The Science and Engineering Review of Doshisha University, Vol. 52, No. 1 April 2011

The Inverse Problem of Determination of the Heat Source in the 1D Heat Equation

Jiichiro URABE* Yorimasa OSHIME** Hideki TAKUWA*** and Shota SAKURAI****

(Received January 20, 2011)

First of all, we think the uniform stick that the heat source exists in inside. The heat equation with the heat source is considered in this paper. As assumption, the special conditions are imposed to the heat source. We consider the inverse problem that decides the heat source from the observational data of temperature of the uniform stick at one point. Then, we find the unknown function of the heat source from the observational data of the stick at one point excluded a certain points of limited piece. In the theory of Yamamoto-kim (2008), though the uniqueness of determination of the heat source has been proven, the reconstruction of the heat source is not considered. The reconstruction method of the heat source is considered in this paper. Result, we find the heat source by imposing the special conditions to the heat source.

Key words : inverse problem, heat source

キーワード : 逆問題，熱源

一次元熱方程式における熱源決定逆問題

浦 部 治 一 郎・ 押 目 頼 昌・ 多 久 和 英 樹・ 櫻 井 翔 太

1. 緒言

ある問題を解くときには，初期値などの「原因」，方程式などの「モデル」から,「結果」である解を求める順問題が一般的である．それに対し，現在の工学，理学，医学などの様々な分野で「応答」や「結果」などの出力から,「原因」や「入力」を推定する逆問題という分野が広く取り扱われるようになってきている．

逆問題の具体的な応用例としては，たとえば，医学診断のためのＭＲＩ，発震機構，すなわち震源におけるダイナミクスの決定，亀裂の探知，画像復元など様々ものがあげられる [1)]．しかし，逆問題は一般的に順問題とは違い，解くことは困難であると言われている．

そこで本研究では，

- 一様な棒の温度を測定し，見ることのできない状態の不明な熱源を推定する

これを扱うことを目的としている．

そこで，熱源の条件を

* Department of Factory of Culture and Information Science, Doshisha University.
Telephone:+81-774-65-7610, E-mail:jurabe@mail.doshisha.ac.jp
** Department of Science and Engineering, Doshisha University.
Telephone:+81-774-65-6494, E-mail:yoshime@mail.doshisha.ac.jp
*** Department of Science and Engineering, Doshisha University.
Telephone:+81-774-65-6431, E-mail:htakuwa@mail.doshisha.ac.jp
*** *Department of Science and Engineering, Doshisha University.
Telephone:+81-774-65-6481, E-mail:dtj0361@mail4.doshisha.ac.jp

$$Q(x,t)=\mu(t)f(x), \qquad 0<x<\pi, \qquad t>0$$

とおく．ただし，

$$\mu(t)=e^{-\sigma t}$$

であるとして，新たに熱源の条件を設定した．棒の区間内の一点での観測データから熱源を決定する逆問題を考察した結果，熱源を決定することができた．

2. 結果

内部に熱源が存在する長さが π の一様な棒を考える．棒の内部の場所を x，時刻を t，場所 x 時刻 t における棒の温度を $u(x,t)$ とする．熱源のある熱伝導方程式を考え，そのときの初期条件，境界条件はともに 0 とする．$nx=k\pi(n=1,...,N,k=1,...,N)$ となる有限個の点 x を除いた棒の区間内の一点を x_0 とし，その点での観測データ $u(x_0,t)$ から，未知の熱源を決定する逆問題を考える．その結果，熱源の形に条件を与えてやることで，熱源の未知であった部分を求めることができた．

3. 熱源決定逆問題の数学的記述

本来順問題としての形は，過去の温度と，関数の形がわかっている熱源から，未来の温度を求めるという問題である．それに対し今回扱う問題は，棒内部の一点での温度の観測データ $u(x_0,t)$ から未知の熱源 $Q(x,t)$ を推定しようとする問題である．

ディリクレ境界条件の下で，熱源のある熱方程式，

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+Q(x,t), \quad 0<x<\pi, \ t>0 \quad (1)$$

