The Science and Engineering Review of Doshisha University, Vol. 53, No. 2 July 2012

# The Maximum Flow Problem and its Dual

Sayaka Yoneda,* Sennosuke Watanabe** and Yoshihide Watanabe***

(Received April 20, 2012)

In the present paper, we focus on the maximum flow problem which is one of the well-known optimization problems on flow-networks. The maximum flow problem is the problem for finding the flow such that the flow value is maximal among the flows subject to the capacity restriction and the flow conservation laws. Many of the combinatorial optimization problems can be formulated as linear programming (LP) problems, and it is known that the maximum flow problem can be formulated as an LP problem. On the other hand, the max-flow min-cutset theorem which is one of the famous results in combinatorial optimization, suggests the duality between flows and cutsets in networks. The purpose of our study is to clarify the duality between flows and cutsets in the maximum flow problem through the LP problem. In the present paper, we give a new formulation of the maximum flow problem as an LP problem which is slightly different from the one in the references. Computational experiments show that the dual of the LP problem computes a binary vector as the optimal solution, which presents the min-cutset. This implies that our formulation in the present paper is adequate for our purpose. However, we cannot make clear the reason why the optimal solution of the dual problem of the maximum flow problem becomes the binary vector, though the dual problem is an LP problem. This remains as a future subject of study.

**Key words** ： maximum flow problem, linear programming problem, dual problem, max-flow min-cutset theorem

**キーワード** ： 最大流問題，線形計画問題，双対問題，最大フロー・最小カットセット定理

# 最大流問題とその双対問題

米 田 彩 香・渡 辺 扇 之 介・渡 邊 芳 英

## 1. はじめに

近年，オペレーションズリサーチを代表とする様々な組み合わせ最適化問題について，そのアルゴリズムの改良や数学的構造が明らかにされてきた．組み合わせ最適化問題の多くは線形計画問題，整数計画問題として定式化され，個々の組み合わせ論的なアルゴリズムだけではなく，線形計画問題や整数計画問題におけるアルゴリズムも適用できることが知られている[1, 5]．このような方向の研究は計算時間の改善を与えるものではないが，個々の組み合わせ最適化問題の特徴的な代数構造を与えるという点で重要な意味を持っている．

本研究で対象とする最適化問題は，グラフ・ネットワーク上の最適化問題の代表例である最大流問題である．この最大流問題の最大フローに関して，最大フロー・最小カットセット定理という定理がある[2, 3, 4]．この定理は最大フローが，ネットワークを始点を含む頂点集合と終点を含む頂点集合に分けたときに，始点を含む頂点集合から

* Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone:+81-774-65-6302, E-mail:dum0924@mail4.doshisha.ac.jp
** Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University
*** Department of Mathematical Science, Doshisha University

終点を含む頂点集合へ伸びる辺の容量の和であるカットセットの最小値に等しいという定理である．この定理は最大フローと最小カットセットの双対性を表した定理である．本研究では，この最大流問題を線形計画問題として取り扱い，その双対問題を作ることでこの最大フロー・最小カットセット定理を説明できないかを考える．最大流問題を線形計画問題として取り扱う際に，その定式化については知られている[6, 7]．しかし，この定式化に従い最大流問題とその双対問題について例を用いて数値実験を行うと，最大フロー・最小カットセット定理が完全に見えるとは言えなかった．これは従来の定式化ではグラフの接続行列の始点と終点に関する行を取り除いた行列を使って定式化しており，これら2つの情報が抜け落ちているためと考えた．そこで，グラフの情報が抜け落ちていない行列を使って，最大フロー・最小カットセット定理が完全に見えるような最大流問題の新しい定式化を提唱する．

## 2. ネットワーク

### 2.1 有向グラフ

頂点集合 $V$ と辺集合 $E$ からなる有向グラフを $G=(V,E)$ で表わす．有向グラフの辺 $e\in E$ は，2つの頂点 $v_i, v_j\in V$ を結んでおり，その対 $(v_i,v_j)$ で決まる．$v_i$ を辺 $e$ のテイル，$v_j$ をヘッドといい，それぞれ $v_i=\partial^- e$, $v_j=\partial^+ e$ と表す．頂点 $v_i, v_j$ を結ぶ辺が複数存在するとき，このような辺を多重辺といい，また，$v_i=v_j$ となるとき，辺 $e$ を自己ループという．多重辺と自己ループを含まない有向グラフを単純グラフといい，以後，$m$ 個の頂点と $n$ 個の有向辺からなる単純な有向グラフを考える．有向グラフ $G$ の辺の列 $P=(e_1,\dots,e_k)$ が歩道であるとは，各 $i=1,2,\dots,k-1$ に対して $\partial^+ e_i=\partial^- e_{i+1}$ を満たすものをいう．頂点 $\partial^- e_1$ を歩道の出発点，頂点 $\partial^+ e_k$ を歩道の終着点という．歩道であって，特に出発点と終着点以外の頂点が高々1度しか含まれないものを道という．次に有向グラフを表現するために重要な概念である接続行列を定義する．

