【論　説】

近似的な角谷の不動点定理の構成的数学による証明と近似的なミニ・マックス定理について

田　中　靖　人

概　要

本稿では近似的な Brouwer の不動点定理を用いて近似的な角谷の不動点定理を，閉グラフ性を「一様に閉グラフを持つ」という性質に強めて Bishop による構成的数学（constructive mathematics）（Bishop & Bridges [1], Bridges & Richman [2], Bridges & Vîţă [3]）の立場から証明する．すなわち，コンパクトな距離空間（ここでは単体を考える）からその部分集合の集合へのコンパクトかつ凸値で一様に閉グラフを持つ多価関数（「対応」とも呼ぶ）が近似的な不動点を持つことを，構成的（constructive）に証明する．近似的な不動点とは，不動点に近い点ではなく不動点の条件を近似的に満たす点である．またその結果をゼロ・サムゲームに応用し，近似的なミニ・マックス定理を証明する[1]．

1　は　じ　め　に

Brouwer の不動点定理が構成的に証明できないことはよく知られている[2]．

1）　本稿は拙著 “Proof of constructive version of Kakutani’s fixed point theorem directly by Sperner’s lemma and approximate mini-max theorem: A constructive analysis,” *Advances in Applied Mathematical Analysis*, Vol. 7, pp. 11-27, Research India Publications，2012，に基づき「一様に閉グラフを持つ」という多価関数の性質の定義と主要な定理の証明を大幅に修正したものである．この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) 20530165 の補助を受けている．

2）　Kellogg et al.［5］が Brouwer の不動点定理の「構成的」な証明を与えているとされるが，↗

したがって多価関数(対応)に関する角谷の不動点定理も構成的に証明できない．一方，Brouwer の不動点定理の証明に用いられる Sperner の補題は構成的に証明可能である．最近この Sperner の補題を用いて近似的な Brouwer の不動点定理（近似的な不動点の存在）の構成的な証明が与えられている（[4], Veldman [6] 参照)．不動点定理の構成的な証明とは具体的に不動点を見つけられるような証明ということである．「不動点が存在しないと仮定すると矛盾が生じる．だから不動点は存在する」という背理法による証明は構成的な証明ではない．

本稿では近似的な Brouwer の不動点定理を用いて近似的な角谷の不動点定理を，閉グラフ性を「一様に閉グラフを持つ」という性質に強めて構成的数学の立場から証明する．すなわち，コンパクトな距離空間（ここでは単体を考える）からその部分集合の集合へのコンパクトかつ凸値で一様に閉グラフを持つ多価関数が近似的な不動点を持つことを構成的に証明する．近似的な不動点とは，不動点に近い点ではなく不動点の条件を近似的に満たす点である．またその結果をゼロ・サムゲームに応用し，近似的なミニ・マックス定理を証明する．

多価関数 F の近似的な不動点 x^* とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x^* - F(x^*)| < \varepsilon$（ある $y^* \in F(x^*)$ について $|x^* - y^*| < \varepsilon$）を満たす点である．$x^*$ は ε に依存する．また近似的なミニ・マックス定理とは，二人ゼロ・サムゲームの値が ε の範囲で決まることを意味する．その値を実現するプレイヤーの戦略も構成的に求めることができる．

2 近似的な角谷の不動点定理

n 次元単体 Δ からその空でない部分集合の集合への多価関数（あるいは対応）F を考える．

n 次元単体 Δ とは $n+1$ 個の点 $(1, 0, \cdots, 0)$，$(0, 1, 0, \cdots, 0)$，……，

↘Bishop による構成的数学（constructive mathematics)（[1]，[2]，[3]）の観点からは「構成的」な証明ではない．定理の 1 次元のケース，すなわち中間値の定理が構成的に証明できないことを言えば十分であろう（[2]，Dalen［4］参照)．

(0, …, 0, 1) を頂点とし，それらの頂点を線，面で結んで作られる図形（これらの点の凸包 (convex hull)）である．2 次元単体は三角形で，3 次元単体は四面体で表現される．

すべての $x \in \Delta$ について $F(x)$ はコンパクトかつ凸であると仮定する．

構成的数学において集合がコンパクトであるとは，全有界（totally bounded）かつ完備（complete）であることを意味する．まず集合の有限可算性（finite enumerability）と集合に対する ε - 近似を説明する．ある集合 S について有限な自然数 N と $\{1, 2, \cdots, N\}$ から S の上への（onto）写像が存在するとき S は有限可算（finitely enumerable）であると言う．そのとき S はたかだか N 個の要素を持つ（ちょうど N 個の要素を持つ場合は有限（finite）であると言う）．集合 S に対する ε - 近似とは，各々の $x \in S$ について $|x-y| < \varepsilon$ を満たす点 y を含むような S の部分集合である．ここで $|x-y|$ は x と y との距離を表す．各 $\varepsilon > 0$ について S の有限可算な（要素の数が有限可算個であるような）ε - 近似が存在するとき S は全有界（totally bounded）である．その場合 S のすべての点が S の有限可算な部分集合に含まれる点のいずれかの近くにある．完備性はすべてのコーシー列（Cauchy sequence）が収束することを意味する．

