

【研究ノート】

インプライド・ツリー・モデルについて

久保 徳次郎

1 はじめに

インプライド・ボラティリティ (implied volatility) に関しては, Hull (2008) では次のような2つの関係があることが指摘されている¹⁾. 第1に, 株式オプションの場合は, 実行価格の増加とともに, インプライド・ボラティリティの値は減少する傾向にある. 第2に, 通貨オプションの場合は, イン・ザ・マネーあるいはアウト・オブ・ザ・マネーの度合いが大きいほど, インプライド・ボラティリティの値は増加する傾向にある. このような関係は, ボラティリティ・スマイル (volatility smile) と呼ばれている²⁾. 周知のように, 原資産価格のボラティリティがオプション価格に与える感応度 (ベガ) はプラスである. したがって, ボラティリティ・スマイルを考慮しない従来の数値解法によるオプション価格の計算値は, 株式オプションの場合は実行価格が大きいときに過大評価され, また通貨オプションの場合はディープ・イン・ザ・マネーあるいはディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのときに過小評価される可能性がある.

オプション価格の数値解法では, このような問題を解決する1つの方法として, インプライド・ツリー (implied tree) を応用することが考えられる. これは, ボラティリティを一定とするこれまでのオプション評価法に対する1

1) また, Kwok(2008)も参照.

2) 前者のような関係を示すボラティリティ・スマイルに関しては, ボラティリティ・スキュー (skew) と呼ばれる場合もある.

つの改善策であるが、このインプライド・ツリーには、2 項ツリーと 3 項ツリーの 2 種類がある。インプライド・ツリーの背景にある基本的な考え方は、ヨーロッパ型の標準的なオプションの市場価格には、将来の市場を予測するための重要な情報が含まれている、ということである³⁾。したがって、このオプションの市場価格と統合的なツリーの構築を行うことによって、オプション価格のより正確な計算値を期待することができる。

本稿の目的は、インプライド・ツリー・モデルの中でも、とくに Derman, Kani and Chriss (1996) のインプライド・3 項ツリー・モデルを Visual C# 2008 (以下では C# と略す) で数値計算するためのプログラムを示すことにある。また、ボラティリティ・スマイルを考慮した通貨オプションの評価にこの数値計算法を適応することにある。

本稿で取り上げる C# は、C++ をベースに開発されたオブジェクト指向型のプログラミング言語で、とくに Windows 上でプログラムを作成する場合、同じくマイクロソフト社から提供されている Visual C++ よりも効率的にプログラムの作成を行うことができる。C# が C++ と大きく異なる点は、とくに指定しない限りポインタ機能が使えないということである。そのため、「参照」を行う場合は、ポインタを使ってメモリアドレスを指し示すことができない。そこで、C# ではデータ型を参照型として指定する機能が新たに設けられ、値(データ)の格納領域を参照するためのメモリアドレスを、この参照型に指定された変数に格納することによって「参照」を行うということになる⁴⁾。つまり、C++ のように直接メモリアドレスを扱うのではなく、参照型変数の受け渡しを行うことによって間接的にメモリアドレスの受け渡しを行うというわけである。これは、メモリアドレスを誤って指定することによるデータ破壊などのトラブルを回避するためである。ただし、C# でポインタを使用したい場合は、unsafe という修飾子をメソッドやブロックの前に指定することによって、

3) Clewlow and Strickland (1998)などを参照。

4) 参照型に指定する場合は、ref, paramsなどの修飾子を使う。

それらの中でポインタの使用が可能となる。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2節で、インプライド・ツリーの基本的な考え方について、Derman and Kani (1994) の2項ツリー・モデルを紹介しながら考察する。第3節ではDerman, Kani and Chriss (1996) のインプライド・3項ツリー・モデルを例に挙げながら、その2項ツリーのケースに対する優位性を示す。このインプライド・3項ツリー・モデルに関しては、Haug (2007) にVBA (Visual Basic for Applications) によるプログラム例が紹介されている。しかし、VBAは計算速度、メモリ容量などの点で制約がある。そこで本稿では、これを参考にしながら、新たに通貨オプションの評価のためのC#によるプログラム例を示すことにする。そして、第4節で要約と今後の課題について述べることにする。

2 インプライド・2項ツリー

2.1 基本モデル

この節では、Derman and Kani (1994) に拠りながら、インプライド・ツリーの基本的な考え方について説明することにする⁵⁾。

次のような幾何ブラウン運動を考える。

$$dS_t/S_t = \eta(t)dt + \sigma(S_t, t)dz \quad (1)$$

ただし、

$$\log[S_{t+\Delta t}/S_t] \sim N\left\{\left(\eta(t) - \sigma^2(t, S_t)/2\right)\Delta t, \sigma^2(t, S_t)\Delta t\right\}$$

である。ここで、 S_t は t 時点におけるオプションの原資産価格、 η はドリフト、 σ はボラティリティをそれぞれ表している。また、以下のツリー・モデルにおいては、ノード上の時点と原資産価格を、

$$t_i = t_0 + i \Delta t, \quad (\text{ただし, } i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$S_j = S_0 + j \Delta S, \quad (\text{ただし, } j = 0, 1, 2, \dots)$$

と離散化して考え、 t_i 時点における第 j 番目の原資産価格を $S_{i,j}$ と表すことにする。ただし、以下では記号の簡単化のために、ツリー上の任意のノード (t_i ,

5) Derman and Kani モデルについては、Haug (2007), Levy (2004) などを参照。

S_j) に関しては (i, j) と省略化して表すことにする。

まず、2 項ツリー・モデルを使って、任意のノード (i, j) における局所的ボラティリティ $\sigma_{i,j}$ を求めてみよう。2 項ツリーの構築に関しては、横軸に時間、縦軸に価格をとり、ツリーの出発点 (root node) を $(0, 0)$ として各ノードを表す配列を次のように展開していくものとする。

$$\{(0, 0)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \{(2, 0), (2, 1), (2, 2)\}, \dots$$

説明の便宜上、任意の 2 時点間の原資産価格の動きのみに注目するために $S = S_{i,j}$ とおき、次の $i+1$ 時点でその価格が上昇するときの値を S_u 、下落するときの値を S_d 、上昇確率を pu 、下落確率を $pd (= 1 - pu)$ とそれぞれ表すことにする。いま、

$$x = \begin{cases} \ln[S_u/S], & \text{確率 } pu \\ \ln[S_d/S], & \text{確率 } pd \end{cases}$$