**定義 1** (接続行列)．$V=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$，$E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ である有向グラフ $G=(V,E)$ の接続行列 $Q$ は，$m\times n$ の行列で表現され，$Q$ の第 $i$ 行第 $j$ 列の成分 $q_{ij}$ は，以下で定義される．

$$q_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i=\partial^+ e_j \\ -1 & v_i=\partial^- e_j \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

### 2.2 最大流問題

次に，ネットワーク上の最適化問題である最大流問題について述べる．$V=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ と $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ からなる有向グラフ $G=(V,E)$ を考える．有向グラフの各辺 $e_j\in E$ に正の整数 $c_j$ を与え，これらを各成分に持つ $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ を容量という．$v_1=s, v_m=t\in V$ は特別な頂点であり，$s$ から $t$ には有向道が存在するものと仮定する．そのとき，$\mathcal{N}=(G,\boldsymbol{c},s,t)$ を $s$ を始点，$t$ を終点とするフローネットワークと呼ぶ．ネットワーク上のフロー $\boldsymbol{u}$ とは，$n$ 次元の非負ベクトル $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ であって以下の (i) と (ii) を満たすものをいう:

(i) $0\le u_j\le c_j \quad (j=1,\dots,n)$

(ii) $\displaystyle\sum_{\partial^+(e_j)=v_i} u_j=\sum_{\partial^-(e_j)=v_i} u_j \quad (v_i\in V\backslash\{s,t\}).$

条件 (i) は容量制約条件と呼ばれ，フローは非負で各辺に与えられた容量を超えないことを意味する．条件 (ii) はフロー保存則と呼ばれ，始点と終点以外の任意の頂点において，流入するフローの和と流出するフローの和が等しいことを意味する．ここで，係数ベクトル $\boldsymbol{w}={}^t(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ を次のように定義する:

$$w_j=\begin{cases} 1 & \partial^+ e_j=t \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

${}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}$ をフロー $\boldsymbol{u}$ の値と呼ぶが，この値は定義から終点 $t$ に流入するフローの和を表している．フロー保存則より

$${}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}=\sum_{\partial^+(e_j)=t} u_j=\sum_{\partial^-(e_j)=s} u_j$$

が成り立つので，フローの値は始点から流出するフローの和でもある．最大流問題とは，条件 (i) と (ii) を満たし，${}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}$ が最大となる $\boldsymbol{u}$ を求める問題である．

頂点集合 $V$ が共通部分のない和集合 $S$，$T$ を用いて $V = S \sqcup T$ と分割されていて，$s \in S$，$t \in T$ が成り立つとき，集合 $S = \mathcal{C}$ をカットと呼び，$\partial^- e_j \in S$，$\partial^+ e_j \in T$ となる辺 $e_j$ の集合 $\mathscr{C}$ をカットセットと呼ぶ．カットとカットセットを表現するために使う接続ベクトルをそれぞれ以下で定義する．

**定義 2** (カットの接続ベクトル)**.** $m$ 個の頂点集合と $n$ 個の辺集合からなる有向グラフ $G = (V, E)$ において，頂点の集合であるカット $\mathcal{C}$ の接続ベクトル $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ を次のように定義する．

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & v_i \in \mathcal{C} \\ 0 & v_i \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

**定義 3** (カットセットの接続ベクトル)**.** $m$ 個の頂点集合と $n$ 個の辺集合からなる有向グラフ $G = (V, E)$ において，辺の集合であるカットセット $\mathscr{C}$ の接続ベクトル $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ を次のように定義する．

$$\nu_i = \begin{cases} 1 & e_i \in \mathscr{C} \\ 0 & e_i \notin \mathscr{C} \end{cases}$$

カットセット $\mathscr{C}$ の容量 $\gamma$ をカットセットの接続ベクトル $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ と容量 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ を使って

$$\gamma = {}^t\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{c}$$

と定義する．カットセット $\mathscr{C}$ が最小カットセットであるとは，任意のカットセット $\mathscr{C}'$ について，それぞれのカットセット容量 $\gamma$，$\gamma'$ が $\gamma \leq \gamma'$ となるときをいう．最大フローと最小カットセットに関して，次の定理が知られている．

