【論　説】

Brouwer の不動点定理による NTU コアの存在証明

田　中　靖　人*

1　は　じ　め　に

NTU（譲渡不可能効用）ゲームにおける「平衡ゲームにコアが存在する」というコアの存在定理は Scarf（1967）によってある種のアルゴリズムを用いる形で証明されたが，後に Shapley（1973）が Kakutani の不動点定理によって K-K-M-S 定理と呼ばれる定理を証明し，それを用いてコアの存在を証明した．また Shapley と Vohra（1991）は Kakutani の不動点定理を用いて直接コアの存在定理を証明した．その後 Zhou（1994）は Brouwer の不動点定理によって n 次元単体を覆う開集合族に共通部分が存在するという結果を証明し，それを用いてコアの存在証明を与えている．本稿の目的はこの Zhou による二段階の証明を統一し，直接 Brouwer の不動点定理を用いたコアの存在定理の証明を解説することである[1)]．

2　NTU ゲームとそのコア

協力ゲームにはプレイヤーの利得（あるいは効用）が譲渡可能（transferable）であると考える TU (transferable utility) ゲームと，譲渡不可能であると考える NTU (non-transferable utility) ゲームの 2 種類がある．TU ゲームにおいては何人

＊　本研究は，文部科学省科学研究費補助金基盤研究（C）（課題番号 20530165）の補助，および全国銀行学術振興財団からの補助を受けている．

1）　本稿は田中靖人，(2007)「わかった気になる？一般均衡理論――ブラウワーの不動点定理の証明付き――」『同志社大学経済学論叢』第 59 巻第 3 号の続編である．

かのプレイヤーのグループ（「提携（coalition)」と呼ぶ）S が達成できる利得の和を実数 $v(S)$ で表したとき，その $v(S)$ をグループ全員で自由に分けることができると仮定されている．一方 NTU ゲームではそのグループに含まれる個々のプレイヤーの利得をベクトルで表し，そのグループで達成可能な利得がベクトルの集合 $V(S)$ で表現される．そのようなゲームを V で表す．

具体的に NTU ゲームのモデルを説明しよう．プレイヤーは n 人（2 人以上有限の人数）でその集合を N とする．N の部分集合 S について，その提携で達成可能な（n 次元の）利得ベクトルの集合を $V(S)$ とする．全員の提携については $V(N)$ で表す．プレイヤー i が 1 人で達成できる利得の集合は $V(\{i\})$ である．$V(S)$ について以下の仮定をおく．

仮定 1　各 S（$S=N$ および $S=\{i\}$ の場合も含む，以下同様）について $V(S)$ は上に有界な閉集合であり，空集合ではない．

仮定 2　あるベクトル x が $V(S)$ に含まれ，$y \leq x$（各成分について $y_i \leq x_i$）ならば $y \in V(S)$ である．この条件が成り立つとき $V(S)$ は包括的（comprehensive）であると言う．ある利得ベクトルが達成可能ならば，それより小さい利得も達成可能であろう．

仮定 3　あるベクトル x が $V(S)$ に含まれ，別のベクトル y が「S に含まれるすべてのプレイヤー i について $x_i = y_i$」を満たすならば $y \in V(S)$ である．このとき $V(S)$ はシリンダーであると言う．あるベクトルが $V(S)$ に含まれるか否かは S に含まれるプレイヤーの利得だけに依存し，S 以外のプレイヤーについてベクトルの成分が異なっていてもかまわないという条件である．$V(S)$ は S の提携によって達成可能な S の人々の利得を表す集合であるから，S 以外の人々の結果がどうなろうと関係はない．しかし $V(S)$ は上に有界なので，ある実数を r として利得ベクトルの各成分は r 以下である．

仮定 4　1 人のプレイヤーに関する $V(S)$ である $V(\{i\})$ におけるプレイヤー i の利得はある正の値を含む．形式的に書けば，ある $b_i > 0$ があって

$V(\{i\})=\{x\in R^n|x_i\leq b_i\}$．プレイヤーの利得としてフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン型の効用関数を考えるならば，この仮定に問題はない．分析を容易にするための仮定である．

ある $x\in V(N)$ と提携 S について別のベクトル $y\in V(S)$ があって S に含まれるすべての i について $y_i > x_i$ が成り立つとき「提携 S が x を改善する」と言う．$V(N)$ に含まれるベクトルのうち，いかなる提携によっても改善されないベクトルの集合がコアである．ゲーム V のコアを Core(V) と書く．

