

## Analysis of Stability and Chaos concerning Difference Equations

Seiji SAITO\*

(Received 10 May, 2010)

In this paper we deal with difference equations arising from economics models with the Walras' law, mathematical models in biology, red blood density models and the Lotka-Volterra's equations. Moreover we discuss the stability and chaos of the systems by applying the Liapunov's second method and chaos criteria.

**Key words** : difference equation, stability, chaos, Liapunov's second method, ordinary differential equation

**キーワード** : 差分方程式, 安定性, カオス, リアプノフの第2方法, 常微分方程式

### 差分方程式の安定性とカオス解析

齋藤 誠慈\*

#### 1. はじめに

ポットの水が熱せられる時, 上下の水溫の差が大きいと対流の状態が観察される. 大氣においても対流現象は観察される. 対流を記述する微分方程式は1960年代に, E. ローレンツにより簡略されたローレンツ系は, コンピュータの支援により詳しく研究された<sup>1)</sup>.

その計算機支援のアプローチより先に, H. ポアンカレによる「天体力学の新しい方法」(1893年)には, 安定多様体と不安定多様体に関する知見を与え, 「今日カオスと呼ばれる現象の, 最初の数学的出現であったと思われる」と表現もある<sup>3)</sup>.

大氣の式や, 天体の運動を表す式は, 連続量の時刻に関して物理法則を適応して得られる微分方程式である. その微分方程式の具体解は, 求積法により導出が困難であり, 計算機により挙動を観

察することが有効である. すなわち, 微分方程式の時刻を差分化し, 差分方程式に近似し, その差分方程式の解を調べ, その挙動内容から元の微分方程式の解に関する知見を得ることができる.

一方, 物理法則の適用を経ずに直接, 現象を観察することから定式化の結果, 差分方程式が導出されることがある. 例えば, 赤血球密度モデルなど(第4章).

本報告では, 次の内容を概説する:

- ミクロ経済学の立場で議論されるワルラス理論における森嶋の例で示唆された安定性とカオス(第2章);
- 数理生物学における修正ニコルソン・ベイリーモデルにおける安定性とカオス(第3章);
- 赤血球密度モデルの不安定性定理(第4章);
- オイラー近似によるロトカ・ボルテラ差分方程

\*Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyotanabe, Kyoto, 610-0321, Japan, TEL:+81-774-65-6702, E-mail: ssaito@mail.doshisha.ac.jp.

式のカオス(第5章).

## 2. 価格調整差分方程式

### 2.1. 有限被覆一様最終的漸近安定性定理

森嶋は, 次の価格調整差分方程式

$$x_j(n+1) = \frac{\max[x_j(n) + vE_j(n), 0]}{\sum_{k=1}^m \max[x_k(n) + vE_k(n), 0]}$$

$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

に関し, 数値シミュレーションから安定性とカオスの存在を示唆した<sup>15,16</sup>. Li-Yorke とは独立であった<sup>9</sup>. ワルラス理論において市場には,  $m$  個の財があり, 時刻  $n = 0, 1, 2, \dots$  その相対価格を  $0 \leq x_j(n) \leq 1, \sum_{j=1}^m x_j(n) = 1$  とする. また,  $E_j(n), j = 1, 2, \dots, m$ , を財  $j$  の超過需要関数(需要量と供給量の関数)とし, 次のワルラス則を仮定する:

$$\sum_{j=1}^m E_j(n)x_j(n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$v$  は需要と供給のバランスに対する価格の伸縮係数である. 特に, 森嶋は,  $a > 0, b = v > 0$  としして次の超過需要関数の例を議論した:

$$E_1 = -x_1 + \frac{1}{a}x_2.$$

パラメータ  $a = 0.6$  とし,  $0 < b < 2$  を横軸, 縦軸を  $x(n)$  として,  $25,000 \leq n \leq 30,000$  をプロットする(Fig 1.参照). 軌道の初期値によらず, いずれは不動点  $0.625$ , 2周期点, 4周期点, 8周期点等に収束することを森嶋は示唆した.

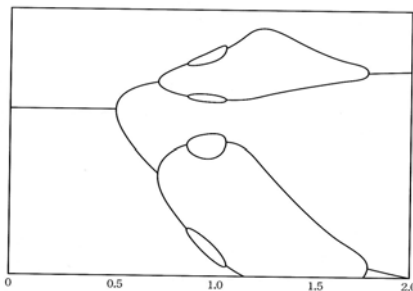


Fig 1. Stability orbits.

本報告では, その予想を証明する有限被覆一様

最終的漸近安定性の定理を得た. 一般に次の  $m$  元差分方程式を考える.

$$x(n+1) = f(n, x(n)). \tag{1}$$

ここで  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対し,  $x(n)$  は  $m$  次元ベクトルで,  $I = [0, 1]$  として  $x(n) \in I^m$  である. 式(1)の  $k$  周期点集合  $P(k)$  を次に定義する:

$$P(k) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

ただし,  $x_{p+1} = f(n, x_p), x_p \neq x_q, x_1 = f(n, x_k)$ ,

$(1 \leq p < q \leq k; n = 0, 1, 2, \dots)$  である. 式(1)の

周期点集合  $P(k)$  は, 初項から出発してから暫くは不安定であるが, 最終的に漸近安定となるとき,  $P(k)$  は有限被覆一様最終的漸近安定であるという.

