THE SCIENCE AND ENGINEERING REVIEW OF DOSHISHA UNIVERSITY, VOL. 54, No. 1 April 2013

A New Rule for Preventing the Cycling in the Network Simplex Algorithm

Sayaka YONEDA,* Sennosuke WATANABE** and Yoshihide WATANABE***

(Received January 20, 2013)

In the present paper, we focus on the minimum cost flow problem which is one of the well-known optimization problems on flow-networks. The minimum cost flow problem is the problem for finding the minimum cost flow which satisfies the given capacity conditions and the demand conditions. It is known to have wide applications to real fields. The network simplex algorithm is known as the most efficient algorithm for solving the minimum cost flow problem. This algorithm gives an optimal solution to the minimal cost flow problem by updating the so called tree structure, but it does not necessarily terminate in a finite number of steps, even for small networks. This infinite iteration is caused by the cycling of tree structure. It is known that the cycling in the network simplex algorithm can be prevented by maintaining a special type of the tree structure, that is called a strongly admissible tree structure. In the present paper, we give a new rule for updating the tree structure, by which the strongly admissible tree structure is maintained. We call this new rule, rule of the first blocking edge. This will play a key role in clarifying the mathematical structure of the cycling in the network simplex algorithm.

Key words ： minimum cost flow problem, network simplex algorithm, tree structure, cycling

キーワード ： 最小費用流問題，ネットワークシンプレックス法，木構造，巡回

ネットワークシンプレックス法における巡回を防ぐ方法

米 田 彩 香・渡 辺 扇 之 介・渡 邊 芳 英

1. はじめに

近年，組み合わせ最適化問題に注目が集まり，その数学的構造が明らかにされ，より良いアルゴリズムの改良，さらに新しいアルゴリズムの開発がなされてきた．その中でも特にグラフ上のネットワークにおける最適化問題の研究は進んでいる [1, 2, 3]．道路網，鉄道網などの交通網や，電話回線やインターネット回線などの通信網などを数学的に捉えるために，グラフとそのグラフ上のネットワークが使われる．本研究で対象とする最適化問題は，このようなグラフ上のネットワークにおける最適化問題のなかで，最も代表的な最小費用流問題である．最小費用流問題とは，与えられた各辺に対する容量制約と，頂点に関する需要条件を満たす流れ (フロー) のなかで，そのコストが最小となるフローを求める問題である．最小費用流問題の一番効率的と言われている解法アルゴリズムとして，ネットワークシンプレックス法がある．ネットワークシン

* Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone:+81-774-65-6302, E-mail:dum0924@mail4.doshisha.ac.jp
** Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University
*** Department of Mathematical Science, Doshisha University

プレックス法とは木構造と呼ばれるものを更新していくアルゴリズムであるが，単純な更新方法では，何回か更新しているうちに元の木解に戻り，最適解に達することなく同じ木解に戻ってしまう，巡回という現象が頻繁に起こる．ネットワークシンプレックス法において，たとえ小さいネットワークを扱うとしても，この巡回という現象が頻繁に起きる．従って，この巡回を防ぐための方法を考えることが重要になる．本論文では，ネットワークシンプレックス法における巡回を防ぐための新しい規則を与える．この新しい規則は，アルゴリズムにおける巡回現象の数学的構造を明らかにする，今までにないアプローチとなる．