次に「平衡ゲーム」を定義する．$|S|$ で提携 S の人数を表す．また m^S を S に含まれる i について $m_i^S=\frac{1}{|S|}$，それ以外の i について $m_i^S=0$ であるような（n 次元の）ベクトルであるとする．したがって m^N は各成分が $\frac{1}{n}$ であるようなベクトルを表す．N の部分集合の族（集合の集合）を F として

$$\sum_{S\in F}\lambda_S m^S=m^N$$

を満たす正の実数 λ_S が各 $S\in F$ について存在するとき，F は平衡集合族（balanced collection of sets）であると言う．この式を各成分 i について書くと $\sum_{S\in F,\ i\in S}\frac{\lambda_S}{|S|}=\frac{1}{n}$ より

$$\sum_{S\in F,\ i\in S}\frac{n}{|S|}\lambda_S=1 \tag{1}$$

となる．つまりプレイヤー i を含むすべての提携 S について $\frac{n}{|S|}\lambda_S$ を合計すると 1 になる，ということがすべてのプレイヤーについて成り立つ．そのとき λ_S の値は S に含まれるすべての i について共通でなければならない．また，ある提携 S に含まれるプレイヤーの数は $|S|$ 人であるから(1)の左辺をプレイヤー全員について合計すると $\sum_{S\in F}n\lambda_S$ となり，それは n に等しいから $\sum_{S\in F}n\lambda_S=n$

より

$$\sum_{S \in F} \lambda_S = 1$$

が得られる．すなわち平衡集合族の λ_S の和は 1 に等しい．

簡単な例を考えてみよう．$N=\{1,2,3,4\}$, $S_1=\{1,2\}$, $S_2=\{2,3\}$, $S_3=\{3,4\}$, $S_4=\{1,4\}$ とすると，$\lambda_{S_1}=\lambda_{S_2}=\lambda_{S_3}=\lambda_{S_4}=\frac{1}{4}$ として S_1，S_2，S_3，S_4 が平衡集合族になる．また $S_1=\{1,2,3\}$，$S_2=\{2,3,4\}$，$S_3=\{4,1\}$ の場合も，$\lambda_{S_1}=\lambda_{S_2}=\frac{3}{8}$，$\lambda_{S_3}=\frac{1}{4}$ として S_1，S_2，S_3 が平衡集合族になる．

すべての平衡集合族 F について

$$\bigcap_{S \in F} V(S) \subset V(N)$$

が成り立つとき，このゲーム V は平衡ゲーム（balanced game）であると言う．

$V(N)$ の境界を $Bd(V(N))$，$V(S)$ の内部を $\mathrm{Int}(V(S))$，R^n のうち，すべての成分が非負であるベクトルの集合（非負象限）を R^n_+ とし，

$$Q = Bd(V(N)) \cap R^n_+$$

とおく．Q は全員の提携で達成可能な利得ベクトルの集合の境界（最も外側，フロンティア）のうち，すべての成分が非負のベクトルからなる部分である．また $V(S)$ の内部と Q の共通部分を

$$U_S = \mathrm{Int}(V(S)) \cap Q$$

と表す．ベクトル $x \in Q$ がある S について（$S=N$ の場合も含めて）U_S に含まれるとき U_S は開集合であるから U_S 内（したがって $V(S)$ 内）に x の近傍（x を含む開集合）があり，その近傍には x よりも各成分が大きいベクトルも存在するので x は S によって改善される．したがって x はコアに含まれない[2)]．逆にベ

2)　$V(N)$ の内部の点は同様の理由でコアの条件を満たさないので，$V(N)$ の境界をとることによって Q からは除かれている．

クトル $x \in Q$ がどの S についても（$S=N$ の場合も含めて）U_S に含まれないならば，いかなる S によっても改善されないので x はコアに含まれる[3)]．したがってコアは次のように表される．

$$\mathrm{Core}(V)=Q \backslash \left(\bigcup_{S \subset N} U_S\right)$$

もしゲーム V がコアを持たなければ（$\mathrm{Core}(V)=Q \backslash (\cup_{S \subset N} U_S)=\emptyset$ であれば）

$$\bigcup_{S \subset N} U_S = Q$$

である．

証明すべきは次の定理である．

定理 1　平衡ゲームにはコアが存在する．

その証明は次節に回し，ここでは準備として 2 つの結果を示す（これらの結果は Zhou [4] による）．

補題 1　1. 次の式が成り立つ．

$$Q \cap \{x \in R^n \mid x_i = 0\} \subset U_{\{i\}}$$

$\{x \in R^n \mid x_i = 0\}$ はプレイヤー i の利得が 0 であるような利得ベクトルの集合である．

2. ゲーム V は平衡ゲームであるとする．$Q = Bd(V(N)) \cap R^n_+$ は $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} と同相（homeomorphic）である．