**定理 4** (最大フロー・最小カットセット定理 [2])**.** フローネットワーク $\mathcal{N} = (G, \boldsymbol{c}, s, t)$ 上の最大フローは，$\mathcal{N}$ の最小カットセットの容量に等しい．

## 3. 数理計画法

### 3.1 線形計画問題

線形計画問題 (以後 LP 問題) とは，いくつかの 1 次不等式や等式で表わされる制約条件のもとで，1 次関数を最大あるいは最小にする問題である．LP 問題は様々な形で定式化できるが，本論文では，以下の形を LP 問題の標準的な形として考えることとする．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & {}^t\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1}$$

ただし $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は $m \times n$ 行列で，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は縦ベクトルである．LP 問題とは，制約条件 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$(実行可能解) の中で目的関数 ${}^t\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$ を最大にするような解 (最適解) を求める問題である．

### 3.2 双対問題

この節では線形計画における双対性について述べる．与えられた任意の LP 問題に対して，その双対問題と呼ばれるもう 1 つの線形計画を定義することができる．双対問題を考えるとき，もとの問題を主問題と呼ぶ．主問題 (1) に対する双対問題を次式で定義する．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & {}^t\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & {}^tA\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{2}$$

これらの主問題 (1) と双対問題 (2) に関して，次の定理が知られている．

**定理 5** (双対定理 [4])**.** 主問題とその双対問題について，どちらか一方が最適解をもてば，他方も最適解をもち，それらは一致する．

## 4. 最大流問題の LP 定式化とその双対問題

本研究の目的は，フローネットワークにおける最大フロー・最小カットセット定理と数理計画における双対定理の関係が見えるような最大流問題とその双対問題の定式化を見つけることである．

### 4.1 既存の最大流問題の LP 定式化とその双対問題

まず，最大流問題を LP 問題として定式化することを考える．最大流問題の LP 定式化として，以下の定式化

が知られている．

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & {}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \\ \text{subject to} & \widetilde{Q}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} & ：フロー保存則 \\ & \boldsymbol{0}\le\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{c} & ：容量制約条件 \end{array} \tag{3}$$

ここで $\widetilde{Q}$ とは，最大流問題における有向グラフ $G$ の接続行列 $Q$ から，始点 $s$ と終点 $t$ に対する行を取り除いた $(m-2)\times n$ の行列である．この定式化 (3) を本論文で LP 問題の標準系としている (1) の形へ書き直す．その手続きとは，容量制約条件の式に $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$ となるようにスラック変数 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n_{\ge 0}$ を導入して，不等式から等式体系に変形する．その結果以下の形に書き直せる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{w} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \widetilde{Q} & \boldsymbol{0} \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u} & {}^t\boldsymbol{v} \end{pmatrix}\ge\boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

この双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & {}^t\boldsymbol{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} {}^t\widetilde{Q} & I_n \\ \boldsymbol{0} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5}$$

となる．これらの定式化について，主問題の最適解とその双対問題の最適解が一致することを最適化ソルバー GLPK を用いて例で確認した．その結果主問題の最適解となる実行可能解 $\boldsymbol{u}$ が最大フローとして表れており，その双対問題の実行可能解である辺の個数の成分を持つ $\boldsymbol{y}$ が最小カットセットの接続ベクトルとして見ることができた．しかし，$\boldsymbol{x}$ を意味のあるベクトルとして見ることができなかった．これは主問題である最大流問題を定式化する際に接続行列 $Q$ から始点と終点に関する行を除いた $(m-2)\times n$ 行列 $\widetilde{Q}$ を使っているため，その双対問題を作ると実行可能解 $\boldsymbol{x}$ の成分の数が $m-2$ 個になるからであると考えた．そこで双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ の成分の数をグラフの頂点数と同じ $m$ 個となるように最大流問題を定式化できれば，このベクトル $\boldsymbol{x}$ が意味を持つのではないかと考えた．

これを踏まえて主問題を始点と終点の情報が失われていない行列を使って次の新たな定式化を行った．

### 4.2 新しい最大流問題の LP 定式化

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & {}^t\boldsymbol{w}'\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ u_0 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \overline{Q}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ u_0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{0}\le\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{c} \end{array} \tag{6}$$