を考え，そのとき初期条件は，

$$u(x,0)=0, \qquad 0<x<\pi, \qquad (2)$$

境界条件は，

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \qquad t>0 \qquad (3)$$

とする．

このとき熱源の条件を

$$Q(x,t)=\mu(t)f(x), \qquad 0<x<\pi, \qquad t>0 \quad (4)$$

という時間の関数と空間の関数の積の形で新たに考えることにする．$f(x)$ が決定したい関数とする．そのため $\mu(t)$ はあらかじめわかっているという設定である．このとき区間内の一点 $x_0\in(0,\pi)$ での観測データから，熱源に表れる関数 $f(x)$ を決定する逆問題を考察する．ここでの観測データは一点に限定されており，情報量は少ないが温度計などを設置することで実現できる．

逆問題では，順問題の手順の逆を辿ることで未知の関数 $f(x)$ を求めることができそうである．それを確かめるために具体的な形として，

$$\mu(t)=e^{-\sigma t}$$

として，求めたい逆問題の解の形を，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx \qquad (5)$$

とする．ただし $b_n(n=1,...,N)$ は未知である．この数列 $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ を求めたい．

4. 主定理

内部に熱源の存在する一様な棒の熱伝導方程式を考える．$u(x,t)$ を場所 x，時刻 t における棒の温度とすると，

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+Q(x,t), \quad 0<x<\pi, \ t>0 \quad (6)$$

となり，そのときの初期条件は，

$$u(x,0)=0, \qquad 0<x<\pi \qquad (7)$$

であり，境界条件は，

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \qquad t>0 \qquad (8)$$

とする．そのとき，仮定として熱源の条件を

$$Q(x,t)=\mu(t)f(x), \qquad 0<x<\pi, \qquad t>0 \quad (9)$$

とおく．ただし $\mu(t)$ は，

$$\mu(t) = e^{-\sigma t} \tag{10}$$

とわかっているものとする．$\sin nx = 0(n = 1, ..., N)$，すなわち $nx = k\pi(n = 1, ..., N, k = 1, ..., N)$ となる有限個の x を除いた区間内の一点 x_0 での観測データ $u(x_0, t)$ から，熱源の求めたい部分である $f(x)$ を決定する逆問題を考える．

求めたい関数を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx \tag{11}$$

と設定する．ただし $b_n(n = 1, ..., N)$ は未知である．

このとき今回の逆問題は次の様な定理となる．

定理 [熱源決定逆問題]

$u(x, t)$ が式 (6)- (8)，$Q(x, t)$ が式 (9) で与えられ，$\mu(t)$ を式 (10) のものとする．また $f(x)$ を式 (11) とする．

このとき，ある有限個の点を除いた x_0 に対して $u(x_0, t)(t > 0)$ を与えれば，一意的に数列 $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ が構成できる．

つまり，未知の熱源 $Q(x, t) = \mu(t)f(x)$ が構成できる．

5. 本研究と先行結果の比較・及び改善点

5.1 先行結果

先行結果として，山本・金 [2]，p.60 の定理を以下で紹介する．

熱源のある熱方程式，

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + Q(x, t), \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0 \tag{12}$$

を考え，そのとき初期条件は，

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < \pi \tag{13}$$

であり，境界条件は，

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t > 0 \tag{14}$$

とする．

熱源として，

$$Q(x, t) = \mu(t)f(x), \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0 \tag{15}$$

の形を考える．このとき，$f(x)$ を区間内の一点 $x_0 \in (0, \pi)$ での観測データから決定する逆問題を考察している．

ここで，

$$\mu \in C^1[0, \infty), \tag{16}$$

$$f \in C^5[0, \pi], \tag{17}$$

$$\frac{d^j f}{dx^j}(0) = \frac{d^j f}{dx^j}(\pi) = 0, \quad j = 0, 1, ..., 4 \tag{18}$$

としている．

$\mu(t)$ はわかっているとして，$f(x)$ を求める問題を考える．

このとき，この逆問題では次のことがわかる．

定理 (山本・金 [2]，p.60)

$u(x, t)$ が式 (12)-(14)，$Q(x, t)$ が式 (15) で与えられている．また $\mu(t)$ は式 (16)，$f(x)$ は式 (17)(18) の条件が与えられている．そして $\mu(0) \neq 0$ を仮定する．

このとき観測点 x_0 は，$\dfrac{x_0}{\pi}$ が無理数であると仮定する．この x_0 に対応する $u(x_0, t)$ を与えれば，$f(x)$ を一意的に求めることができる．