通常の角谷の不動点定理は

「コンパクトかつ凸値で，閉グラフを持つ，Δ からその空でない部分集合の集合への多価関数は不動点を持つ」

というものである．

Δ からその空でない部分集合の集合への多価関数 F のグラフは

$$G(F) = \cup_{x \in \Delta} \{x\} \times F(x)$$

によって定義される．$G(F)$ が閉集合であれば，F は閉グラフを持つと言う．それは次のことを意味する．

$y_n \in F(x_n)$ を満たす点列 $(x_n)_{n\geq 1}$，$(y_n)_{n\geq 1}$ をとる．$x_n \to x$ のとき，ある $y \in F(x)$ について $y_n \to y$ となる．

それに対して以下の条件が満たされるとき F は**一様に閉グラフを持つ**と言うことにする．

$y_n \in F(x_n)$，$y'_n \in F(x'_n)$ を満たす点列 $(x_n)_{n\geq 1}$，$(y_n)_{n\geq 1}$，$(x'_n)_{n\geq 1}$，$(y'_n)_{n\geq 1}$ をとると，$|x_n - x'_n| \to 0$ のとき，任意の y_n と，ある y'_n について $|y_n - y'_n| \to 0$，かつ任意の y'_n と，ある y_n について $|y_n - y'_n| \to 0$ である．

Bridges & Vîţă［3］によればこれは次のような内容である．

$|x_n - x'_n| \to 0$ は，任意の $\delta > 0$ に対して $n \geq n_0$ のときに $|x_n - x'_n| < \delta$ であるような n_0 が存在することを意味し，$|y_n - y'_n| \to 0$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n \geq n'_0$ のときに $|y_n - y'_n| < \varepsilon$ であるような n'_0 が存在することを意味する．

多価関数の近似的な不動点（approximate fixed point）は次のように定義される．

定義 1（多価関数の近似的な不動点）．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

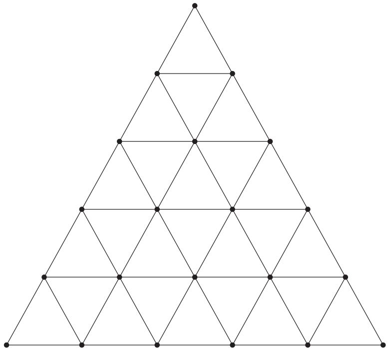
$$|x^* - F(x^*)| < \varepsilon,$$

すなわち「ある $y^* \in F(x^*)$ に対して $|x^* - y^*| < \varepsilon$」が成り立つとき，$x^*$ は Δ からその空でない部分集合の集合への多価関数 F の近似的な不動点である．x^* は ε に依存する．

以上の準備のもとで次の定理を構成的に証明する．

定理 1（近似的な角谷の不動点定理）．n 次元単体からその空でない部分集合の集合へのコンパクトかつ凸値で一様に閉グラフを持つ多価関数は近似的な不動点を持つ．

証明　Δ を n 次元単体とする．Δ の m 次の分割を考える．2 次元の場合の分割が**第 1 図**に表わされている．2 次元単体（三角形）の各辺を m 等分し，各



第１図　2次元単体の分割

辺に平行に線を引くことによって分割する．そうすると2次元単体はm^2個の小さい単体に分割される．3次元の場合にはΔは四面体であり，その各面は2次元単体なので上で述べたようにm^2個の三角形に分割される．その上でΔの面に平行に面を描くと，3次元単体はm^3個の小さな四面体に分割される．以下，より高い次元についても同様である．

Δの十分に細かい分割を考え，一様連続な関数$f^m: \Delta \to \Delta$を次のように定義する．

> f^mが一様連続であるとは，任意の$\varepsilon > 0$に対して$|x-y| < \delta$のときに$|f^m(x)-f^m(y)| < \varepsilon$となるように$\delta > 0$を選ぶことができるということである．

xが，m次分割されてできたΔの単体の頂点ならば，ある$y \in F(x)$について$f^m(x)=y$とし，それ以外の$x \in \Delta$については各単体の頂点，$x_0^m, x_1^m, \cdots, x_n^m$における$f^m$の値の凸結合によって$f^m(x)$を定義する．

$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$，$i \geqq 0$とすると

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i^m \quad \text{として} \quad f^m(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^m(x_i^m)$$

である．f^mは明らかに一様連続であるからDalen［4］，Veldman［6］によって

近似的な不動点を持つ．その一つを x^* とすると任意の $\varepsilon > 0$ について

$$|x^* - f^m(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $x^* \in X$ が存在する．Sperner の補題と近似的な Brouwer の不動点定理の証明は本稿の付録を参照していただきたい．そこでの後者の証明は Dalen［4］の証明を整理したものである．