差分式(1)のその漸近挙動に関する定義は, 常微分方程式と同様に定義する<sup>8,19,22</sup>. その定義を述べるために,  $\mathbf{Z}_+$  を非負整数の集合,  $P(k)$  の近傍を  $\varepsilon > 0, x_p \in P(k)$  として

$$S(P(k), \varepsilon) = \bigcup_{1 \leq q \leq k} \{y \in I^m : \|y - x_q\| < \varepsilon\}$$

とおく.  $\|y\|$  は  $y \in I^m$  のノルムである.

集合  $P(k)$  と  $x$  の距離を

$$d(P(k), x) = \inf\{\|y - x\| : y \in P(k)\}$$

で表す.

周期点集合  $P(k)$  は, [EV-UA.FC](有限被覆一様最終的吸引的), すなわち, 任意の被覆  $\{C_q \subset I^m : \bigcup_{1 \leq q \leq Q} C_q \supset I^m\}$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある番号  $N_0 \in \mathbf{Z}_+$  と  $T_0 \in \mathbf{Z}_+$  をとれば, 任意の集合  $C_q$ , 任意の初期点  $x_0 \in C_q$ , 任意の初期時刻  $n_0 \geq N_0$  から出発する任意の解(軌道)  $x(n; n_0, x_0)$  は, 時刻  $n \geq n_0 + T_0$  のとき, 周期点集合の近傍  $S(P(k), \varepsilon)$  に存在する, すなわち,

$$d(x(n; n_0, x_0), P(k)) < \varepsilon.$$

周期点集合  $P(k)$  は[EVS-US](一様最終的安定)であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある番号  $N_0 \in \mathbf{Z}_+$  と  $\delta > 0$  をとれば, 任意の初期点  $x_0 \in S(P(k), \delta)$  と任意の初期時刻  $n_0 \geq N_0$  から出発する任意の解(軌道)  $x(n; n_0, x_0)$  は, 時刻  $n \geq n_0$  のとき, 周期点集合の近傍  $S(P(k), \varepsilon)$  である, すなわち,

$$d(x(n; n_0, x_0), P(k)) < \varepsilon.$$

周期点集合  $P(k)$  は[EV-UAS.FC](有限被覆一様最終的漸近安定)であるとは[EV-UA.FC], かつ, [EV-US]であることをいう.

周期点集合  $P(k)$ は, 物理学におけるエネルギー関数を一般化したリアプノフ関数を応用して, 次の定理は証明できた<sup>2,19)</sup>.

非負実数集合  $\mathbf{R}_+ = \{0 \leq x < +\infty\}$ とし,

$\text{CIP} = \{a: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+ \text{ は正定値, 狭義単調増加な連続関数}\}$ , 差集合  $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$ とする.

**定理 1.** 周期点集合  $P(k)$  は, 次の条件(a), (b) をみたす  $V: \mathbf{Z}_+ \times I^m \rightarrow \mathbf{R}_+$ が存在すれば, [EV-UAS.FC]である:

(a) 任意の  $r > 0$  に対し, ある番号  $N_0 \geq 0$ ,  $a_r, b_r \in \text{CIP}$  をとれば, 任意の  $n \geq N_0$  と  $x \in I^m - S(P(k), r)$  に対して

$$a_r(d(P(k), x)) \leq V(n, x) \leq b_r(d(P(k), x))$$

が成り立つ;

(b)  $\Delta_k V(n, x) = V(n+k, f^k(n, x)) - V(n, x)$  とおく. 任意の  $r > 0$  に対し, ある番号  $N_0 \geq 0$ ,  $c_r \in \text{CIP}$  をとれば, 任意の  $n \geq N_0$  と  $x \in I^m - S(P(k), r)$  に対して

$$\Delta_k V(n, x) \leq -c_r(d(P(k), x))$$

が成り立つ.

## 2.2. リー・ヨークの定理とカオス

森嶋は式(1)に関し,  $a = 0.5$  のとき数値シミュレーションを得て, カオスの出現を示唆した. 横軸を  $0 < b < 2$  で, 縦軸を  $x(n)$  として,  $25,000 \leq n \leq 30,000$  をプロットする(Fig 2. 参照).

本報告では  $b=0.7$  として, 次式を具体的に考える<sup>7)</sup>.

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (2)$$

ただし,  $f(x) = \frac{11x^2 - 25x + 14}{42x^2 - 59x + 24}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

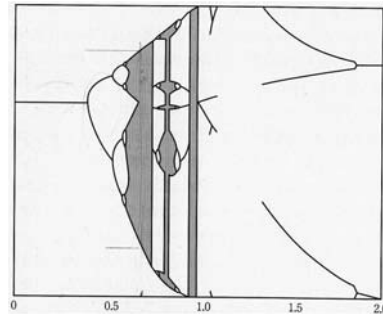


Fig 2. Chaotic orbits.