となる確率変数 x を考えると、(1) より、

$$\text{Var}[x] = \sigma_{i,j}^2 \Delta t \quad (2)$$

という関係をえる。上式の左辺は、

$$\text{Var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

で、

$$E[x^2] = pu \{ \ln[S_u/S] \}^2 + pd \{ \ln[S_d/S] \}^2$$

$$(E[x])^2 = \{ pu \ln[S_u/S] + pd \ln[S_d/S] \}^2$$

とそれぞれ具体的に表すことができる。したがって、(2) の左辺は、

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= pu \{ \ln[S_u/S] \}^2 + pd \{ \ln[S_d/S] \}^2 - pu^2 \{ \ln[S_u/S] \}^2 \\ &\quad - pd^2 \{ \ln[S_d/S] \}^2 - 2pu \, pd \ln[S_u/S] \ln[S_d/S] \\ &= pu \, pd \left[\{ \ln[S_u/S] \}^2 + \{ \ln[S_d/S] \}^2 - 2 \ln[S_u/S] \ln[S_d/S] \right] \end{aligned}$$

となり、さらに、

$$\begin{aligned} \{ \ln[S_u/S] - \ln[S_d/S] \}^2 &= \{ \ln[S_u/S] \}^2 + \{ \ln[S_d/S] \}^2 \\ &\quad - 2 \ln[S_u/S] \ln[S_d/S] \end{aligned}$$

であることを考慮すると、

$$\text{Var}(x) = pu \, pd \{ \ln[S_u/S_d] \}^2$$

と表すことができる。かくして、上式と (2) より、局所的ボラティリティは次のように表すことができる。

$$\sigma_{i,j} = \ln[S_u/S_d] \sqrt{pu \, pd / \Delta t} \quad (3)$$

とくに、Cox, Ross and Rubinstein (1979) (以下では、CRR) に代表されるような従来の 2 項ツリー・モデルでは、原資産価格の上昇率 (あるいは下落率) は一定なので、1 プラス上昇率を u と表すと、原資産価格の上昇値と下落値が

$$S_u = uS, \quad S_d = S/u, \quad (\text{ただし}, u > 1)$$

と設定でき、(3) より、

$$\sigma_{i,j} = 2 \ln[u] \sqrt{pu \, pd / \Delta t}$$

という関係を与える。ただし、CRR モデルでは、局所的ボラティリティと u を一定と仮定し、リスク中立の世界における無裁定条件より、各ノードで一定となる pu と pd が決定されることになる。しかし、インプライド・ツリーでは、以下でも示すように、 pu , pd , u および局所的ボラティリティは各ノードで異なった値をとる。

なお、(3) の局所的ボラティリティは、2 項ツリー上で考えると、一般的に、

$$\sigma_{i,j} = \ln[S_{i+1,j+1}/S_{i+1,j}] \sqrt{pu \, pd / \Delta t}$$

と表すことができる。

次に、状態証券 (Arrow-Debreu 証券) の導入を考えることにする。これは、ある定められたノード (i, j) に到達したときには現金 1 単位が支払われるが、その他のノードでは現金が支払われないとする理論上の証券のことである。この状態証券の現時点での価格を $Q_{i,j}$ と表すことにする。ツリー上の各ノードにおける状態証券の価格に関しては、初期点を $Q_{0,0} = 1$ とし、 $i = 1$ 時点以降は任意の連続する 2 時点間 i と $i + 1$ に対して、

$$Q_{i+1,j} = \begin{cases} pu_{i,i} Q_{i,j} \exp[-r\Delta t], & (j = i + 1 \text{ の場合}) \\ \{ pu_{i,j-1} Q_{i,j-1} + pd_{i,j} Q_{i,j} \} \exp[-r\Delta t], & (1 \leq j \leq i \text{ の場合}) \\ pd_{i,j} Q_{i,j} \exp[-r\Delta t], & (j = 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

となるように順次決定していけばよい。ただし、 r は自国利子率である。

この状態証券を用いると、実行価格を $S_{i,j}$ 、満期時点を $i+1$ とする i 時点のヨーロッパン・コール・オプション価格 $C(S_{i,j}, t_{i+1})$ は、

$$C(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \sum_{k=0}^i Q_{i,k} \{ pu_{i,k} \max[S_{i+1,k+1} - S_{i,j}, 0] + pd_{i,k} \max[S_{i+1,k} - S_{i,j}, 0] \}$$

と表すことができる。ここで、 $i+1$ 時点の原資産価格が、

$$S_{i+1,k} < S_{i,j}, \quad k=0, 1, \dots, j$$

のとき、コール・オプションの価値はゼロとなるので、さらに上式は次のように書き換えることができる。

$$C(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] Q_{i,j} pu_{i,j} (S_{i+1,j+1} - S_{i,j}) + \exp[-r\Delta t] \sum_{k=j+1}^i Q_{i,k} \{ pu_{i,k} (S_{i+1,k+1} - S_{i,j}) + pd_{i,k} (S_{i+1,k} - S_{i,j}) \} \quad (4)$$

原資産価格 $S_{i,j}$ に対する $i+1$ 時点を満期とする先渡価格を $F_{i,j}$ 、連続的な持越費用率 (cost-of-carry rate) を a と表すと、先渡価格は、

$$F_{i,j} = S_{i,j} \exp[a\Delta t] \quad (5)$$

となる⁶⁾。これは、ツリー上のリスク中立の世界では、

$$F_{i,j} = pu_{i,j} S_{i+1,j+1} + pd_{i,j} S_{i+1,j} \quad (6)$$

と表すことができるので、(6) を、

$$pd_{i,k} (S_{i+1,k} - S_{i,j}) = F_{i,k} - S_{i,j} - pu_{i,k} (S_{i+1,k+1} - S_{i,j})$$

と書き換え (4) に代入すると、次のような結果をえることができる。

$$C(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \{ Q_{i,j} pu_{i,j} (S_{i+1,j+1} - S_{i,j}) + \sum_{BC} \} \quad (7)$$