2.　最小費用流問題

ネットワーク上の最適化問題である最小費用流問題について述べる．頂点集合 V と辺集合 E からなる有向グラフ $G=(V,E)$ を考える．任意の辺 e は頂点の順序対 (v_i,v_j) で決まり，v_i を始点，v_j を終点と呼び，それぞれ $v_i=e^-$，$v_j=e^+$ と表す．有向グラフ G の辺上には関数 $b:E\to\mathbb{R}_0^+$ (0 を含む 0 以上の実数)，$c:E\to\mathbb{R}_0^+$，$\gamma:E\to\mathbb{R}$ が与えられているとする．$b(e)$，$c(e)$，$\gamma(e)$ はそれぞれ辺 e の下限容量，上限容量，コストと呼ばれる．また $b(e)$ と $c(e)$ については $b(e)\le c(e)$ が成り立っている．また，有向グラフ G の頂点上には $d(v)$ の総和が 0 となるような関数 $d:V\to\mathbb{R}$ が与えられており，$d(v)>0$ の頂点を需要点，$d(v)<0$ の頂点を供給点，$d(v)=0$ を移送点という．そのとき，$\mathcal{N}=(G,b,c,d)$ をフローネットワークと呼ぶ．ここで以下の条件 (i) と (ii) を満たす $u:E\to\mathbb{R}_0^+$ を認容フローという:

(i) $b(e)\le u(e)\le c(e)\quad$ for all $e\in E$

(ii) $\displaystyle\sum_{e^+=v}u(e)-\sum_{e^-=v}u(e)=d(v)\quad$ for all $v\in V.$

条件 (i) は容量制約条件と呼ばれ，フローの値は各辺に与えられた下限容量以上であり，上限容量を超えないことを意味する．条件 (ii) は需要制約条件と呼ばれ，任意の頂点において，流入するフローの和と流出するフローの和の差は需要関数となることを意味する．最小費用流問題とは，条件 (i) と (ii) を満たす認容フロー u の中でそのコスト

$$\gamma(u)=\sum_{e\in E}\gamma(e)u(e)$$

が最小となる u を求める問題である．

3.　木構造

有向グラフ $G=(V,E)$ 上の最小費用流問題 P を考える．連結であって閉路を含まない G の部分グラフ G' の辺集合 T を木といい，G' の頂点集合が G の頂点集合と一致するとき，T をグラフ G の全域木と呼ぶ．最小費用流問題 P の認容フロー u が P における全域木 T に関する木解であるとは，$e\notin T$ に対して，$u(e)=b(e)$ または $u(e)=c(e)$ となることである．また，$b(e)<u(e)<c(e)$ を満たす辺 e を u に関する自由辺と呼ぶことにすれば，u が P において，ある全域木 T に関する木解であるための必要十分条件は，すべての自由辺が全域木 T に含まれることである．ただし，T のすべての辺が自由辺である必要はないことに注意する．u を P における木解とし，T を G におけるすべての自由辺を含む全域木とすると，辺集合 $E\setminus T$ は $u(e)=b(e)$ を満たす辺集合 L と，$u(e)=c(e)$ を満たす辺集合 U によって $E\setminus T=L\sqcup U$ と書ける．このとき，(T,L,U) を木解 u に付随する木構造という．最小費用流問題 P が認容フローを持つならば，P は木解であって，最適解になるものが存在することが知られている [1, 2]．最小費用流問題を解く有名なアルゴリズムであるネットワークシンプレックス法は，木解 u に付随する木構造を変更して最適解を求めるアルゴリズムである．

木構造の更新にあたって，最適性の判定が必要だが，その判定には次に説明する変形コストを用いる．有向グラフ G の頂点上にポテンシャルと呼ばれる関数 $\pi:V\to\mathbb{R}$ を与える．ポテンシャル π によって変形されるコスト関数 $\gamma_\pi:E\to\mathbb{R}$ を次のように定義する:

$$\gamma_\pi(e)=\gamma(e)+\pi(u)-\pi(v)\quad\text{for } e=(u,v)\in E.$$

このとき変形したコスト γ_π によるフロー u のコスト $\gamma_\pi(u)$ と，元のコストによるフロー u のコスト $\gamma(u)$ の差は

$$\gamma_\pi(u) = \gamma(u) - \sum_{v\in V} \pi(v)d(v)$$

よりフロー u によらない定数である．従って $\gamma_\pi(u)$ で最適性の判定を行うことが可能である．

定理 1. [1] 最小費用流問題 P における木解 u に付随する認容木構造 (T, L, U) が最適であるための必要十分条件は，あるポテンシャル $\pi : V \to \mathbb{R}$ が存在して，変形コスト $\gamma_\pi(e)$ が以下を満たすことである:

$$\gamma_\pi(e) \begin{cases} = 0 & \text{for all } e \in T, \\ \geq 0 & \text{for all } e \in L, \\ \leq 0 & \text{for all } e \in U. \end{cases} \tag{1}$$