Δ の分割の列 $(\Delta_m)_{m\geq 1}$ を考え，分割によって作られる小単体の頂点間の距離の列（$(|x_i^m - x_j^m|)_{m\geq 1}, i \neq j$）について $|x_i^m - x_j^m| \to 0$ であるとする．F が一様に閉グラフを持つことにより，任意の $y_i^m \in F(x_i^m)$ と，ある $y_j^m \in F(x_j^m)$ について $|y_i^m - y_j^m| \to 0$ であり，かつ任意の $y_j^m \in F(x_j^m)$ と，ある $y_i^m \in F(x_i^m)$ について $|y_i^m - y_j^m| \to 0$ である．そのとき任意の ε について $m \geq M$ を満たす m に対して $|y_i^m - y_j^m| < \varepsilon$ が成り立つような M が存在する．$x^* = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i^m$ と表せるので，任意の $y_i \in F(x_i^m)$ について，ある $y_i^* \in F(x^*)$ があって $|y_i - y_i^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．i によって，すなわち x_i^m によって y_i^* は異なるかもしれないが，$F(x^*)$ が凸であることによって

$$y^* = \sum_{i=0}^n \lambda_i y_i^* \in F(x^*)$$

が成り立つ．各 i について $|y_i - y_i^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ であり，

$$f^m(x^*) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f^m(x_i^m) = \sum_{i=0}^n \lambda_i y_i$$

であるから $|f^m(x^*) - y^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ である．$|x^* - f^m(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$ なので $|x^* - y^*| < \varepsilon$ が得られる．$y^* \in F(x^*)$ であるから，x^* は F の近似的な不動点である．　□

3　近似的なミニ・マックス定理

この節では近似的な角谷の不動点定理によって二人ゼロ・サムゲームの近似的なミニ・マックス定理を構成的に導く．二人のプレイヤー A，B がおり，

プレイヤーAは m 個の純粋戦略からなる選択肢を持ち，プレイヤーBは n 個の純粋戦略からなる選択肢を持つ．Aの純粋戦略の集合を $S_A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，Bの純粋戦略の集合を $S_B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ で表す．二人の戦略の組が (a_i, b_j)（左がプレイヤーAの戦略）であるときのAの利得を $M(a_i, b_j)$ とする．ゼロ・サムゲームを考えているのでBの利得は $-M(a_i, b_j)$ に等しい．p_i をAが戦略 a_i を選ぶ確率，q_j をBが戦略 b_j を選ぶ確率とする．プレイヤーAの混合戦略は S_A 上の確率分布であり，$x=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ で表す．$\sum_{i=1}^m p_i=1$ である．同様にBの混合戦略は S_B 上の確率分布であり，$y=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ で表す．$\sum_{j=1}^n q_j=1$ である．二人の混合戦略の組 (x, y) は**プロフィール**と呼ばれる．プロフィール (x, y) におけるAの期待利得は

$$M(x, y)=\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i M(a_i, b_j) q_j$$

となる．$M(a_i, b_j)$ は有限であると仮定する．そうすると，$M(x, y)$ は戦略の集合上の確率分布について線形であるから一様連続な関数である．プレイヤーAが純粋戦略 a_i を選び，プレイヤーBが混合戦略 y を選んだときのAの期待利得は $M(a_i, y)=\sum_{j=1}^n M(a_i, b_j)q_j$ であり，プレイヤーAが混合戦略 x を選び，プレイヤーBが純粋戦略 b_j を選んだときのAの期待利得は $M(x, b_j)=\sum_{i=1}^m p_i M(a_i, b_j)$ である．Aのすべての混合戦略の集合を P で，Bのすべての混合戦略の集合を Q で表す．P は $m-1$ 次元単体，Q は $n-1$ 次元の単体である．x に対するプレイヤーAの保証利得を $v_A(x)=\inf_y M(x, y)$ によって定義する．「inf」は下限（infimum）を表す[3]．さらに v_A^* を次のように定義する．

$$v_A^*=\sup_x \inf_y M(x, y).$$

3） 構成的数学ではコンパクト集合上の一様連続関数の最小値（minimum）の存在を一般的には証明できない．それに代わって下限(inmum)の存在は証明できる．z を $M(x, y)$ の下限とすると，z は次の条件を満たす．

すべての (x, y) に対して，$z \leqq M(x, y)$ であり，かつ任意の $\varepsilon>0$，ある (x, y) について $z> M(x, y)-\varepsilon$ である。

「sup」は上限（supremum）を表す[4]．

同様に y に対するプレイヤー B の保証利得を $v_B(y)=\sup_x M(x,y)$ によって定義し，さらに v_B^* を次のように定義する．

$$v_B^*=\sup_x \inf_y M(x,y).$$

与えられた x について，すべての y に対して $\inf_y M(x,y) \leqq M(x,y)$ であるから

$$\text{すべての } y \text{ について } \sup_x \inf_y M(x,y) \leqq \sup_x M(x,y)$$

である．したがって $\sup_x \inf_y M(x,y) \leqq \inf_y \sup_x M(x,y)$ を得る．この関係は次のように書き直される．

$$v_A^* \leqq v_B^*. \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$ として次の二つの集合を定義する．

$$\Gamma_A(y)=\{x \in P \mid \text{すべての } x' \in P \text{ について } M(x,y) > M(x',y)-\varepsilon\},$$

$$\Gamma_B(x)=\{y \in Q \mid \text{すべての } y' \in Q \text{ について } M(x,y) < M(x,y')+\varepsilon\}.$$

さらに $P\times Q$ から $P\times Q$ の空でない部分集合の集合への多価関数を次の式で定義する．

$$\Theta(x,y)=(\Gamma_A(y),\ \Gamma_B(x)).$$

この多価関数が近似的な角谷の不動点定理の条件を満たすことを確認しよう．

1. $P\times Q$ は二つの単体の積集合であるからコンパクトかつ凸である．また，$P\times Q$ は $m+n-2$ 個の独立なベクトルを含むので $m+n-2$ 次元単体と同相（homeomorphic）である．
2. $\Theta(x,y)$ は $P\times Q$ から $P\times Q$ の空でない部分集合の集合への多価関数である．
3. $\Theta(x,y)$ の凸性を示す．$\Gamma_A(y)$ が凸であることを示せば十分である．