ただし、

$$\sum_{BC} \equiv \sum_{k=j+1}^i Q_{i,k} (F_{i,k} - S_{i,j})$$

である。また、 $pu_{i,j} + pd_{i,j} = 1$ なので、推移確率は、(6) より、

6) 原資産が株式の場合は連続配当率を d とすると $a = r - d$ 。また原資産が外国通貨の場合は外国利子率を r^* とすると $a = r - r^*$ となる。

$$pu_{i,j} = \frac{F_{i,j} - S_{i+1,j}}{S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}} \quad (8a)$$

$$pd_{i,j} = \frac{S_{i+1,j+1} - F_{i,j}}{S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}} \quad (8b)$$

と決定することができる。上記の (8a) を (7) に代入すると、

$$C(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \left\{ \frac{Q_{i,j}(F_{i,j} - S_{i+1,j})(S_{i+1,j+1} - S_{i,j})}{S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}} + \Sigma_{BC} \right\}$$

となり、この両辺に $S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}$ をかけて整理すると次のような結果をえることができる。

$$S_{i+1,j+1} = \frac{S_{i+1,j}\phi_C - Q_{i,j}S_{i,j}(F_{i,j} - S_{i+1,j})}{\phi_C - Q_{i,j}(F_{i,j} - S_{i+1,j})} \quad (9)$$

ただし、

$$\phi_C \equiv C(S_{i,j}, t_{i+1})\exp[r\Delta t] - \Sigma_{BC}$$

である。ここで、 $C(S_{i,j}, t_{i+1})$ に関しては、ヨーロッパアン・コール・オプションの実際の市場価格から補間法を使ってその値を算出する。そして、状態価格と先渡価格 (5) より) を与えることによって、ツリー上の原資産価格を決定することができる。また、これらの算出された原資産価格を (8a) と (8b) に代入することによって推移確率を計算することができる。つまり、このようにして構築されるインプライド・ツリーは、従来のツリー・モデルと違って、オプションの市場価格を反映したものとなるわけである。

以上は、コール・オプションを利用した計算法であるが、今度はプット・オプションを利用した計算法を考えてみよう。実行価格を $S_{i,j}$ 、満期時点を $i+1$ とする i 時点のヨーロッパアン・プット・オプション価格 $P(S_{i,j}, t_{i+1})$ は、

$$P(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \sum_{k=0}^i Q_{i,k} \{ pu_{i,k} \max[S_{i,j} - S_{i+1,k+1}, 0] + pd_{i,k} \max[S_{i,j} - S_{i+1,k}, 0] \}$$

と表すことができる。ここで、 $i+1$ 時点の原資産価格が、

$$S_{i+1,k} > S_{i,j}, \quad k = j+1, j+2, \dots, i+1$$

のとき、プット・オプションの価値はゼロとなるので、上式は次のように書き換えることができる。

$$P(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] Q_{i,j} p d_{i,j}(S_{i,j} - S_{i+1,j}) \\ + \exp[-r\Delta t] \sum_{k=0}^{j-1} Q_{i,k} \{ p u_{i,k}(S_{i,j} - S_{i+1,k+1}) \\ + p d_{i,k}(S_{i,j} - S_{i+1,k}) \} \quad (10)$$

さらに、(6) より、

$$p u_{i,k}(S_{i,j} - S_{i+1,k+1}) = S_{i,j} - F_{i,k} - p d_{i,j}(S_{i,j} - S_{i+1,k})$$

をえるので、これを(10)に代入すると、

$$P(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \{ Q_{i,j} p d_{i,j}(S_{i,j} - S_{i+1,j}) + \Sigma_{BP} \} \quad (11)$$

をえることができる。ただし、

$$\Sigma_{BP} \equiv \sum_{k=0}^{j-1} Q_{i,k}(S_{i,j} - F_{i,k})$$

である。そして、(11)に(8b)を代入すると、

$$P(S_{i,j}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \left\{ \frac{Q_{i,j}(S_{i+1,j+1} - F_{i,j})(S_{i,j} - S_{i+1,j})}{S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}} + \Sigma_{BP} \right\}$$

となり、この両辺に $S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}$ をかけて整理すると次のような結果をえることができる。

$$S_{i+1,j} = \frac{S_{i+1,j+1} \phi_p + Q_{i,j} S_{i,j} (F_{i,j} - S_{i+1,j+1})}{\phi_p + Q_{i,j} (F_{i,j} - S_{i+1,j+1})} \quad (12)$$

ただし、

$$\phi_p \equiv P(S_{i,j}, t_{i+1}) \exp[r\Delta t] - \Sigma_{BP}$$

である。さきの場合と同様、(12)における $P(S_{i,j}, t_{i+1})$ に関しては、ヨーロピアン・プット・オプションの市場価格から補間法を使ってその値を算出する。

(9)と(12)からも明らかのように、インプライド・ツリー上の原資産価格の変動は、従来のツリー・モデルと違って不規則に展開していくことになり、推移確率が1以上や負の値をとる可能性があるため、ときとしてモデルの不安定要因となる。これは、インプライド・2項ツリー・モデルの大きな欠点である。この点は、次節で示すように、3項ツリーに変更することによって

大きく改善することができる。

2.2 2項ツリーの構築上の留意点と計算結果

原資産価格のツリー上の展開に関しては、その初期値 $S_{0,0}$ がツリーのすべての中心ノードの原資産価格と同じになるように設定していくと便利である。そこで、中心ノードの周辺では次のような処理を施すことにする。

中心ノードが存在するのは、時点を表す添字 i が偶数の場合なので、その場合の任意の原資産価格を $\tilde{S}_{i,j}$ とすると、2項ツリーの場合、中心ノードは $\tilde{S}_{i,i/2}$ と表すことができる。すると、CRRモデルでは、この $\tilde{S}_{i,i/2}$ はツリー上の次の時点で、

$$S_{i+1,i/2+1} = u\tilde{S}_{i,i/2}, \quad S_{i+1,i/2} = \tilde{S}_{i,i/2}/u$$

と変化するので、かくして、

$$S_{i+1,i/2+1}S_{i+1,i/2} = \tilde{S}_{i,i/2}^2, \quad (\text{ただし, } \tilde{S}_{i,i/2} = S_{0,0}) \quad (15)$$