5.2 先行結果と本研究との比較・改善点

先行結果と本研究の目的をそれぞれあげてみる．

(先行結果)

- 熱源決定逆問題の数学的記述
- 熱源決定の一意性の証明
- $f(x)$ は式 (17)(18) の仮定の下

(本研究)

- 熱源決定逆問題の数学的記述

- 熱源決定の具体的な再構成
- $f(x)$ は式 (17)(18) の仮定に当てはまらない

先行結果においては，熱源決定逆問題の数学的記述はなされているが，そこでは一意性の証明をすることが目的である．従って具体的な熱源の再構成の手順については述べられていない．それに対し本研究では，具体的な熱源の再構成も行った．

そして先行結果では，$f(x)$ は式 (17)(18) の仮定に当てはまらなければならなかったが，本研究では $f(x)$ は式 (17)(18) の仮定に当てはまらないものも考えることができる．

6. 熱源決定逆問題の解法

6.1 順問題での解とその構成手続き

この場合の順問題は，熱源の関数の形がわかっていて，解である未来の温度分布を求めるという問題である．

順問題の解公式は，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\{\int_0^t e^{-n^2(t-s)}\{\int_0^\pi \mu(s)f(y)\sin nydy\}ds\}\sin nx$$

となる．

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\sin nydy \qquad (19)$$

とおくと，$x=x_0$ を代入して $u(x_0,t)$ とすると

$$u(x_0,t)=\int_0^t\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2(t-s)}a_n\sin nx_0\}\mu(s)ds$$

となる．ここで

$$k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2t}a_n\sin nx_0 \qquad (20)$$

とおくと，

$$u(x_0,t)=\int_0^t k(t-s)\mu(s)ds$$

となり，変数変換により，

$$u(x_0,t)=\int_0^t \mu(t-s)k(s)ds \qquad (21)$$

を得る．

厳密にはこの場合の順問題は $u(x,t)$ を求める問題である．ここでは $u(x,t)$ に $x=x_0$ を代入して $u(x_0,t)$ とする手順も考えている．整理すると，式 (19)- (21) の手順を順に踏むことで $u(x_0,t)$ を求めることができる．

具体的に順問題を解いていく．式 (19) より $f\to a_n$ は，

$$a_n=b_n \qquad (n=1,...,N)$$

となる．次に式 (20) より，$a_n\to k(t)$ は，

$$k(t)=\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2t}b_n\sin nx_0$$

となる．そして式 (21) より $k(t)\to u(x_0,t)$ は，

$$u(x_0,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n\sin nx_0}{\sigma-n^2}(e^{-n^2t}-e^{-\sigma t})$$

となり，これで $u(x_0,t)$ が求まった．

6.2 逆問題での熱源 $\{b_n\}$ の構成手順 [6)]

次に逆問題での熱源の構成手順について述べる．順問題で求めた $u(x_0,t)$ を観測データと考えて，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}b_n\sin nx$$

の未知の部分である $b_n(n=1,...,N)$ を求めていく．

$u(x_0,t)\to k(t)$ として式 (21) の逆の手順を考える．$u(x_0,t)\in C^1[0,\infty)$ ならば，

$$k(t)=u_t(x_0,t)+\sigma u(x_0,t)$$

となり，これに先ほど求めた順問題の解を代入すると，

$$k(t)=\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2t}b_n\sin nx_0 \qquad (22)$$

となる．

次に $k(t)\to a_n$ を考える．$d_n=b_n\sin nx_0$ とおいて d_1 から順に求めていく．式 (22) を変形すると，

$$d_1=e^tk(t)-e^{-t}\sum_{n=2}^{N}d_ne^{(-n^2+2)t}$$

となる．式 (20) の $k(t)$ を代入して $t \to \infty$ とすると第二項は第一項に比べ無視できて，

$$d_1 = \lim_{t\to\infty} e^t k(t) = a_1 \sin x_0$$

となって，$a_1 = b_1$ となる．ここで $\sin x_0 \neq 0$ でなければならないことがわかる．$n = 2$ 以降も同様の手法で解くことができ，

$$a_n = b_n \qquad\qquad (n = 1, ..., N)$$

となる．そして先ほどと同様に $\sin nx_0 \neq 0$ でなければならない．よって観測点である x_0 は，$\sin nx = 0 (n = 1, ..., N)$，すなわち $nx = k\pi (n = 1, ..., N, k = 1, ..., N)$ となる x を除いた点でなければならないことがわかる．これが観測点 x_0 の条件である．