最適性の条件 (1) を満たすポテンシャルは，全域木 T のすべての辺上の変形コストを 0 にするという特性を持っている．このポテンシャルは，1 つの頂点におけるポテンシャルの値を固定することで決めることができる．

補題 2. [1] 最小費用流問題において，(T, L, U) を木構造とする．ある頂点 $x \in V$ を固定したときに

$$\pi(x) = 0 \quad \text{and} \quad \gamma_\pi(e) = 0 \quad \text{for all } e \in T$$

を満たすポテンシャルが唯一つ存在する．

全域木 T のすべての辺上で変形コストが 0 となるように決めたポテンシャルを使い，L，U の辺の変形コストを計算することで認容木構造 (T, L, U) の最適性の判定をする．

4. 初期の認容木構造の構成

ネットワークシンプレックス法の説明を始めるにあたって，まず初期の認容木構造の説明が必要となる．そこで，最小費用流問題 P に新たに頂点 x を付け加えた頂点集合を V'，頂点 x とすべての頂点 v を結んだ辺を付け加えた辺集合を E' とし，$G' = (V', E')$ 上の補助の最小費用流問題 P' を以下で定義する．

Table 1 (The auxiliary problem P').

$V' = V \cup \{x\} \quad (\text{with } x \notin V)$
$d'(v) = d(v) \quad \text{for } v \in V; \quad d'(x) = 0$
$E' = E \cup \left\{ xv : -d(v) + \sum_{e^+=v} b(e) - \sum_{e^-=v} b(e) < 0 \right\}$ $\cup \left\{ vx : -d(v) + \sum_{e^+=v} b(e) - \sum_{e^-=v} b(e) \geq 0 \right\}$
$b'(e) = b(e) \quad \text{for } e \in E;$ $b'(xv) = 0 \quad \text{for } xv \in E';$ $b'(vx) = 0 \quad \text{for } vx \in E'$
$c'(e) = c(e) \quad \text{for } e \in E;$ $c'(xv) = d(v) - \sum_{e^+=v} b(e) + \sum_{e^-=v} b(e) + 1$ for $xv \in E'$; $c'(vx) = -d(v) + \sum_{e^+=v} b(e) - \sum_{e^-=v} b(e) + 1$ for $vx \in E'$
$\gamma'(e) = \gamma(e) \quad \text{for } e \in E;$ $\gamma'(xv) = M \quad \text{for } xv \in E';$ $\gamma'(vx) = M \quad \text{for } vx \in E',$ where $M := 1 + \frac{1}{2}\lvert V\rvert \max\{\lvert\gamma(e)\rvert : e \in E\}$

このとき，補助問題 P' において最適解 u が存在し，さらに以下のどちらかが成り立つ [1]．

- $xv \in E'$ に対して $u(xv) > 0$，または $vx \in E'$ に対して $u(vx) > 0$ となるとき，P において認容フローは存在しない．
- $xv \in E'$ に対して $u(xv) = 0$，または $vx \in E'$ に対して $u(vx) = 0$ となるとき，P' において認容フローが存在し，P における最適解も存在する．

5. ネットワークシンプレックス法

有向グラフ G 上の最小費用流問題を P とし，Table 1 によって与えられたデータを持つ補助問題を P' とする．

Step 1. 初期化

$T = E' \setminus E; \quad L = E; \quad U = \emptyset;$

$u(e) = b(e)$ for $e \in E$; and

$u(e) = c'(e) - 1$ for $e \in E' \setminus E$;

$\pi(x) = 0;$

$\pi(v) = M \quad \text{for } v \in V \text{ with } xv \in E'$; and
$\pi(v) = -M \quad \text{for } v \in V \text{ with } vx \in E'$.