という2項ツリーの中心化条件 (centering condition) をえることができる。中心ノードから価格が上昇する推移確率に対してこの中心化条件を適用すると、この推移確率は、(8a)の右辺の分母分子に $S_{i+1,j+1}$ をかけ、(15)を使うことによって、

$$p_{u,i,j} = \frac{F_{i,j}S_{i+1,j+1} - \tilde{S}_{i,j}^2}{(S_{i+1,j+1} - \tilde{S}_{i,j})(S_{i+1,j+1} + \tilde{S}_{i,j})}, \quad (\text{ただし, } j=i/2)$$

と求めることができる。さらに、

$$\tilde{\phi}_C \equiv C(\tilde{S}_{i,j}, t_{i+1}) \exp[r\Delta t] - \Sigma_{BC}, \quad (\text{ただし, } j=i/2)$$

とおき、これを(7)を使って書き換えると、

$$\tilde{\phi}_C = Q_{i,j} p_{u,i,j} (S_{i+1,j+1} - \tilde{S}_{i,j}), \quad (\text{ただし, } j=i/2)$$

となるので、これに上の推移確率の式を代入することによって次式をえる。

$$\tilde{\phi}_C = \frac{Q_{i,j}(F_{i,j}S_{i+1,j+1} - \tilde{S}_{i,j}^2)}{S_{i+1,j+1} + \tilde{S}_{i,j}}, \quad (\text{ただし, } j=i/2)$$

かくして、上式を $S_{i+1,j+1}$ に関して整理すると、次のような結果をえることができる。

$$S_{i+1,j+1} = \frac{\tilde{S}_{i,j}(\tilde{\phi}_c + Q_{i,j}\tilde{S}_{i,j})}{Q_{i,j}F_{i,j} - \tilde{\phi}_c}, \quad (\text{ただし, } j=i/2) \quad (16)$$

つまり、時点を表す添字 $i+1$ が奇数の値をとる場合、まず (16) より原資産価格を決定し、そして $S_{i+1,j+2}$ から $S_{i+1,i+1}$ までの昇順の原資産価格は (9) より、また $S_{i+1,j}$ から $S_{i+1,0}$ までの降順の原資産価格は (12) よりそれぞれ決定していくことになる⁷⁾。

他方、時点を表す添字 $i+1$ が偶数の値をとる場合は、まず中心ノードを $S_{i+1,(i+1)/2} = S_{0,0}$ と設定し、そしてこの値よりも大きい昇順の原資産価格は (9) より、また小さい降順の原資産価格は (12) よりそれぞれ決定していくことになる。

次に、 $0 \leq pu_{i,j} \leq 1$ となるための条件を考えてみよう。そこでその逆の条件から考えていくと、まず $pu_{i,j} > 1$ となるための条件は、(8a) より、

$$F_{i,j} > S_{i+1,j+1}$$

であり、また $pu_{i,j} < 0$ となるための条件は、

$$F_{i,j} < S_{i+1,j}$$

である。したがって、 $0 \leq pu_{i,j} \leq 1$ となるための条件は、

$$S_{i+1,j+1} \geq F_{i,j} \geq S_{i+1,j}$$

となる。さらに、この不等式の添字 j をさらに 1 つ上にずらすことによって、

$$S_{i+1,j+2} \geq F_{i,j+1} \geq S_{i+1,j+1}$$

をえるので、したがって、 $0 \leq pu_{i,j} \leq 1$ となるための条件は、

$$F_{i,j+1} \geq S_{i+1,j+1} \geq F_{i,j} \quad (17)$$

と書き換えることができる。実際の計算では、この不等式を満たすようにインプライド・ツリーを構築していく必要があるが、この条件を満たさない場合は、1 つの修正方法として、非常に小さな定数 ε を適当に選び、

$$S_{i+1,j+1} = F_{i,j} + \varepsilon \quad (18)$$

と設定し直すことによって、(17) の条件を強制的に満たすことができる。本

7) (9) と (12) の両式を使うメリットは、ヨーロピアン・オプションのコールとプットの 2 種類の市場価格を、インプライド・ツリーに反映させられるということである。このことは、以下の添字 $i+1$ が偶数の場合についても同様である。

稿でもこの方法を採用し、実際の数値計算にさいしては $\varepsilon = 10^{-5}$ とおいてマイナスの推移確率の発生に対処している。

以上のインプライド・2項ツリー・モデルを使った計算例(自国通貨建て為替レートを原資産価格とする場合)は、付録1に示している。計算にさいしてのパラメータの値は $S_{0,0}=100$, $T=0.5$, $\sigma_{0,0}=0.15$, $w=0.03$, $r=0.02$ であり、また外国利率は0.05、時間分割数は4である。なお、(9)と(12)におけるヨーロッパ・オプションのコールとプットの価格に関しては、計算の便宜上、それらの市場価格に代えてCRRモデルより算出している。ただし、通貨オプションの場合は、イン・ザ・マネーあるいはアウト・オブ・ザ・マネーの度合いが大きければ大きいほど、インプライド・ボラティリティの値は増加する。そこで、CRRモデルを使うさいには、このことを考慮するために次のような補正を行うことにする。

$$V_{i,j} = \sigma_{0,0} + w |(S_{i,j} - X)/X| \quad (19)$$

ただし、 X は実行価格、 w はプラスの定数である。

付録1より明らかなように、CRRモデルによる原資産価格のツリーは仮定により一定の率で変動するのに対して、インプライド・ツリーではそれは不規則な率で変動することになる。また、局所的ボラティリティと推移確率が一定であるCRRモデルと違って、不規則に変動する原資産価格に対応して、それらもインプライド・ツリー上で不規則に変化することになる。

3 インプライド・3項ツリー

3.1 Derman, Kani and Chriss (1996) のインプライド・3項ツリー

すでに前節で指摘したように、2項ツリーの場合、原資産価格のツリー上の変動は不規則となるため、推移確率が1以上の値や負の値をとる可能性があり、それがモデルの大きな不安要因となる場合がある。これに対して、3項ツリー・モデルの場合は、インプライド・ツリー上でも原資産価格を一定の上昇率(あるいは下落率)で展開させていくことができる。したがって、原資産価格をツリー上で展開させていく場合、通常の3項ツリー・モデルと同

様の手順をとればよいということになる。

この節では、Derman, Kani and Chriss (1996) モデルをベースにして、インプライド・3項ツリー・モデルの考察を進めていくことにする。また、3項ツリー上の原資産価格の変動に関しては、上昇、無変動（中間変動）、下落の3つの分枝を適用することにする。