証明　1. 仮定 4 によってプレイヤー i の利得が 0 であるような利得ベクトルのすべてが $V(\{i\})$ の内部 $\mathrm{Int}(V(\{i\}))$ に含まれるから，そのような利得ベクトルの集合，すなわち $\{x \in R^n \mid x_i = 0\}$ と Q との共通部分は $\mathrm{Int}(V(\{i\}))$ と Q との共通部分である $U_{\{i\}}$ に含まれる．

2. Q から Δ^{n-1} への写像として

3)　あるベクトル x が任意の $V(S)$ の境界に含まれるならば包括性の条件によりすべての成分について x より小さいベクトルは $V(S)$ の内部に含まれており境界には含まれない．したがって $V(S)$ の境界上のベクトルは S によって改善されない．また，各プレイヤーは仮定 4 により自分一人で正の利得を実現できるので，コアは Q 内に限定される．

$$g(x)=\frac{x}{\sum_{i=1}^{n}x_i} \tag{2}$$

をとる．仮定 4 における b_i を各成分とするベクトルを b で表す．この仮定と仮定 3 により次の式が成り立つ．

$$\forall i \in N,\ \ b \in V(\{i\})$$

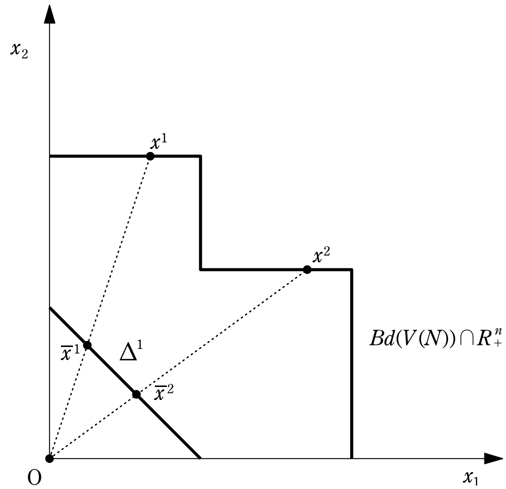
$V(\{i\}), i=1, 2, \ldots, n$ は $\lambda_{\{i\}}$ を $\dfrac{1}{n}$ として平衡集合族であるから

$$b \in \bigcap_{i\in N} V(\{i\}) \subset V(N)$$

が成り立つ．仮定 2 により $V(N)$ が包括的であるから，原点 O$(x=0)$ が $V(N)$ にその内部の点として含まれる．すなわち

$$0 \in \mathrm{Int}(V(N))$$

したがって $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ は原点を含まないので，Q の点 x について $\sum_{i=1}^{n}x_i \neq 0$ であるから上の $g(x)$ が問題なく定義できる．$g(x)$ は $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点 x を，原点とその x を結ぶ線分を $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1}（$n=2$ の場合は (1, 0) と (0, 1) を結ぶ線分）まで延ばした（あるいは縮めた）交点に対応させる写像である．どの点に対応するかは x の各成分の比によって決まり，その比が異なれば $\dfrac{x}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ の成分が異なるので異なる点に対応する．逆に Δ^{n-1} の点 $\dfrac{x}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ から $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点 x への対応を考えると，$V(N)$ が包括的であることにより x と原点の間の点はすべて V(N) の内部に含まれるので，$\dfrac{x}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ が対応する $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点は 1 つしかない．さらに $V(N)$ が包括的であることにより上記のベクトル b が $V(N)$ に含まれるから，各成分について $0 \leq x_i \leq b_i$ であるようなすべてのベクトルが $V(N)$ に含まれるので，原点 O と任意の Δ^{n-1} 上の点を通る線分を延長した直線は必ず $Bd(V(N))$ と交わる．$g(x)$ が連



続であることは明らかである．以上によって $g(x)$ は同相写像（連続な全単射）であり，$Bd(V(N))\cap R^n_+$ と $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} は同相である．　□

図は $n=2$ の場合の例を描いている．この図で x^1，x^2 が $Bd(V(N))\cap R^n_+$ 上の点の例であり，$\bar{x}^1=\dfrac{x^1}{\sum_{i=1}^n x_i^1}$，$\bar{x}^2=\dfrac{x^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ はそれらに対応する Δ^1 上の点の例である．