4） 構成的数学ではコンパクト集合上の一様連続関数の最大値（maximum）の存在を一般的には証明できない．それに代わって上限（supremum）の存在は証明できる．z を $\inf_y M(x,y)$ の上限とすると，z は次の条件を満たす．
すべての (x,y) に対して，$z \geqq \inf_y M(x,y)$ であり，かつ任意の $\varepsilon>0$，ある (x,y) について $z < \inf_y M(x,y)+\varepsilon$ である。

$x^1 \in \Gamma_A(y)$，$x^2 \in \Gamma_A(y)$ と仮定すると

すべての $x' \in P$ に対して $M(x^1, \mathrm{y}) > M(x', y) - \varepsilon$,

すべての $x' \in P$ に対して $M(x^2, \mathrm{y}) > M(x', y) - \varepsilon$

が成り立つ．$M(x, y)$ はプレイヤーの純粋戦略の集合上の確率分布について線形であるから，$0 \leqq \lambda \leqq 1$ として

すべての $x' \in P$ に対して

$$\lambda M(x^1, y) + (1-\lambda) M(x^2, y) = M(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, y) > M(x', y) - \varepsilon$$

を得る．したがって $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \Gamma_A(y)$ となるから $\Gamma_A(y)$ は凸である．$\Gamma_B(x)$ の凸性も同様に証明される．

4. 次に，Θが一様に閉グラフを持つことを示す．点列 $(y_n)_{n \geq 1}$，$(y'_n)_{n \geq 1}$，$(x_n)_{n \geq 1}$，$(x'_n)_{n \geq 1}$ をとり，$x_n \in \Gamma_A(y_n)$，$x'_n \in \Gamma_A(y'_n)$，$|y_n - y'_n| \to 0$ であるとする．$M(x, y)$ の一様連続性により $|y_n - y'_n| \to 0$ のとき，$|M(x_n, y_n) - M(x_n, y'_n)| \to 0$，$|M(x'_n, y'_n) - M(x'_n, y_n)| \to 0$ である．$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots\cdots > \varepsilon_m \to 0$ を満たす数列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ をとると $n \geq N$ のときに

$$M(x_n, y'_n) > M(x_n, y_n) - \varepsilon_n, M(x'_n, y_n) > M(x'_n, y'_n) - \varepsilon_n$$

が成り立つような N が存在する．一方 Γ_A の定義により

$$M(x'_n, y'_n) \geq M(x_n, y'_n) - \varepsilon_n$$

であるから

$$M(x'_n, y_n) > M(x_n, y_n) - 3\varepsilon_n$$

が得られる．$\varepsilon_n \to 0$ のとき $|M(x'_n, y_n) - M(x_n, y_n)| \to 0$ であるから十分大きな n について $x'_n \in \Gamma_A(y_n)$ となり，ある $\bar{x} \in \Gamma_A(y_n)$ について $|x'_n - \bar{x}| \to 0$ が成り立つので，Γ_A は一様に閉グラフを持つ．

同様に $M(x, y)$ の一様連続性により $|x_n - x'_n| \to 0$ のとき，$|M(x_n, y_n) - M(x'_n, y_n)| \to 0$，$|M(x_n, y'_n) - M(x'_n, y'_n)| \to 0$ であるから，$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots\cdots > \varepsilon_{\mathrm{m}} \to 0$ を満たす数列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ に対して $n \geq N'$ のときに

$$M(x'_n, y_n) < M(x_n, y_n) + \varepsilon_n, M(x_n, y'_n) < M(x'_n, y'_n) + \varepsilon_n$$

が成り立つような N' が存在する．一方 Γ_B の定義により

$$M(x'_n, y'_n) \leq M(x'_n, y_n) + \varepsilon_n$$

であるから

$$M(x_n, y'_n) < M(x_n, y_n) + 3\varepsilon_n$$

が得られる．$\varepsilon_n \to 0$ のとき $|M(x_n, y'_n) - M(x_n, y_n)| \to 0$ であるから十分大きな n について $y'_n \in \Gamma_B(x_n)$ となり，ある $\tilde{y} \in \Gamma_B(x_n)$ について $|y'_n - \tilde{y}| \to 0$ が成り立つので，Γ_B は一様に閉グラフを持つ．

したがって Θ は一様に閉グラフを持つ．

以上によって $\Theta\ (x, y)$ は近似的な角谷の不動点定理の条件を満たしているから，近似的な不動点を持つ．その一つを $(\tilde{x}, \tilde{y})$ とすると，任意の $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ について

すべての (x', y') について $M(x', \tilde{y}) - \dfrac{\varepsilon}{2} < M(\tilde{x}, \tilde{y}) < M(x, y') + \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．これは次のことを意味する．

$$\sup_x M(x, \tilde{y}) - \frac{\varepsilon}{2} < M(\tilde{x}, \tilde{y}) < \inf_y M(\tilde{x}, y) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