まず、3項ツリーの配列に関しては、次のように展開していくものとする。

$$\{(0, 0)\}, \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}, \dots$$

3項ツリー上の状態証券の価格に関しては、初期点を $Q_{0,0} = 1$ とし、 $i = 1$ 時点以降は任意の連続する2時点間 i と $i + 1$ に対して、

$$Q_{i+1,j} = pd_{i,j} Q_{i,j} \exp[-r\Delta t], \quad (j=0 \text{ の場合})$$

$$Q_{i+1,j} = \{pm_{i,j-1} Q_{i,j-1} + pd_{i,j} Q_{i,j}\} \exp[-r\Delta t], \quad (j=1 \text{ の場合})$$

$$Q_{i+1,j} = \{pu_{i,j-2} Q_{i,j-2} + pm_{i,j-1} Q_{i,j-1} + pd_{i,j} Q_{i,j}\} \exp[-r\Delta t], \quad (2i > j > 1 \text{ の場合})$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{i+1,j} &= \{pu_{i,j-2} Q_{i,j-2} + pm_{i,j-1} Q_{i,j-1} + pd_{i,j} Q_{i,j}\} \exp[-r\Delta t] \\ Q_{i+1,j+1} &= \{pu_{i,j-1} Q_{i,j-1} + pm_{i,j} Q_{i,j}\} \exp[-r\Delta t] \\ Q_{i+1,j+2} &= pu_{i,j} Q_{i,j} \exp[-r\Delta t] \end{aligned} \right\}, \quad (j=2i \text{ の場合})$$

と順次決定していけばよい。ただし、 pm は原資産価格が変化しない確率（中間変動確率）である。

次に、3つの推移確率の計算手順に関して考えてみよう。満期時点を $i + 1$ 、実行価格を $S_{i+1,j+1}$ とする i 時点のコール・オプション価格 $C(S_{i+1,j+1}, t_{i+1})$ は、

$$\begin{aligned} C(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) &= \exp[-r\Delta t] Q_{i,j} pu_{i,j} (S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1}) \\ &\quad + \exp[-r\Delta t] \sum_{k=j+1}^i Q_{i,k} \{ pu_{i,k} (S_{i+1,k+2} - S_{i+1,j+1}) \\ &\quad \quad + pm_{i,k} (S_{i+1,k+1} - S_{i+1,j+1}) \\ &\quad \quad + pd_{i,k} (S_{i+1,k} - S_{i+1,j+1}) \} \quad (20) \end{aligned}$$

と決定することができる。先渡価格は、3項ツリー・モデルの場合、

$$F_{i,j} = pu_{i,j} S_{i+1,j+2} + pm_{i,j} S_{i+1,j+1} + pd_{i,j} S_{i+1,j} \quad (21)$$

となるが、これを、

$$F_{i,k} - S_{i+1,j+1} = pu_{i,k} (S_{i+1,k+2} - S_{i+1,j+1}) + pm_{i,k} (S_{i+1,k+1} - S_{i+1,j+1})$$

$$+pd_{i,k}(S_{i+1,k}-S_{i+1,j+1})$$

と書き換えて、(20) に代入すると、

$$C(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t]\{Q_{i,j}pu_{i,j}(S_{i+1,j+2}-S_{i+1,j+1}) + \Sigma_{TC}\} \quad (22)$$

という結果をえることができる。ただし、

$$\Sigma_{TC} \equiv \sum_{k=j+1}^{2i} Q_{i,k}(F_{i,k}-S_{i+1,j+1})$$

である。かくして、(22) より、原資産価格が任意のノード (i, j) から上昇する推移確率は次のように決定することができる。

$$pu_{i,j} = \frac{\exp[-r\Delta t]\{C(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) - \Sigma_{TC}\}}{Q_{i,j}(S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1})} \quad (23)$$

なお、前節の2項ツリー・モデルの場合と同様に、上式における $C(S_{i+1,j+1}, t_{i+1})$ に関しては、ヨーロピアン・コール・オプションの実際の市場価格から補間法を使ってその値を算出することになる。また、(21) より、

$$F_{i,j} - S_{i+1,j+1} = pu_{i,j}(S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1}) + pd_{i,j}(S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1})$$

とおけるので、原資産価格の下落および無変動の場合の推移確率に関しては、

$$pd_{i,j} = \frac{F_{i,j} - S_{i+1,j+1} - pu_{i,j}(S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1})}{S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1}} \quad (24)$$

$$pm_{i,j} = 1 - pu_{i,j} - pd_{i,j} \quad (25)$$

とそれぞれ決定することができる。

ツリー上の中心ノードより上の3つの推移確率は、上記の手順で計算していくのに対して、中心ノード以下のそれらに関しては、コール・オプションに代わって、プット・オプション価格を利用しながら推移確率を計算していくことになる⁸⁾。

満期時点を $i+1$ 、実行価格を $S_{i+1,j+1}$ とする i 時点のプット・オプション価格 $P(S_{i+1,j+1}, t_{i+1})$ は、

$$P(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t]Q_{i,j}pd_{i,j}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}) \\ + \exp[-r\Delta t] \sum_{k=0}^{i-1} Q_{i,k}\{pu_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k+2})\}$$

8) この点については、前節の2項ツリーのケースと同様である。

$$\begin{aligned}
 &+ pm_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k+1}) \\
 &+ pd_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k}) \} \quad (26)
 \end{aligned}$$

と決定することができる。また、(21) より、

$$\begin{aligned}
 S_{i+1,j+1} - F_{i,k} &= pu_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k+2}) + pm_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k+1}) \\
 &+ pd_{i,k}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,k})
 \end{aligned}$$

をえるので、これを (26) に代入すると、

$$P(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) = \exp[-r\Delta t] \{ Q_{i,j} pd_{i,j}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}) + \Sigma_{TP} \} \quad (27)$$

という結果をえることができる。ただし、

$$\Sigma_{TP} \equiv \sum_{k=j+1}^{i-1} Q_{i,k}(S_{i+1,j+1} - F_{i,k})$$

である。かくして、(27) より、原資産価格の下落確率は、

$$pd_{i,j} = \frac{\exp[r\Delta t] \{ P(S_{i+1,j+1}, t_{i+1}) - \Sigma_{TP} \}}{Q_{i,j}(S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j})} \quad (28)$$

