の点に拡張する．

頂点が $x^0, x^1, \cdots, x^n$ であるような K に含まれる n 次元単体の点を y とすると，y および $f(y)$ は次のように表される．

$$y=\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i,\qquad f(y)=\sum_{i=0}^n \lambda_i f(x^i),\qquad \lambda_i\geq 0,\qquad \sum_{i=0}^n \lambda_i=1$$

f が一様連続であることを示そう．y，y' を K に含まれる同一の n 次元単体の異なる 2 点とすると，それらは

$$y=\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i,\qquad y'=\sum_{i=0}^n \lambda'_i x^i,$$

$$y-y'=\sum_{i=0}^n (\lambda_i-\lambda'_i)x^i,\qquad \text{各 } j \text{ について } y_j-y'_j=\sum_{i=0}^n (\lambda_i-\lambda'_i)x_j^i$$

のように表現される．すると

$$f(y)-f(y')=\sum_{i=0}^n (\lambda_i-\lambda'_i)f(x^i),$$

および，各 j について

$$f_j(y)-f_j(y')=\sum_{i=0}^n (\lambda_i-\lambda'_i)x_j^i+\sum_{i:j\neq l(i)}^n (\lambda_i-\lambda'_i)x_j^i\frac{\tau}{n}-\sum_{i:j\neq l(i)}^n(\lambda_i-\lambda'_i)\tau$$

$$=y_j-y'_j+\sum_{i:j\neq l(i)}^n(\lambda_i-\lambda'_i)\frac{\tau}{n}-\sum_{i:j\neq l(i)}^n(\lambda_i-\lambda'_i)\tau$$

を得る．τ は有限なので各 i について，与えられた λ_i に対して λ'_i を適当に選ぶことによって，各 j について $|y_j - y'_j|$ の値に対応して $|f_j(y) - f_j(y')|$ が十分に小さくなるようにすることができる．したがって $|y - y'|$ の値に対応して $|f(y) - f(y')|$ が十分小さくなるようにすることができるから，f は一様連続である．

このf を使って以下のような関数 $F(x) = z = \{z_0, z_1, \cdots, z_n\}$ を作る．

$$z_i = f_i(x) - x_i\mu(x), \qquad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{7}$$

$x \in \Delta$ であり，$\mu(x)$ は

$$\mu(x) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i f_i(x)}{\sum_{i=0}^n x_i^2}$$

と定義される．各 $x_i(x)$ は一様連続であり，また以下で示すように弱ワルラス法則を満たす．各 i について x_i を (7) に掛け，その結果を 0 から n まで加えると

$$\sum_{i=0}^n x_i z_i = \sum_{i=0}^n x_i f_i(x) - \mu(x) \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i f_i(x) - \frac{\sum_{j=0}^n x_i f_i(x)}{\sum_{j=0}^n x_i^2} \sum_{i=0}^n x_i^2$$

$$= \sum_{i=0}^n x_i f_i(x) - \sum_{i=0}^n x_i f_i(x) = 0 \tag{8}$$

が得られるから，弱ワルラス法則が成り立つ．ここで，次の関数を定義する．

$$g(x, z) = \varphi(x, z) \times F(x),$$

$$\varphi(x, z) = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n), \qquad \varphi_i(x, z) = \frac{x_i + \max(z_i, 0)}{1 + \sum_{j=0}^n \max(z_j, 0)}.$$

g は (x, z) の一様連続な関数であるから，コンパクトかつ凸値で一様に閉グラフを持つ多価関数の一つでもある．

一様連続な関数f に対して，任意の ε について $|x - y| < \delta$ のときに $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるような δ が存在する．$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ を満たす数列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ を考えると各 ε_n に対して上の条件を満たす数列 $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ が存在する．$|x_n - y_n| < \delta_n$ を満たす点列 $(x_n)_n \geq 1$，$(y_n)_n \geq 1$ をとる

と $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon_n$ が成り立つ． $\varepsilon_n \to 0$ とすると $|x_n-y_n| \to 0$ のときに $|f(x_n)-f(y_n)| \to 0$ となるようにできるので f は一様に閉グラフを持つ．

したがって，近似的な Gale-Nikaido の補題の条件を満たしているから次の式を満たす x^*，z^* が存在する．

$$|F(x^*)-z^*|<\varepsilon, \qquad z^*<\varepsilon e.$$

$\max(z^i, 0)<\varepsilon$ （(5) 式参照）より $\varepsilon>0$ として，すべての i について $f_i(x^*)-x_i^*\mu(x^*)<\varepsilon$ が成り立つ．(8) 式より，$x_i^*>0$ であるような i について $z_i<0$ となることはないので，そのような i について $z_i=f_i(x^*)-x_i^*\mu(x^*)>-\varepsilon$ である．また，$x_i^*<\varepsilon$ であるような i について $z_i=f_i(x^*)-x_i^*\mu(x^*)>-\varepsilon$ が成り立つ．よって

$$-\varepsilon<f_i(x^*)-x_i^*\mu(x^*)<\varepsilon \tag{9}$$

を得る．この不等式を 0 から n まで辺々加えると

$$-(n+1)\varepsilon<\sum_{i=0}^{n} f_i(x^*)-\mu(x^*)\sum_{i=0}^{n} x_i^*<(n+1)\varepsilon$$