Step 2. 木解 u に対する木構造 (T, L, U) において，$e \in L$ で $\gamma_\pi(e) \geq 0$，かつ $e \in U$ で $\gamma_\pi(e) \leq 0$ が成り立てば，木解 u は最適である．

Step 3. $e \in L \cup U$ において最適性の条件を満たさない辺，$e \in L$ で $\gamma_\pi(e) < 0$，または $e \in U$ で $\gamma_\pi(e) > 0$ を満たす辺 e が 1 つ以上あれば，その中の辺を 1 つ選び，全域木 T に付け加えることで唯一つのサイクル C ができる．

Step 4. $e \in L$ であれば，サイクル C の向きは，e の向きと同じ方向に向きづけ，$e \in U$ であれば，サイクル C の向きは e の向きと逆方向に向きづける．そのとき，上記で定めたサイクル C の向きに沿ってフローを追加することができる．増加可能な最小量を δ としたときに，δ だけフロー f を追加すると，サイクル C に含まれる少なくとも 1 つの辺が上限または下限容量のどちらかに達する．そのような辺を閉鎖辺と呼び，その 1 つを a とする．ここで $a = e$ は $\delta > 0$ のときのみ許される．

Step 5. 木構造 (T, L, U) を e と a によって次のように更新する．$T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{a\}$，$u(a) = b(e)$ のとき $L' = (L \setminus \{e\}) \cup \{a\}$，$u(a) = c(e)$ のとき $L' = L \setminus \{e\}$，そして $U' = E' \setminus (T \cup L)$ となり，この新たな木構造 (T', L', U') に付随したポテンシャル π を計算し，Step 2 に戻る．

6. ネットワークシンプレックス法の退化と巡回

次に，アルゴリズムの過程で行われている反復について考える．Step 3 で選ばれる辺 e を入辺，Step 4 で選ばれる辺 a を出辺という．最小費用流問題 P の木構造 (T, L, U) において，全域木 T に属する辺が全て自由辺でないとき，この木構造は退化しているという．この場合，Step 4 においてフローの増加ができない可能性がある．このようなステップを繰り返し行うと元の木解に戻ってしまうことがあり，このような現象を巡回と呼ぶ．過去の研究では，強認容木構造と呼ばれる特別な木構造を保てば巡回を防げることが知られており，強認容木構造は最終閉鎖辺選択規則と呼ばれる規則で保たれることも知られている [1]．しかし今回は最終閉鎖辺選択規則ではなく，新たな強認容木構造を保ち，巡回を防ぐことの出来る規則について述べる．

7. 第一閉鎖辺選択規則

ある頂点 x を固定し，その頂点を根とする全域木 T を考える．ネットワークシンプレックス法の Step 4 において，固定された頂点 x からサイクル C に含まれる頂点の中で最も近い頂点を向点と呼ぶ．第一閉鎖辺選択規則とは，サイクル C の向点から出発し，C の向きに沿って進み，最初の閉鎖辺を出辺 a として選択する規則である．

定義 3. ある頂点 x を固定し，木解 u に付随する木構造 (T, L, U) を考える．固定された頂点 x から T 内の任意の頂点 v への唯一つ存在する道が，木解 u に関する増加道 *(フローを増加することのできる道)* であるとき，木構造 (T, L, U) は強認容であるという．

定理 4. (T, L, U) を強認容木構造とする．アルゴリズムの過程で第一閉鎖辺選択規則を適応すると，更新された木構造も強認容木構造である．

証明. u を (T, L, U) に付随する木解とする．そして g をステップに従って更新した後の木解とする．T における x から v への道が増加道となるとき，$T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{a\}$ における x から v への道も増加道であることを示す．また，W を C の方向に沿って向点から第一閉鎖辺へ続く道とし，W' を C の逆方向の沿って向点から第一閉鎖辺へ続く道とする．