と決定することができる。ただし、上式における $P(S_{i+1,j+1}, t_{i+1})$ に関しては、ヨーロッパアン・ブット・オプションの市場価格から補間法を使ってその値を算出することになる。また、さきの場合と同様に、(21) より、

$$F_{i,j} - S_{i+1,j+1} = pu_{i,j}(S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1}) + pd_{i,j}(S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1})$$

をえるので、原資産価格の上昇および無変動の場合の推移確率に関しては、

$$pu_{i,j} = \frac{F_{i,j} - S_{i+1,j+1} - pd_{i,j}(S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1})}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1}} \quad (29)$$

$$pm_{i,j} = 1 - pu_{i,j} - pd_{i,j} \quad (30)$$

とそれぞれ決定することができる。

3.2 3 項ツリーの構築上の留意点と計算結果

上記の計算を実際に実行するとき、推移確率がマイナスの値をとる場合がある。この場合は、いったん計算された推移確率を以下のように上書き処理すればよい⁹⁾。すなわち、 $S_{i+1,j+1} < F_{i,j} < S_{i+1,j+2}$ の場合は、

9) Haug (2007) を参照。

$$pu_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{i,j} - S_{i+1,j+1}}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j+1}} + \frac{F_{i,j} - S_{i+1,j}}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j}} \right)$$

$$pd_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{i+1,j+2} - F_{i,j}}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j}} \right)$$

また, $S_{i+1,j} < F_{i,j} < S_{i+1,j+1}$ の場合は,

$$pu_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{i,j} - S_{i+1,j}}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j}} \right)$$

$$pd_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{i+1,j+2} - F_{i,j}}{S_{i+1,j+2} - S_{i+1,j}} + \frac{S_{i+1,j+1} - F_{i,j}}{S_{i+1,j+1} - S_{i+1,j}} \right)$$

とそれぞれ上書きすればよいことになる。

最後に, 各ノードの局所的ボラティリティ $LV_{i,j}$ に関しては, 次のように算出することができる。

$$LV_{i,j} = \left\{ [pu_{i,j}(S_{i+1,j+2} - S_e)^2 + pm_{i,j}(S_{i+1,j+1} - S_e)^2 + pd_{i,j}(S_{i+1,j} - S_e)^2] / (S_{i,j}^2 \Delta t) \right\}^{1/2}$$

ただし,

$$S_e \equiv pu_{i,j}S_{i+1,j+2} + pm_{i,j}S_{i+1,j+1} + pd_{i,j}S_{i+1,j}$$

である。

以上のインプライド・3項ツリー・モデルを使った計算例は, 付録2 (自国通貨建て為替レートを原資産価格とする場合) に示している。ただし, 計算にさいしてのパラメータの値は, 前節の2項ツリーの場合と同様 $S_{0,0} = 100$, $T = 0.5$, $\sigma_{0,0} = 0.15$, $w = 0.03$, $r = 0.02$ であり, さらに外国利子率は0.05, 時間分割数は4である。また, C#によるその計算プログラム例に関しては, 付録3に示している。なお, (23)と(28)におけるヨーロッパ・オプション価格に関しては, 計算の便宜上, 市場価格ではなく, 標準的な3項ツリー・モデルの1つであるBoyle (1988) モデルを使って算出している。ただし, Boyleモデルを使うさいには, ボラティリティ・スマイルを考慮するために, 2項ツリーの場合と同様に, (19)を使って補正を行っている。また, 3項ツリーの場合,

インプライド・ツリーと従来のツリーでは原資産価格の展開はまったく同じなので、付録 2 では原資産価格の計算結果を省略している。

最後に、ボラティリティ・スマイルを考慮しない場合、イン・ザ・マネーとアウト・オブ・ザ・マネーのときのオプション価格が過小評価されることを、付録 3 のプログラムを使って確かめることができる。上記と同じパラメータで、インプライド・3 項ツリーによるアメリカン通貨オプションに関して計算を行うと、実行価格が 103 のときそのプット・オプション価格は 5.3392、実行価格が 97 のときのそれは 2.4778 である。これに対して、ボラティリティ・スマイルを考慮しない Boyle モデルで、同じくプット・オプション価格を計算した場合、実行価格が 103 のときは 5.3148、実行価格が 97 のときは 2.4563 となる。すなわち、いずれの場合も、インプライド・ツリー・モデルによる評価と比べて、従来の 3 項ツリー・モデルによる評価が過小評価されるということが確かめられる。

4 お わ り に

本稿では、インプライド・ツリー・モデルによる数値解法について考察を行い、そしてこれを使って新たに通貨オプション価格を計算するために、C# によるプログラム例を提示した。不完全ではあるが、これによってボラティリティ・スマイルを考慮に入れたより正確なオプション評価法を示すことができた。

しかし、インプライド・ツリー・モデルの問題点としては、2 つ挙げることができる。まず第 1 に、このモデルでは局所的ボラティリティは時間と原資産価格の非確率的な関数として算出されるが、実際の観点からは確率的な要素も考慮に入れる必要がある。第 2 に、本稿のプログラム例は、4 種類の 2 次元配列を必要としたが、これは非常にメモリ消費的な数値計算を余儀なくさせるため、精度の高い結果をえるには計算時間が非常にかかるというデメリットがある。このような問題点については、今後の検討課題としたい。

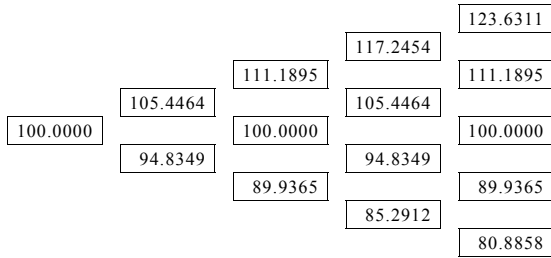
【参考文献】

- Boyle, P., (1988) "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.23, pp.1-12.
- Clelow, L. and C. Strickland, (1998) *Implementing Derivatives Models*, John Wiley & Sons Ltd. (葛山泰典監訳『金融工学プログラミング』エコノミスト社, 2002.)
- Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol.7, pp.229-263.
- Derman, E., and I. Kani, (1994) "Riding on a Smile," *Risk Magazine*, Vol.7, No.2, pp.32-39.
- Derman, E., I. Kani, and N. Chriss, (1996) "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile," *Journal of Derivatives*, Vol.3, No.4, pp.7-22.
- Haug, E. G., (2007) *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, Second Edition, McGraw-Hill.
- Hull, J. C., (2008) *Options, Futures, and Other Derivatives*, Seventh Edition, Prentice-Hall.
- Kwok, Y. K., (2008) *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Second Edition, Springer.
- Levy, G., (2004) *Computational Finance: Numerical Methods for Pricing Financial Finance*, ELSEVIER.