ここで

$$\sup_x M(x, \tilde{y}) \geqq \inf_y \sup_x M(x, y) = v_B^*,$$

$$\inf_y M(\tilde{x}, y) \leqq \sup_x \inf_y M(x, y) = v_A^*$$

なので (2) より

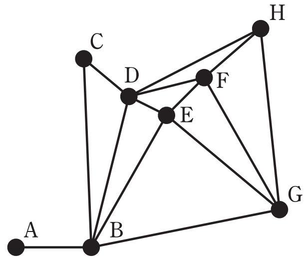
$$v_B^* - \frac{\varepsilon}{2} < M(\tilde{x}, \tilde{y}) < v_A^* + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

を得る．(1)，(3) から

$$|v_A^* - v_B^*| < \varepsilon$$

が導かれる．この v_A^* または v_B^* が**ゲームの値**である．v_A^*，v_B^* は $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ によって近似される．議論をまとめると

定理 2. 二人ゼロ・サムゲームの値は ε の範囲で決定され，それは $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ によって近似される．



第２図　グラフの例

よって近似的なミニ・マックス定理が成り立ち，近似的にゲームの値を実現する戦略の組を構成的に求めることができる．

付　録

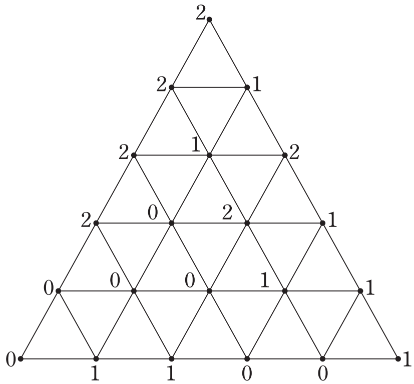
田中靖人［7］でも Sperner の補題を証明したが，ここでは別の証明を紹介する．まずグラフ理論と呼ばれる理論のごく簡単な結果を示す．

点および 2 点間を結ぶ辺の集合をグラフ（多価関数のグラフとは意味が異なる）と呼ぶ．**第２図**がグラフの例である．辺は線分ではなく曲線でもよい．ある点から出ている辺の数をその点の次数と呼ぶと次の補題が得られる．

補題１（握手補題（Handshaking lemma））．任意のグラフにおいて次数が奇数であるような点の個数は偶数である．

証明． 各辺は 2 点間を結ぶものであるからすべての点の次数を合計すると，各辺を二度ずつ数えることになるので偶数である．次数が偶数の点の個数が奇数でも偶数でもそれらの次数の和は偶数であるから，すべての点の次数の和が偶数であるためには次数が奇数であるような点の個数は偶数でなければならない．

「握手補題」と呼ぶのは以下のような理由による．グラフの点を人，辺を二人の人が握手をする関係を表すものとする．したがって各点の次数はその点



第３図　三角形の分割と頂点の番号づけ

が表す人が何人の人と握手をするかを意味する．握手は必ず二人でするものであるから各人の次数，すなわち握手をする相手の数を合計すると偶数になる．偶数の相手と握手をする人の数が奇数でも偶数でもそれらの次数の和は偶数である．したがって握手をする相手の数の合計が偶数となるためには奇数の相手と握手をする人の数は偶数でなければならない．　□

これを用いて Sperner の補題を証明する．[7] では単体の重心をとり，頂点と重心を結ぶ線分によって単体を分割していったが（重心分割），ここでは単体の面（2 次元単体，すなわち三角形の場合には辺）に平行な面（2 次元の場合は線）を描くことによって単体を分割する．三角形の例を**第３図**に示してある．各方向に 4 本の線を引いて三角形を分割している．重心分割では分割してできた小さな単体（小単体）の重心をとってさらに分割を繰り返すことによってより細かい分割を得たが，ここでは単体の面に平行に描く面の数を増やすことによってより細かく分割する．n 次元単体 Δ を上記の方法で分割して作った n 次元小単体の集合を K とする．K の各頂点に対して以下のルールに基づいて 0 から n までの番号をつける．

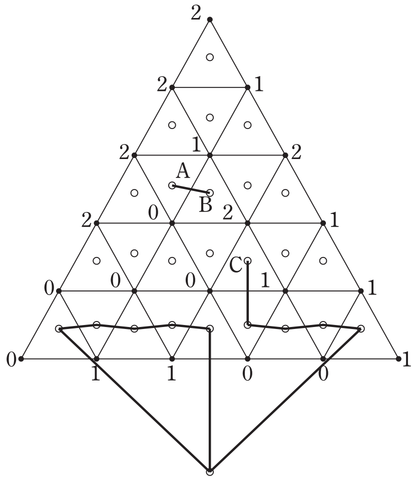
1. Δの頂点（$n+1$個ある）については0からnまでの番号を各頂点につける．(1, 0, ⋯, 0) は0，(0, 1, 0, ⋯, 0) は1，⋯⋯ (0, ⋯, 0, 1) はnというように番号づけをする．つまり第k番目の座標が1で他がすべて0の点に$k-1$という番号をつける．
2. Kのある頂点vがΔのある$n-1$次元面（Δに含まれる$n-1$次元単体，Δが四面体なら三角形，三角形なら辺）に含まれている場合には，その面の頂点（Δの頂点でもある）のいずれかと同じ番号をvにつける（vはΔの面の頂点であるとは限らず，Δを分割してできた単体の頂点の内でΔの面に含まれるものであるかもしれない）．
3. Kのある頂点vがΔのある$n-2$次元単体（Δが四面体なら辺）に含まれている場合には，その単体の頂点のいずれかと同じ番号をvにつける．
4. 以下同様．Δの内部の点には0からnまでのいずれかの番号をつける．