が得られる．また，$\sum_{j=0}^{n} f_j(x^i)=\sum_{j=0}^{n} x_j^i=1$ より

$$1-(n+1)\varepsilon<\mu(x^*)<1+(n+1)\varepsilon \tag{10}$$

である．さらに (9) と (10) から次の式が導かれる．

$$x_i^*-(n+1)\varepsilon x_i^*-\varepsilon<f_j(x^*)<x_i^*+(n+1)\varepsilon x_i^*+\varepsilon.$$

n，x_i^* は有限であるから $(n+1)\varepsilon x_i^*+\varepsilon$ を ε と定義し直すと，$-\varepsilon<f_j(x^*)-x_i^*<\varepsilon$，すなわち

$$|f_i(x^*)-x_i^*|<\varepsilon$$

が得られる．これはすべての i について成り立つ．

$\gamma>0$ とし，$\bar{x}$ を $V(x^*,\gamma)$ の点とする．$V(x^*,\gamma)$ は x^* の γ 近傍を表す．γ が十分に小さければ，f の一様連続性により，任意の $\varepsilon>0$，すべての i について

$$|f_i(\bar{x})-\bar{x}_i|<\varepsilon \tag{11}$$

となる．$\bar{x}_i$ は $\bar{x}$ の第 i 成分である．$\bar{x}_i$ を含む K の単体を $\tilde{\Delta}$，$x^0, x^1, \cdots, x^n$ をそ

の頂点とすると，$\tilde{x}$ および $f(\tilde{x})$ は次のように表される．

$$\tilde{x}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x^i,\qquad f(\tilde{x})=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x^i),\qquad \lambda_i\geq 0\ ,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1.$$

(6) により $x^0, x^1, \cdots, x^n$ の中で唯一つの x^k が i の番号を持つならば次の式が成り立つ．

$$|f_i(\tilde{x})-\tilde{x}_i|=\left|\sum_{j=0}^{n}\lambda_j x_i^j+\sum_{j=0,\,j\neq k}^{n}\lambda_j\frac{\tau}{n}-\lambda_k\tau-\tilde{x}_i\right|=\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0,\,j\neq k}^{n}\lambda_j-\lambda_k\right)\tau\right|<\varepsilon.$$

x_i^j は x^j の第 i 成分である．この式は次のことを意味する．

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0,\,j\neq k}^{n}\lambda_j-\lambda_k\approx 0.$$

これは，すべての k について $\lambda_k\approx\frac{1}{n+1}$ であるような λ_k によって満たされる．一方，どの x^j も番号 i を持たなければ

$$f_i(\tilde{x})=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j x_i^j=\tilde{x}_i+\left(1+\frac{1}{n}\right)\tau$$

となり，(11) は満たされない．したがって，各 i について唯一つの x^j が i の番号を持たなければならないから，$\tilde{\Delta}$ の頂点は 0 から n までの番号を持つ．以上によって Sperner の補題が成り立つことが証明された．

参考文献

［1］Bishop E., and D. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer, 1985.

［2］Bridges D., and F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, 1987.

［3］Bridges D., and L. Vîţă, *Techniques of Constructive Mathematics*, Springer, 2006.

［4］Van Dalen, D., "Brouwer's ε-fixed point from Sperner's lemma", *Theoretical Computer Science*, vol. 412, No. 28, pp. 3140-3144, http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2011.04.002, 2011.14.

［5］Gale, D., "The law of supply and demand", *Mathematica Scandinavica*, vol. 3, pp. 155-

169, 1955.

［6］Nikaido, H., “On the classical multilateral exchange problem”, *Metroeconomica*, vol. 3, pp. 135-145, 1956.

［7］Veldman, W., “Brouwer’s approximate fixed point theorem is equivalent to Brouwer’s fan theorem”, in *Logicism, Intuitionism and Formalism*, edited by Lindström, S., Palmgren, E., Segerberg, K. and Stoltenberg-Hansen, Springer, 2009.

［8］M. Yoseloff, “Topological proofs of some combinatorial theorems”, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, vol. 17, pp. 95-111, 1974.

［9］田中靖人「近似的な角谷の不動点定理の構成的数学による証明と近似的なミニ•マックス定理について」『経済学論叢』（同志社大学）第 64 巻（近刊）.

（たなか　やすひと・同志社大学経済学部）

The Doshisha University Economic Review Vol.64 No.4

Abstract

Yasuhito TANAKA, *A Constructive Analysis of the Gale–Nikaido Lemma*

This study, using an approximate version of Brouwer's fixed point theorem, constructively proves an approximate version of the Gale–Nikaido lemma, which is used to prove the existence of equilibrium in a competitive economy, according to Bishop-style constructive mathematics. This study also proves that this approximate version of the Gale–Nikaido lemma implies Sperner's lemma.