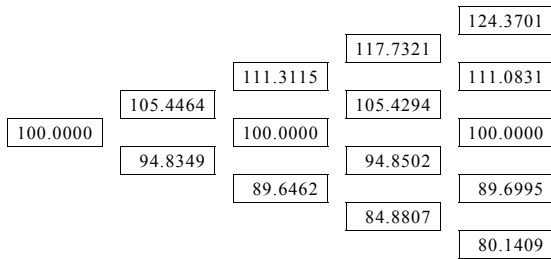
(くぼ とくじろう・同志社大学経済学部)

【付録 1】

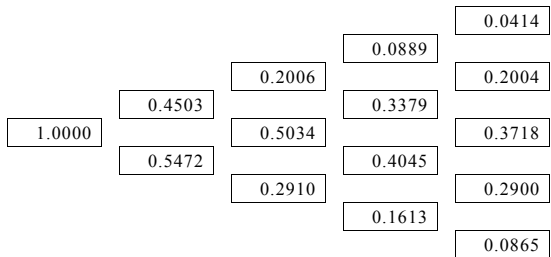
CCR ツリー上の原資産価格 (S)



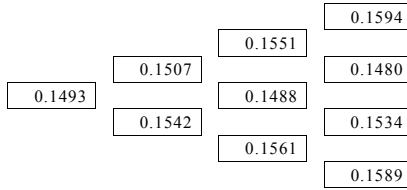
インプライド・ツリー上の原資産価格 (S)



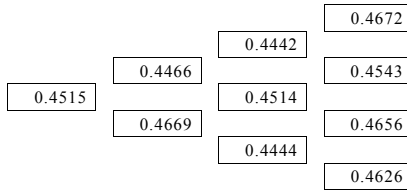
状態価格 (Q)



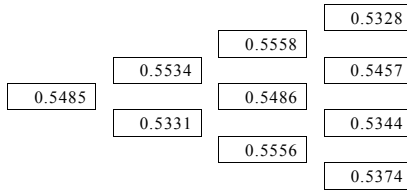
局所的ボラティリティ (LV)



上昇確率 (pu)



下落確率 (pd)



(注)

インプライド・2項ツリー・モデルの計算例. 計算に際しては, $S_{0,0} = 100$, $T = 0.5$, $\sigma_{0,0} = 0.15$, $w = 0.03$, $r = 0.02$ で, また外国利率は0.05である.

【付録 2】

状態価格 (Q)

				0.0232
			0.0510	0.0503
		0.1270	0.1097	0.1266
	0.3537	0.2251	0.2322	0.2062
1.0000	0.3221	0.3342	0.2590	0.2352
	0.3180	0.1936	0.1992	0.1747
		0.1076	0.0898	0.1025
			0.0406	0.0397
				0.0169

局所的ボラティリティ (LV)

				0.1730
			0.1618	0.1629
		0.1524	0.1528	0.1505
0.1511	0.1520	0.1498	0.1489	
	0.1555	0.1576	0.1547	
		0.1635	0.1645	
			0.1713	

上昇確率 (pu)

				0.4576
			0.4039	0.4092
		0.3613	0.3633	0.3534
0.3559	0.3598	0.3500	0.3465	
	0.3751	0.3846	0.3715	
		0.4115	0.4165	
			0.4489	

下落確率 (pd)

			0.4286
		0.3713	0.3769
	0.3258	0.3280	0.3173
0.3200	0.3242	0.3138	0.3100
	0.3405	0.3506	0.3367
		0.3794	0.3847
			0.4193

中間変動確率 (pm)

			0.1138
		0.2248	0.2139
	0.3129	0.3087	0.3293
0.3241	0.3160	0.3362	0.3435
	0.2844	0.2648	0.2918
		0.2091	0.1988
			0.1318

(注)

インプライド・3項ツリー・モデルの計算例. 計算に際しては, $S_{0,0} = 100$, $T = 0.5$, $\sigma_{0,0} = 0.15$, $w = 0.03$, $r = 0.02$ であり, また外国利子率は0.05である.

【付録 3】

```

void ImpliedTree(string USEU, double S0, double Strike, double Expiry,
                 double Interest, double F_Interest, double Sigma,
                 double w, int N)
{
    Double dt, u, pd1, pm1, pu1, a, R, S, Sd, Su, V, FP1, FP2, Se, Sum, Payoff,
        OptionValue;
    int i, j, k;
    double[,] pd=new double[N+1, 2*N+2];
    double[,] pu=new double[N+1, 2*N+2];
    double[,] LV=new double[N+1, 2*N+2]; // Local implied volatility
    double[,] Q=new double[N+1, 2*N+2];
    double[] Node=new double[2*N+2];
    sbyte h;

    if (callput=="call") // In case of call options
        h=1;
    else if (callput=="put") // In case of put options
        h=-1;

    dt=Expiry/N;
    u=Math.Exp(Sigma*Math.Sqrt(1.5*dt));
    R=Math.Exp(-Interest*dt); // Interest is domestic interest rate
    Q[0, 0]=1.0;
    a=Interest-F_Interest; // F_Interest is foreign interest rate

    for (i=0; i<=N-1; i++) {
        for (j=0; j<=i*2; j++) {
            Sum=0.0;
            S=S0*Math.Pow(u, j-i);
            Sd=S/u;
            Su=S*u;
            FP1=S*Math.Exp(a*dt);
            V=Sigma+w* Math.Abs((S-Strike)/Strike);
            If (j<(i*2)/2+1) {
                for (k=0; k<=j-1; k++) {
                    FP2=S0*Math.Pow(u, k-i)*Math.Exp(a*dt);
                    Sum+=Q[i, k]*(S-FP2);
                }
            }
            //Put Options
            OptionValue=Tree("put", S0, S, (i+1)*dt, Interest,
                             F_Interest, V, i+1);
        }
    }
}