第3図には番号づけの例も示してある．

補題２（Sperner の補題）．Kの頂点に上記の番号づけのルールによって番号をつけるとき，Kのn次元単体の中で各頂点にちょうど0からnまでの番号がつけられるものの個数は奇数である．

証明． Δの次元に関する数学的帰納法で証明する．まず$n=0$の場合は番号は0だけしかなく，それ以上分割できない0次元単体（点）が一つしかないので補題が成り立つのは明らかである．

$n=1$の場合は線分であるが，両端の点にそれぞれ0と1の番号がつけられ，その線分を分割してできた点には0か1のいずれかの番号がつけられている．0の番号がついた端の点から出発して進んで行くと最後の点が1であるから奇数回番号が変わらなければならない．偶数回ならもとの0に戻ってしまう．番号が変わったところで両端が0と1の番号を持った小さい線分（1次元小単体）が現れるから，その個数は奇数個である．



第 4 図　Sperner の補題

これをもとに 2 次元の場合を考える．上で説明したように三角形を分割してあるものとする．もとの単体 Δ の両端の番号が 0 と 1 である辺をとる．第 3 図では底辺である．1 次元の場合の結果からこの辺を分割してできた線分で 0 と 1 の番号を持つものは奇数個ある．この辺の下（三角形の外）に点を一つとり，分割してできた各三角形（小単体）の中に一つずつ点をとる．二つの点が 0 と 1 の番号を持つ辺をはさんで向かい合っているときにこれらの 2 点を結ぶ辺を描き，そうでない場合には結ばないとすると**第 4 図**に描かれたグラフが得られる．白い丸がグラフの点，太い線がグラフの辺である．0 と 1 の番号を持つ Δ の辺に含まれる 0 と 1 の番号を持つ K の三角形の辺は奇数個であるから，三角形の外側の点から引かれる辺の数は奇数であり，この点は奇数の次数を持つ．握手補題によって次数が奇数であるようなグラフの点は偶数個あるから三角形に含まれるグラフの点の中に少なくとも一つ奇数の次数を持つ点がある．グラフの点は K の三角形の中にあるのでその三角形が両端の番号が 0 と 1 であるような辺を一つ持てばその点の次数は 1, 二つ持てば 2,

一つも持たなければ0である．三つ持つことはない．ある点の次数が奇数であればそれは1でなければならず，そのときその点が含まれる三角形の頂点の番号は0，1，2である．第4図の点A，B，Cを含む三角形が0，1，2と番号づけされた頂点を持つ三角形であり，これらの点の次数は1である．

3次元以上の場合も同様にして証明される．$n-1$以下の次元について補題が成り立つと仮定する．n次元単体Δの0から$n-1$までの番号を持つ頂点からなる面をとる．この面に含まれるKの$n-1$次元小単体で0から$n-1$までの番号を持つものは奇数個ある．この面の外側に点を一つとり，分割してできた各n次元小単体の中に一つずつ点をとる．二つの点が0から$n-1$までの番号を持つ面をはさんで向かい合っているときにこれらの2点を結ぶ辺を描き，そうでない場合には結ばないとすると一つのグラフが得られる．0から$n-1$までの番号を持つΔの面に含まれる0から$n-1$までの番号を持つKの$n-1$次元小単体は奇数個であるから，Δの外側の点から引かれる辺の数は奇数であり，この点は奇数の次数を持つ．握手補題によって次数が奇数であるようなグラフの点は偶数個あるからΔに含まれるグラフの点の中に少なくとも一つ奇数の次数を持つ点がある．グラフの点はKのn次元小単体の中にあるのでその小単体が各頂点の番号が0から$n-1$までであるような面を一つ持てばその点の次数は1，二つ持てば2，一つも持たなければ0である．三つ以上持つことはない．ある点の次数が奇数であればそれは1でなければならず，そのときその点が含まれる小単体は0からnまで番号づけされた頂点を持つ．

> 0から$n-1$までの番号がつけられた$n-1$次元単体の面を持つn次元単体のもう一つの頂点の番号がnであれば0から$n-1$までの番号を持つ面は一つ，n以外ならば二つある．

以上で証明が終わった． □

この補題を用いて近似的な Brouwer の不動点定理を証明する．

定理３（近似的な Brouwer の不動点定理）．n 次元単体 Δ からそれ自身への一様連続な関数 f は近似的な不動点を持つ．

証明. 証明を二段階に分ける．

1. f の定義域・値域となる n 次元単体 Δ を Sperner の補題の条件を満たすように分割できることを示す．Δ をその各 $n-1$ 次元面に平行な面を描くことによって分割する．分割してできた各小単体の頂点に番号をつけるが，問題は Δ の各次元の面に含まれる頂点につけられる番号である．分割してできた小単体の集合を K とし，K に含まれる小単体の頂点 x の座標を $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ と表して次のような基準で番号をつける．

$$p_k > f_k \text{ または } p_k + \tau > f_k \text{ のとき } x \text{ に番号 } k \text{ をつける．}$$