3　定理の証明

前節の分析により，ゲーム V にコアが存在しなければ $\cup_{S\subset N}U_S=Q$ が成り立つ．コアが存在しないと仮定して矛盾を導く．各 S について U_S の Q における補集合を U_S^c で表す．U_S は開集合であり，すべての i について $Q\cap\{x\in R^n\,|\,x_i=0\}\subset U_{\{i\}}$ であるから，ある正の実数 α があって任意の i について次の式が成り立つ．

$$x_i\le\alpha\longrightarrow|x,\,U_{\{i\}}^c|\ge\alpha$$

ここでx_iはベクトルxの第i成分であり，$|x, U^c_{\{i\}}|$はxと$U^c_{\{i\}}$との距離を表す．$U_{\{i\}}$は開集合なのでx_iが十分に小さければxは$U_{\{i\}}$に含まれる．そのときxと$U^c_{\{i\}}$との距離はある実数ε以上となる．εがα以上ならばその距離はα以上であり，εがαより小さければそのεを改めてαとすればよい．なお$U^c_{\{i\}}=\emptyset$のときには$|x, U^c_{\{i\}}|=1$とする．ここで次の関数を定義する．

$$|S|\geq 2 \text{ であるような } S \text{ について，} k_S(x)=\begin{cases} 0, & \text{ある } i \text{ について } x_i \leq \alpha \text{ のとき} \\ |x, U^c_S|, & \text{すべての } i \text{ について } x_i > \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{各 } i \text{ について，} k_{\{i\}}(x)=\min(|x, U^c_{\{i\}}|, \alpha)$$

上記（2）のQとΔ^{n-1}との同相写像の逆写像g^{-1}を用いて

$$|S|\geq 2 \text{ であるような } S \text{ について，} \bar{k}_S(\bar{x})=k_S(x)\circ g^{-1}(\bar{x})=\begin{cases} 0, & \text{ある } i \text{ について } x_i \leq \alpha \text{ のとき} \\ |x, U^c_S|, & \text{すべての } i \text{ について } x_i > \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{各 } i \text{ について，} \bar{k}_{\{i\}}(\bar{x})=k_{\{i\}}(x)\circ g^{-1}(\bar{x})=\min(|x, U^c_{\{i\}}|, \alpha)$$

のように表す．ここで$\bar{x}=\dfrac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$である．これらを用いて

$$f_S(\bar{x})=\frac{\bar{k}_S(\bar{x})}{\sum_{S\subset N}\bar{k}_S(\bar{x})}$$

を定義する．この関数について以下の性質が成り立つ．

補題２　1. $\sum_{S\subset N}\bar{k}_S(\bar{x})>0$である．

2. $f_S(\bar{x})>0$ならば$x\in U_S$である．

3. あるiについて$x_i\leq\alpha$ならば$f_i(\bar{x})\geq\dfrac{1}{n}$である．

証明　1. $x\in Q$とする．$\cup_{S\subset N} U_S=Q$であるからxはいずれかの$U_{\{i\}}$に含まれるか，もしそうでなければ$|S|\geq 2$であるようなU_Sのいずれかに含まれている．前者の場合$|x, U^c_{\{i\}}|>0$である．後者の場合は

$|x, U_S^c|>0$ であるが，そのときすべての i について $x_i>\alpha$ である．もし，ある i について $x_i \leq \alpha$ ならば x は $U_{\{i\}}$ に含まれている．したがって $\sum_{S\subset N} k_S(x)>0$ であり，$\sum_{S\subset N} \bar{k}_S(\bar{x})>0$ であるから，$f_s(\bar{x})$ は定義できる．

2. $f_S(\bar{x})>0$ ならば $|x, U_S^c|>0$ なので

   $f_S(\bar{x})>0 \longrightarrow x\in U_S$

   が成り立つ．

3. ある i について $x_i \leq \alpha$ ならば $|x, U_{\{i\}}^c|\geq\alpha$ なので $\bar{k}_{\{i\}}(\bar{x})=\alpha$ である．一方，上の定義によってすべての j について $\bar{k}_{\{j\}}(\bar{x})\leq\alpha$ であり，（ある i について $x_i\leq\alpha$ のときには）$|S|\geq 2$ であるようなすべての S について $\bar{k}_S(\bar{x})=0$ であるから $f_{\{i\}}(\bar{x})\geq\dfrac{1}{n}$ が成り立つ． □

$V(N)$ は上に有界であるからある実数を r として利得ベクトルの各成分は r 以下である．したがってその成分の和は nr 以下である．$R=nr$ として次の関数を考える．

$$h(\bar{x})=\bar{x}+\frac{\alpha}{R}\left(\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x})m^S-m^N\right) \tag{3}$$