最後に $a_n \to f$ として式 (19) の逆を考えると，$f(x)$ は正弦級数であるので，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

である．先ほど求まった a_n を代入すると，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$$

となり求めたい形の解を求めることができた．よって $\mu(t) = e^{-\sigma t}$ のとき熱源を再構成することができた．

6.3 有限時間の観測データの場合

逆問題の $k(t) \to a_n$ のときに，観測データ $u(x_0, t)$ の t が有限の区間に含まれる場合を考える．

T は正定数とすると，式 (22) より

$$\begin{aligned}
k(T) &= e^{-T}d_1 + e^{-4T}d_2 + \cdots + e^{-N^2T}d_N \\
k(2T) &= e^{-2T}d_1 + e^{-8T}d_2 + \cdots + e^{-2N^2T}d_N \\
k(3T) &= e^{-3T}d_1 + e^{-12T}d_2 + \cdots + e^{-3N^2T}d_N \\
&\vdots \\
k(NT) &= e^{-NT}d_1 + e^{-4NT}d_2 + \cdots + e^{-N^3T}d_N
\end{aligned}$$

であり，ここで $v_n = e^{-n^2T}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} k(T) \\ k(2T) \\ \vdots \\ k(NT) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_N \\ v_1^2 & v_2^2 & \ldots & v_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^N & v_2^N & \ldots & v_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}$$

となる．

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_N \\ v_1^2 & v_2^2 & \ldots & v_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^N & v_2^N & \ldots & v_N^N \end{pmatrix}$$

とおくと，ヴァンデルモンドの行列式より V の行列式は，

$$\begin{aligned}
|V| &= \prod_{1\le j\le N} v_j \prod_{1\le j\le i\le N} (v_j - v_i) \\
&= \prod_{1\le j\le N} e^{-j^2T} \prod_{1\le j\le i\le N} (e^{-j^2T} - e^{-i^2T})
\end{aligned}$$

となり $|V| \neq 0$ より，V は逆行列が存在するので，d_n を求めることができる．

このように t を $T, 2T, 3T, \ldots, NT$ と等間隔に取ってやることで d_n を求めることができる．

7. 結言

本研究では，逆問題を解いて，一様な棒の熱源を決定することが目的であった．そのために熱源に $Q(x,t) = \mu(t)f(x)$ という条件を与えた．そして $\mu(t)$ はわかっているものとして，未知の関数 $f(x)$ を求める問題を考察した．さらに $f(x)$ に

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$$

という解の形を考え，未知である $\{b_n\}$ を求める問題に帰着した．

その結果，ある有限個の点を除いた区間内の一点での温度の観測データから，熱源の求めたい関数である $f(x)$ を決定することができた．

山本・金 [2]，p.60 の先行結果においては，熱源決定の逆問題の一意性は証明されているが，熱源決定の具体的な解法については触れられていない．

本研究では，熱源決定の具体的な解法について考察し，特殊な条件の下で熱源を決定することができた．

本研究は 2009 年度同志社理工学研究所研究助成金の補助を受けて行われましたことを記し，関係各位に感謝御礼申し上げます．

参 考 文 献

1) 久保司郎, “ 逆問題の考え方と枠組み ”，数理科学，403 巻，1 号 (1998)，pp28-33.
2) 山本昌弘，金成喚，「熱方程式で学ぶ逆問題」，（サイエンス社，東京，2008）
3) 洲之内治男,「改訂　関数解析入門」,（サイエンス社，東京，1975）
4) 堤正義,「逆問題の数学」,（共立出版，東京，2000）
5) Victor Isakov, *Inverse Source Problems*, American Mathematical Society, (1990)
6) Victor Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, (2006)
7) 登坂宣好,「逆問題の数理と解法」,（東京大学出版会，東京 1999）
8) 谷島賢二,「ルベーグ積分と関数解析」,（朝倉書店，東京，2002）
9) 山本昌宏,「逆問題入門」,（岩波書店，東京，2002）
10) 林克行,「数学の楽しみ」,（日本評論社，東京，2007）