τ は任意の正の数（任意に小さくできる正の数）である．条件を満たす k が複数あれば，ランダムに番号をつけるのではなく都合のよいように，すなわち Sperner の補題の条件を満たすように選んでつけることができるものとする．Δ の $n-1$ 次元面に含まれる点で $i=0, 1, 2, \cdots, n$ の内のある i について $p_i = 0$（座標の第 i 成分が 0）であるような点を考える．$\tau > 0$ とすると $f_i > 0$ または $f_i < \tau$ である．

［注］　構成的数学は排中律（law of excluded middle）を認めない．排中律とは「ある命題 P が成り立つか，成り立たないかのいずれかである」ということだが，成り立つのなら成り立つでそのことをはっきりさせなければならないというのである．したがって証明において背理法は使えない．それによって構成的数学では任意の実数 x について「$x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ のいずれかが成り立つ」とか，「$x \geqq 0$ または $x \leqq 0$」であるとか，「$x > 0$ または $x \leqq 0$」であるとかは証明できない．したがってそれらの原理に基づいた場合分け

も使えない．しかし，x, y, z をそれぞれ実数として「$x > y$ ならば $x > z$ かまたは $z > y$ のいずれかが成り立つ」ということは言えるので，それに基づいた場合分けは可能である．

$f_i > 0$ のときには $\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$，$\sum_{j=0}^{n} f_j = 1$ かつ $p_i = 0$ より

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{n} p_j > \sum_{j=0, j \neq i}^{n} f_j$$

となり，少なくとも一つの j（それを k で表す）について $p_k > f_k$ が成り立つ．そのとき点 x に番号 k をつける（k は $p_k > f_k$ を満たす k の内の一つ）．$f_i > p_i$ なので i はその条件を満たさない．$f_i < \tau$ のときには，$p_i = 0$ なので $\sum_{j=0, j \neq i}^{n} p_j = 1$ であり，$\sum_{j=0, j \neq i}^{n} f_j \leqq 1$ であるから

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{n} p_j \geqq \sum_{j=0, j \neq i}^{n} f_j$$

が成り立つ．このとき任意の $\tau > 0$ について

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{n} (p_j + \tau) > \sum_{j=0, j \neq i}^{n} f_j$$

となるから $p_j + \tau > f_j$ を満たす $j (\neq i)$ が少なくとも一つある（それを k で表す）ので点 x に番号 k をつける（k は i 以外で $p_k + \tau > f_k$ を満たす k の内の一つ）．i もこの条件を満たすが，i 以外にも条件を満たすものがあるのでそれを選ぶことができる．以上によって $p_i = 0$ である $n-1$ 次元面の頂点に i 以外の番号をつけることができる．同様にして $n-2$ 次元以下の面においていくつか複数の i について $p_i = 0$ であるような面に含まれる頂点にそれらの i 以外の番号をつけることができる．

$p_i = p_{i+1} = 0$ の場合を考えてみよう．上の議論と同様にして $f_i > 0$ または $f_{i+1} > 0$ の場合は

$$\sum_{j=0, j \neq i, i+1}^{n} p_j > \sum_{j=0, j \neq i, i+1}^{n} f_j$$

が，$f_i < \tau$ かつ $f_{i+1} < \tau$ の場合には

$$\sum_{j=0, j \neq i, i+1}^{n} p_j \geqq \sum_{j=0, j \neq i, i+1}^{n} f_j$$

が得られる．

p_n 以外のすべての i について $p_i=0$ である場合を考えよう．いずれかの i について $f_i > 0$ のとき $p_n > f_n$ となるから点 x に番号 n をつける．n 以外のすべての j について $f_j < \tau$ であるとすると $p_n \geqq f_n$ が得られるが，これは $p_n + \tau > f_n$ を意味するので番号 n をつけることができる．

したがって Sperner の補題の条件が満たされるので分割してできた n 次元単体の中には少なくとも一つ，0 から n までのすべての番号を持つものがある．

2. 十分に細かく n 次元単体を分割し，小単体の各頂点間の距離も十分小さくなっているものとする．0 から n までの番号を持つ n 次元小単体の各頂点を $p_0, p_1, \cdots, p_n$ とする．それぞれ 0 から n までの番号を持つように選ぶ．f によって移される点は $f(p^0), f(p^1), \cdots, f(p^n)$ と表される．f の一様連続性により $f(p^0)$，$f(p^1)$ の間の距離 ($|f(p^0)-f(p^1)|$) が ε 以内となるという条件を満たすときに p^0，p^1 の間の距離 ($|p^0-p^1|$ が δ 以内となるような δ をとることができるが，δ を $\delta < \varepsilon$ を満たすように十分小さくとっているものとする[5)]．p^0 について考えてみよう．$\tau > 0$ として番号づけの規則により $p^0_0 + \tau > f(p^0)_0$ が成り立つ．p^0_0 および $f(p^0)_0$ はそれぞれ p^0，$f(p^0)$ の第 0 成分である（以下同様）．p^1 については番号づけの規則により $p^1_1 + \tau > f(p^1)_1$ が成り立っている．f の一様連続性により $|p^0-p^1| < \delta$ であれば $|f(p^0)-f(p^1)| < \varepsilon$ が満たされる．これは $|f(p^0)_1 - f(p^1)_1| < \varepsilon$ を意味する．$|p^0-p^1| < \delta$ より $|p^1_1 - p^0_1| < \delta$ であるから