```

```

pd1=(Math. Exp(Interest*dt)*OptionValue-Sum)
    /(Q[i, j]*(S-Sd));
pu1=(FP1+pd1*(S-Sd)-S)/(Su-S);
}
else{
  for (k=j+1;k<=i*2;k++) {
    FP2=S0*Math. Pow(u, k-i) *Math. Exp(a*dt);
    Sum+=Q[i, k]*(FP2-S);
  }
  //Call Options
  OptionValue=Tree("call", S0, S, (i+1)*dt, Interest,
    F_Interest, V, i+1);
  pu1=(Math. Exp(Interest*dt) *OptionValue-Sum)
    /(Q[i, j]*(Su-S));
  pd1=(FP1-pu1*(Su-S)-S)/(Sd-S);
}
// In case of negative probabilities *****
if (pu1<0.0 || pu1>1.0 || pd1<0.0 || pd1>1.0) {
  if (FP1>S && FP1<Su) {
    pu1=0.5*((FP1-S)/(Su-S)+(FP1-Sd)/(Su-Sd));
    pd1 =0.5*((Su-FP1)/(Su-Sd));
  }
  else if (FP1>Sd && FP1<S) {
    pu1=0.5*((FP1-Sd)/(Su-Sd));
    pd1=0.5*((Su-FP1)/(Su-Sd)+(S-FP1)/(S-Sd));
  }
}
pm1=1-pd1-pu1;
pd[i, j]=pd1;
pu[i, j]=pu1;
// *****
// Calculation of implied local volatilities *****
Se=pu1*Su+pd1*Sd+pm1*S;
LV[i, j]=Math. Sqrt((pu1*Math. Pow(Su-Se, 2)
  +pm1*Math. Pow(S-Se, 2)
  +pd1*Math. Pow(Sd-Se, 2))
  /(Math. Pow(S, 2)*dt));
// *****
if (i == 0) {
  Q[1, 0]=pd1*Q[0, 0]*R;
  Q[1, 1]=pm1*Q[0, 0]*R;
  Q[1, 2]=pu1*Q[0, 0]*R;
}

```

```

    }
    else if (i>0 && j==0)
        Q[i+1, j]=pd1*Q[i, j]*R;
    else if (i>0 && j==1)
        Q[i+1, j]=((1-pu[i, j-1]-pd[i, j-1])*Q[i, j-1]
            +pd1*Q[i, j])*R;
    else if (i>0 && j==i*2) {
        Q[i+1, j]=(pu[i, j-2]*Q[i, j-2]+(1-pu[i, j-1]-pd[i, j-1])
            *Q[i, j-1]+pd1*Q[i, j])*R;
        Q[i+1, j+1]=(pu[i, j-1]*Q[i, j-1]+pm1*Q[i, j])*R;
        Q[i+1, j+2]=pu1*Q[i, j]*R;
    }
    else
        Q[i+1, j]=(pu[i, j-2]*Q[i, j-2]+(1-pu[i, j-1]-pd[i, j-1])
            *Q[i, j-1]+pd1*Q[i, j])*R;
}
}
// Valuation of options using the implied trinomial tree *****
for (i=0; i<=2*N; i++) {
    Node[i]=h*(S0*Math.Pow(u, i-N)-Strike);
    if (Node[i]<0) Node[i]=0.0;
}
if (USEU=="European") { // In case of European options
    for (i=N-1; i>=0; i--) {
        for (j=0; j<=i*2; j++) {
            Node[j]=(pu[i, j]*Node[j+2]+(1-pu[i, j]-pd[i, j])
                *Node[j+1]
                +pd[i, j]*Node[j])*R;
        }
    }
}
else if (USEU=="American") { // In case of American options
    for (i=N-1; i>=0; i--) {
        for (j=0; j<=i*2; j++) {
            Payoff=h*(S0*Math.Pow(u, j-i)-Strike);
            Node[j]=(pu[i, j]*Node[j+2]+(1-pu[i, j]-pd[i, j])
                *Node[j+1]+pd[i, j]*Node[j])*R;
            if (Node[j]<Payoff) Node[j]=Payoff;
        }
    }
}
}
}
}

```



```

double Tree(string callput,double S0,double Strike,double Expiry,
            double Interest,double F_Interest,double Sigma,int N)
{
    double[] Node = new double[2*N+2];
    double dt,u,pu,pd,pm,R,MM,VV;
    int i,j;
    sbyte h;

    if (callput=="call")
        h=1;
    else if (callput=="put")
        h=-1;

    dt=Expiry/N;
    R=Math.Exp(-Interest*dt);
    u=Math.Exp(Sigma*Math.Sqrt(1.5*dt));
    MM=Math.Exp((Interest-F_Interest)*dt);
    VV = Math.Exp(Sigma*Sigma*dt);
    pu=(1-MM*(1+u)+MM*MM*u*VV)/(1-u)*(1-u)*(1+u);
    pd=u*u*(u-MM*(1+u)+MM*MM*VV)/(1-u)*(1-u)*(1+u);
    pm=1-pu-pd;

    for (i=0;i<=2*N;i++){
        Node[i]=h*(S0*Math.Pow(u,i-N)-Strike);
        if (Node[i]<0) Node[i]=0.0;
    }
    for (i=N-1;i>=0;i--){
        for (j=0;j<=2*i;j++){
            Node[j]=(pu*Node[j+2]+pm*Node[j+1]+pd*Node[j])*R;
        }
    }
    return Node[0];
}

```

(注)

インプライド・3項ツリーによるオプション価格の数値計算プログラム例。
使用プログラミング言語はVisual C# 2008.

The Doshisha University Economic Review Vol.61 No.2

Abstract

Tokujiro KUBO, *On the Implied Tree Model*

This paper considers the implied tree models and presents their numerical methods for pricing options using Visual C# 2008. The implied tree is built to be consistent with the market prices of plain-vanilla European options and reflects the volatility smile. It can, therefore, be regarded as the generalization of the standard tree with constant volatility. The implied trinomial tree model is superior to the binomial version in that the former is more stable because its rate of increase of underlying asset prices is constant.