Case 1. v が C の向点とする．
x から v への道は T と T' において一致する．従って，T において x から v への増加道があるなら，T' においても増加道があるのは明らかである．

Case 2. W 上に v がある．
出辺 a は向点からサイクル C の向きに辿って得られる第一閉鎖辺なので，W 上に閉鎖辺は存在しない．従っ

て T' において向点から v への道は，g に関する増加道である．よって Case 1 を考慮すると，T' において x から v への道も同様に g に関する増加道である．

Case 3. W' 上に v がある．

$\delta \geq 0$ を Case 4 においての増加量とする．

$\delta > 0$ の場合，W の辺上でのフロー g は，フロー u を W の辺上で δ だけ増加させたものである．すなわち，C の向点を終点とした W と逆向きの道 (向点から v への道) は g に関する増加道となる．よって Case 1 を考慮すると，T' において x から v への道も同様に g に関する増加道である．

$\delta = 0$ の場合，出辺 a は W 上に存在せず，また (T, L, U) は強認容木構造なので，入辺 e は W 上には存在しない．よって x から v への道は T と T' において一致する．そして共通の道 Q は u に関する増加道であり，$\delta = 0$ よりフローの更新は行われないので，Q は g に関しても増加道である．

Case 4. v が C 上にないとする．

(T, L, U) が強認容構造なので，T における x から v への道 Z は u に関して増加している．初めに x から v への道がサイクル C と交わらないときを考える．Z を流れるフローの値は変化していないので，Z は T' においても g に関する増加道である．次に，x から v への道がサイクル C と交わるときを考える．T' において，y を Z' 上のサイクル C に最初に接続する頂点とし，y から v への道 Z' と x から y への道 C とに分けて考える．すると Z' 上でフローは変化していないので，Z' は g に関する増加道である．また，x から y への道は Case 1 から Case 3 より増加道であることは示されているので，T' において x から v への道も g に関する増加道である．□

次に，第一閉鎖辺選択規則を使うとアルゴリズムが終了できることを証明するために，補題を示す．

補題 5. (T, L, U) をアルゴリズム進行中に生じる木構造とする．そして π をポテンシャル，a を出辺，$e = rs$ を入辺，π' を増加の後更新した新しいポテンシャルとする．さらに T_1 を x を含む $T \setminus \{a\}$ の連結成分とし，$T_2 = E \setminus (T_1 \cup \{a\})$ とする．すると以下が従う:

$$\pi'(v) = \begin{cases} \pi(v) & \text{if } v \in T_1 \\ \pi(v) + \gamma_\pi(e) & \text{if } v \in T_2 \text{ and } r \in T_1 \\ \pi(v) - \gamma_\pi(e) & \text{if } v \in T_2 \text{ and } r \in T_2 \end{cases}$$

証明. $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{a\}$ と表す．すると π' において以下の式が成り立つ:

$$\gamma(uv) + \pi'(u) - \pi'(v) = 0 \quad \text{for all } uv \in T' \tag{2}$$

初めに $v \in T_1$ と考える．このとき，x から v への道は T と T' において一致している．ゆえに $\pi(x) = \pi'(x) = 0$ から $\pi'(v) = \pi(v)$ が従う．

次に $r \in T_1$ かつ $s \in T_2$ を考える．頂点 r は T_1 上にあるので，$\pi'(r) = \pi(r)$ となる．頂点 s について，(2) より

$$\begin{aligned} \pi'(s) &= \pi'(r) + \gamma(rs) \\ &= \pi(r) + \gamma(rs) \\ &= \pi(s) + \gamma_\pi(rs) \end{aligned}$$

となる．すべての $v \in T_2$ の頂点に対して s から v への道は T' と T において一致する．従ってすべての $v \in T_2$ において $\pi'(v) = \pi(v) + \gamma_\pi(rs)$ が成り立つ．