定義から

$$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x})=1$$

である．(3) の各成分を考えてみよう．まず m^N の各成分は $\dfrac{1}{n}$ である．補題 2 の 3 で示したように，ある i について $x_i\leq\alpha$ のとき $f_{\{i\}}(\bar{x})\geq\dfrac{1}{n}$ であるから $\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x})m^S$ の第 i 成分は $\dfrac{1}{n}$ 以上になる．したがって $x_i\leq\alpha$ のとき $h(\bar{x})$ の第 i 成分は負にはならない．また $x_i>\alpha$ であれば $h(\bar{x})$ の第 i 成分は $\dfrac{\alpha}{\sum_{i=j}^{n} x_j}-\dfrac{\alpha}{nR}$ 以上となるが，

$\sum_{i=j}^{n} x_j < R$であるから，やはり負にはならない．さらに$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) m^S$の各成分の和は 1 であり，$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) m^S - m^N$の成分の和はゼロである．

m^Sは $|S|$ 個の成分が$\dfrac{1}{|S|}$であるベクトルであるから，提携Sに関する$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) m^S$の成分の和は$f_S(\bar{x})$に等しい．したがって$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) m^S$の成分の和は$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) = 1$である．一方 m^N の成分の和も 1 であるから$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}) m^S - m^N$ の成分の和はゼロである．

以上によって $h(\bar{x})$ は Δ^{n-1} から Δ^{n-1} への連続関数であり，Brouwer の不動点定理によって

$$h(\bar{x}^*) = \bar{x}^* + \frac{\alpha}{R}\left(\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}^*) m^S - m^N\right) = \bar{x}^*$$

となる $\bar{x}^*$がある．そのとき

$$\sum_{S\subset N} f_S(\bar{x}^*) m^S = m^N \tag{4}$$

が成り立つ．x^*を $\bar{x}^*$に対応する$Bd(V(N)) \cap R_+^n$上の点, すなわち$g(x^*) = \dfrac{x^*}{\sum_{i=1}^{n} x^*} = \bar{x}^*$とする．$F = \{S | f_S(\bar{x}^*) > 0\}$ とするとF は平衡集合族である．補題 2 の 2 により$\forall S \in F, x^* \in U_S$ であるから $x^* \in \cap_{S\in F} U_S$ が成り立つ．そのとき$\forall S \in F, x^* \in \mathrm{Int}(V(S))$であるから x^*の近傍 $O(x^*)$ で$\forall S \in F$, $O(x^*) \subset V(S)$ を満たすものがある．一方$x^* \in Bd(V(N))$ であるから，ある $z \in O(x^*)$ で $z \notin V(N)$ となるものがある（x^*が $V(N)$の境界にあり，$O(x^*)$ は開集合なのでそれに含まれる z の中には $V(N)$ からはみ出るものがある），そのとき $z \in \cap_{S\in F} V(S)$．しかしそれは平衡ゲームの条件 $\cap_{S\in F} V(S) \subset V(N)$と矛盾する．したがって平衡ゲームにはコアが存在しなければならない．

【参考文献】

Scarf, H., (1967) “The core of an *N*-person game,” *Econometrica*, Vol. 38, pp. 50-69.

Shapley, L., (1973) "On balanced games without side payments," *Mathematical Programming,* edited by Hu, T. C., Robinson, S. M., Academic Press.

Shapley, L. and R. Vohra, (1991) "On Kakutani's fixed point theorem, the K-K-M-S theorem and the core of a balanced game," *Economic Theory*, Vol. 1, pp. 108-116.

Zhou, L., (1994) "A theorem on open coverings of a simplex and Scarf's core existence theorem through Brouwer's fixed point theorem," *Economic Theory*, Vol. 4, pp. 473-477.

田中靖人，(2007)「わかった気になる？一般均衡理論――ブラウワーの不動点定理の証明付き――」『経済学論叢』（同志社大学）第 59 巻第 3 号，pp. 243-300.

（たなか　やすひと・同志社大学経済学部）

The Doshisha University Economic Review Vol.60 No.4

Abstract

Yasuhito TANAKA, *A Proof of the Existence of NTU Core by Brouwer's Fixed Point Theorem*

The core existence theorem of an NTU (non-transferable utility) game that there exists a core in a balanced game, which was first presented by Scarf (Econometrica, 1967), is usually proved by means of proofs based on Kakutani's fixed point theorem such as Shapley (Mathematical Programming edited by Hu et al., Academic Press, 1973) and Shapley and Vohra (Economic Theory, 1991). On the other hand, in this paper, we present a proof of this theorem by means of Brouwer's fixed point theorem (which is more elementary than Kakutani's theorem) by unifying the two-stage proof by Zhou (Economic Theory, 1994).