ネットワーク上で，始点 $s$ と終点 $t$ を含む全ての頂点においてフロー保存則が成り立つように終点 $t$ から始点 $s$ に入る辺 $e_0$ を付け加えたグラフ $\overline{G}=(V,\overline{E})$ を考える．ここで $\overline{E}=E\cup\{e_0\}$ である．この辺 $e_0$ には限りなく大きな容量 $c_0$ が与えられており，この辺に流れるフローを $u_0$ とする．つまり $u_0$ の値はフロー $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ の値 ${}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}$ に等しい:

$${}^t\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}=\sum_{\partial^+(e_j)=t}u_j=\sum_{\partial^-(e_j)=s}u_j=u_0$$

また，目的関数は $u_0$ が最大となるようにすればよいので，${}^t\boldsymbol{w}'=(w'_1,w'_2,\ldots,w'_{n+1})$ は以下のように定義される．

$$w'_j=\begin{cases} 1 & j=n+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに，(6) 式に現れる $\overline{Q}$ は有向グラフ $\overline{G}$ の接続行列で，$m\times(n+1)$ の行列である．

この定式化 (6) を本論文で LP 問題の標準系としている (1) の形へ書き直す．その手続きとは，先程と同様，この (6) 式にスラック変数 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n_{\ge 0}$ を導入して，以下の様

な等式体系に変形する．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{w}' & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ u_0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \overline{Q} & \boldsymbol{0} \\ I_{n_0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ u_0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u} & u_0 & {}^t\boldsymbol{v} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7}$$

ここで $I_{n_0}$ とは $n \times (n+1)$ 行列で単位行列 $I$ の最終列に零ベクトルを付け加えたものである:

$$I_{n_0} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 4.3 新しく定式化された最大流問題の双対問題

次に，(7) 式を主問題として双対問題を作ると以下のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & {}^t\boldsymbol{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} {}^t\overline{Q} & {}^tI_{n_0} \\ \boldsymbol{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \end{array} \tag{8}$$

これらの定式化について，主問題 (7) の最適解とその双対問題 (8) の最適解が一致することを最適化ソルバー GLPK を用いて例で確認した．すると，主問題の最適解を実現する実行可能解に現れるベクトル $\boldsymbol{u}$ を最大フローとして，その双対問題の最適解を実現する実行可能解に現れるベクトル $\boldsymbol{y}$ を最小カットセットの接続ベクトルとして見ることができた．さらに，ベクトル $\boldsymbol{x}$ をカットの接続ベクトルとして見ることもできた．

## 5. まとめ

本研究では，ネットワーク上の最適化問題である最大流問題に注目した．この最大流問題は線形計画問題として定式化されることが知られている[6, 7]．この知られている定式化を使った最大流問題を主問題とし，その双対問題を作ることで，最大流問題において有名な定理である最大フロー・最小カットセット定理が見れないかと考えた．しかし，数値実験を行った結果，双対問題の実行可能解は最小カットセットを完全に表しているものとはいえなかった．そこで，新たな最大流問題の定式化を行った．この新しい方法で定式化された最大流問題を主問題としてその双対問題を作ると，数値実験の結果，最小カットセットの接続ベクトルとそれを実現するカットの接続ベクトルが双対問題の最適解を実現する実行可能解として現れた．今回は数値実験による検証に留まってはいるが，この新しい定式化は最大フロー・最小カットセット定理を完全に見ることのできる定式化だと考えている．今後の課題としては，線形計画問題として定式化した最大流問題の双対問題の解として $(0, 1)$ のベクトルが出ていることに注目し，その理由に数学的根拠をつけたい．

## 参 考 文 献


1) A. Bachem and W. Kern: “*Linear Programming Duality*”, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 89-111(1992).

2) K. Ahuja, L. Magnanti and B. Orlin: “*NETWORK FLOWS*”, PrenticeHall, New Jersey, 166-191(1993).

3) D. Jungnickel: “*Graphs, Networks and Algorithm*”, Second Edition, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 148(2005).

4) 藤重 悟: グラフ・ネットワーク・組合わせ論, 工系数学講座 18，(共立出版, 2002), p.1-7, 54, 55.

5) 福島 雅夫: 数理計画入門, システム制御情報ライブラリー 15, (朝倉書店, 1996), p.41-46.

6) 宮城 奈津子: “最大流問題とトーリックイデアルの Gröbner 基底”, 同志社大学大学院工学研究科電気工学専攻修士論文, (2008).

7) 渡辺 扇之介: “Universal Gröbner Basis Associated with the Maximum Flow Problem”, 同志社大学大学院工学研究科電気電子工学専攻修士論文, (2010).