最後に $r \in T_2$ かつ $s \in T_1$ を考える．

頂点 s は T_1 上にあるので，$\pi'(s) = \pi(s)$ となる．頂点 r について，(2) より

$$\begin{aligned} \pi'(r) &= \pi'(s) - \gamma(rs) \\ &= \pi(s) - \gamma(rs) \\ &= \pi(r) - \gamma_\pi(rs) \end{aligned}$$

となる．すべての $v \in T_2$ の頂点に対して r から v への道は T' と T において一致する．従って全ての $v \in T_2$ において $\pi'(v) = \pi(v) - \gamma_\pi(rs)$ が成り立つ．□

定理 6. P を有向グラフ G 上の最小費用流問題とする．すべてのデータ b，c，d，γ は有理数であると仮定する．するとネットワークシンプレックス法は第一閉鎖辺選択規則を使い出辺を選ぶと，有限回のステップで終了する．

証明. すべての変数を有理数とすると，すべての分母を取り払うことで変数を整数として考えることができる．増加量が $\delta > 0$ のとき，フローを更新すると必ずコストが *1* 以上減少することになる．これを無限回繰り返すと最小値は $-\infty$ になるが，最小費用流問題は必ず最小値を持つことに矛盾する．よってフローの更新は有限回であることがわかる．従ってフロー増加量が $\delta = 0$ であるときを考え，このような木構造の変更が有限回しか起きないことを示す．π をポテンシャル，a を出辺，$e = rs$ を入辺，π' を増加の後更新した新しいポテンシャルとする．

Case 1. $e \in L$ かつ $\gamma_\pi(e) < 0$ の場合．このとき，入辺 e の向きはサイクル C と一致している．そしてその向きに従って C を辿るとき，(T, L, U) は強認容木構造なので a は必ず C の向点と s の間にある．従って，$r \in T_1$ より $\pi'(v) = \pi(v) + \gamma_\pi(e) < \pi(v)$.

Case 2. $e \in U$ かつ $\gamma_\pi(e) > 0$ の場合．このとき，入辺 e の向きはサイクル C の向きと反対方向になる．その向きに従って C をたどるとき，a は Case 1 と同様に r と C の向点の間にある．従って，$r \in T_2$ より $\pi'(v) = \pi(v) - \gamma_\pi(e) < \pi(v)$.

さらに補題 *5* より $v \in T_1$ の場合は $\pi'(v) = \pi(v)$ となる．従って，どちらの場合でもフローの追加はできないが，すべてのポテンシャル $p(v)$ の総和は両ケースによって少なくとも 1 減少することになり，無限界繰り返すことで $-\infty$ の値をとる．しかし，常に頂点 x のポテンシャルは *0* であり，他のポテンシャルの値は一意的に決まるので，高々頂点数の平方と変形コストの最小値の積程度の値をとる．よって，増加量が $\delta = 0$ であるときもアルゴリズムは有限回のステップで終了する．□

8. まとめ

ネットワークシンプレックス法では木構造の更新によって最小費用流問題の最適解を求めるアルゴリズムである．また，そのアルゴリズムの過程に起こる巡回については，木構造が退化していることが原因であり，強認容木構造を保つことで防ぐことができる．その強認容木構造を保つ更新を行う方法として，最終閉鎖辺選択規則が知られていた．本論文で提案した，新たな強認容木構造を保つ方法である第一閉鎖辺選択規則は，既に知られていた最終閉鎖辺選択規則の書き換えではあるが，我々が現在進めている，アルゴリズムにおける巡回の数学的構造の解明に大きな意味を持っている．

参考文献

1) D. Jungnickel: "*Graphs, Networks and Algorithm*", Second Edition, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 148(2005).

2) K. Ahuja, L. Magnanti and B. Orlin: "*NETWORK FLOWS*", PrenticeHall, New Jersey, 166-191(1993).

3) 藤重 悟: グラフ・ネットワーク・組合わせ論, 工系数学講座 18,（共立出版, 2002), p.1-7, 54, 55.