5)　例えば δ，$\varepsilon < 1$ として $|p^0-p^1| < \delta$ のときに $|f(p^0)-f(p^1)| < \varepsilon$ であれば $|p^0-p^1| < \delta\varepsilon$ のときにも $|f(p^0)-f(p^1)| < \varepsilon$ である．

$$p_1^0 > p_1^1 - \delta,\ p_1^1 > f(p^1)_1 - \tau,\ f(p^1)_1 > f(p^0)_1 - \varepsilon$$

より

$$p_1^0 > f(p^0)_1 - \delta - \varepsilon - \tau > f(p^0)_1 - 2\varepsilon - \tau$$

が得られる．同様の議論によって 0 以外の各 i について

$$p_i^0 > f(p^0)_i - 2\varepsilon - \tau \tag{4}$$

を得る．$i=0$ については $p_0^0 + \tau > f(p^0)_0$，すなわち

$$p_0^0 > f(p^0)_0 - \tau \tag{5}$$

であった．(4) と (5) を 0 以外のある i (k で表す) を除いて足し合わせると次の式が得られる．

$$\sum_{j=0, j\neq k}^{n} p_j^0 > \sum_{j=0, j\neq k}^{n} f(p^0)_{\mathrm{j}} - 2(n-1)\varepsilon - n\tau.$$

ここで $\sum_{j=0}^{n} p_j^0 = 1$，$\sum_{j=0}^{n} f(p^0)_j = 1$ であるから $1 - p_k^0 > 1 - f(p^0)_k - 2(n-1)\varepsilon - n\tau$ より

$$p_k^0 < f(p^0)_k + 2(n-1)\varepsilon + n\tau$$

が得られる．(4) より $p_k^0 > f(p^0)_k - 2\varepsilon - \tau$ であるから

$$f(p^0)_k - 2\varepsilon - \tau < p_k^0 < f(p^0)_k + 2(n-1)\varepsilon + n\tau$$

となる．したがって

$$|p_k^0 - f(p^0)_k| < 2(n-1)\varepsilon + n\tau \tag{6}$$

が成り立つ. 一方 (4) を 1 から n まで足し合わせると次の式が得られる.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^0 > \sum_{j=1}^{n} f(p^0)_j - 2n\varepsilon - n\tau.$$

これと (5) により

$$|p_0^0 - f(p^0)_0| < 2n\varepsilon + n\tau \tag{7}$$

を得る．n は有限であり，ε および τ は任意に小さくできる数であるから $2n\varepsilon + n\tau$ もいくらでも小さくできる．さらにこれを $n+1$ 倍した値もいくらでも小さくできる．そこで $(n+1)(2n\varepsilon + n\tau)$ をあらためて ε とすれば

$$|p^0 - f(p^0)| < \varepsilon$$

が成り立つので p^0 は近似的な不動点である．以上の議論は 0 から n までの番号を持つ n 次元小単体の p^0 以外のすべての頂点について成り立つ． □

【参考文献】

［1］Bishop, E. and D. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer, 1985.

［2］Bridges, D. and F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, 1987.

［3］Bridges, D. and L. Vîţă, *Techniques of Constructive Mathematics*, Springer, 2006.

［4］van Dalen, D. "Brouwer's ε-fixed point from Sperner's lemma," *Theoretical Computer Science*, vol. 412, No. 28, pp. 3140–3144, http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2011.04.002, 2011.

［5］Kellogg, R. B., T. Y. Li and J. Yorke, "A constructive proof of Brouwer fixed-point theorem and computational results," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 13, pp. 473–483, 1976.

［6］Veldman, W. "Brouwer's approximate fixed point theorem is equivalent to Brouwer's fan theorem," in *Logicism, Intuitionism and Formalism*, edited by S. Lindström, E. Palmgren, K. Segerberg, and Stoltenberg-Hansen, Springer, 2009.

[7] 田中靖人「わかった気になる？一般均衡理論（ブラウワーの不動点定理の証明付き）」『経済学論叢』（同志社大学）第 59 巻，pp. 243–300，2007.

（たなか　やすひと・同志社大学経済学部）

The Doshisha University Economic Review Vol.64 No.3

Abstract

Yasuhito TANAKA, *A Constructive Proof of the Approximate Kakutani's Fixed Point Theorem and the Approximate Mini-Max Theorem*

In this study, using an approximate version of Brouwer's fixed point theorem, we constructively prove an approximate version of Kakutani's fixed point theorem for multi-functions (multi-valued functions or correspondences), according to Bishop-style constructive mathematics. We require that multi-functions have a uniformly closed graph. This condition is stronger than the condition of a closed graph. We will prove that if a multi-function from a compact metric space to the collection of its inhabited (nonempty) subsets is compact and convex-valued, and has a uniformly closed graph, then it has an approximate fixed point. An approximate fixed point is a point that approximately satisfies the conditions for a fixed point, rather than a point that is near an exact fixed point. We also apply this result to game theory and prove the approximate mini-max theorem for a two-person zero-sum game.