1次元力学系に関するリー・ヨークの定理は次のとおりである:

**定理 2.**(リー・ヨーク)差分方程式(2)は, 3周期点をもつとき, 関数  $f$  の非周期点の非加算集合  $S$  が存在し, 次の(I),(II)をみたす:

(I)  $S$  の任意の点  $x$  と  $f$  の任意の周期点  $p$  に対し,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0;$$

(II)  $S$  の任意の2点  $x, y$  に対して,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

上記の関係式(I),(II)が成り立つとき, 式(2)はリー・ヨークのカオス(をもつ)という.

連続関数  $y=f(x), 0 \leq x, y \leq 1$  は3周期点をもてば, カオスが存在する. 実際,  $0.6 \leq x \leq 0.61$  において, 3周期点が存在する. そのためには, 次の2不等式が成り立つことを示せばよい:

$$\{f^3(0.6) - 0.6\} \times \{f^3(0.61) - 0.61\} < 0; \\ f(x) - x > 0 \text{ on } [0.6, 0.61].$$

## 3. 修正ニコルソン・ベイリーモデル

### 3.1 安定性解析

自然界におけるアズキゾウムシとコマユバチは, 各々, 宿主(host)と擬寄生(Parasitoid)の関係にある. 後者は, 前者を食い尽くす関係にある<sup>1,5,10)</sup>. 離散時間  $t = 0, 1, 2, \dots$  に対し宿主の個体数(あるいは密度)を  $N_t$ , 擬寄生のを  $P_t$  と表す(Fig 3.を参

照).

$N_t$  : 世代  $t$  での宿主の密度. ( $t = 0, 1, 2, \dots$ )

$P_t$  : 世代  $t$  での擬寄生の密度.

$f$  : 擬寄生に遭遇しない宿主の割合.

$\lambda$  : 宿主の生殖率.

$c$  : 宿主に擬寄生した卵の孵化率.

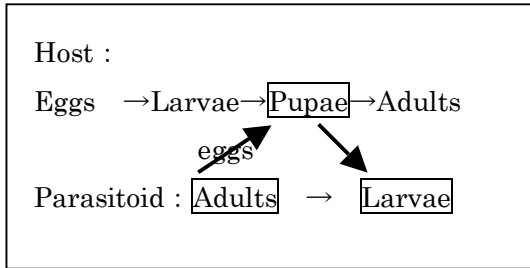


Fig 3. Host and parasitoid.

最初, ニコルソンとベイリーは, 宿主と擬寄生の遭遇するのは1回だけとしポアソン分布を仮定し, 次の差分方程式を得た.

$$N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t}, P_{t+1} = cN_t (1 - e^{-aP_t}).$$

数値シミュレーション結果から, および安定性条件と比較して, 次のモデルに修正された<sup>1,12)</sup>.

$$N_{t+1} = N_t e^{r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - aP_t}, P_{t+1} = N_t (1 - e^{-aP_t}) \quad (3)$$

ただし,  $t = 0, 1, 2, \dots, K > 0$  は2種をとりまく環境から決まるパラメータである. ベクトル  $x =$

$$(N, P)^T, f(x) = (\lambda N e^{r \left(1 - \frac{N}{K}\right) - aP}, N(1 - e^{-aP}))^T$$
 とおき,

$T$  は転置の意味する. 式(3)は次式となる:

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

式(4)の不動点  $x_e = (N_e, P_e)^T$  は

$$P_e = \frac{r(1-q)}{a}, N_e = \frac{P_e}{1 - e^{-aP_e}}$$

をみたす. パラメータは3種  $r, q, a$  である.

パラメータの取り方により, 4パターンが得られる.

- 1)  $r = 0.5, q = 0.4, a = 0.2$  (Fig 4. 参照)
- 2)  $r = 2.0, q = 0.4, a = 0.2$  (Fig 5. 参照)
- 3)  $r = 2.2, q = 0.4, a = 0.2$  (Fig 6. 参照)
- 4)  $r = 2.65, q = 0.4, a = 0.2$  (Fig 7. 参照)

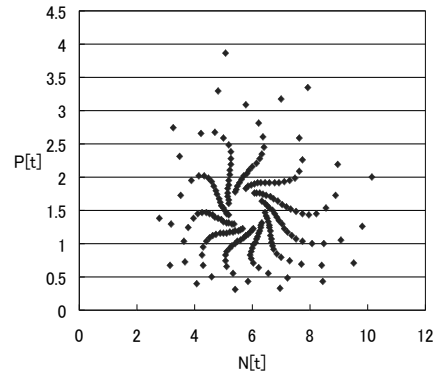


Fig 4. Case with  $r = 0.5, q = 0.4, a = 0.2$ .

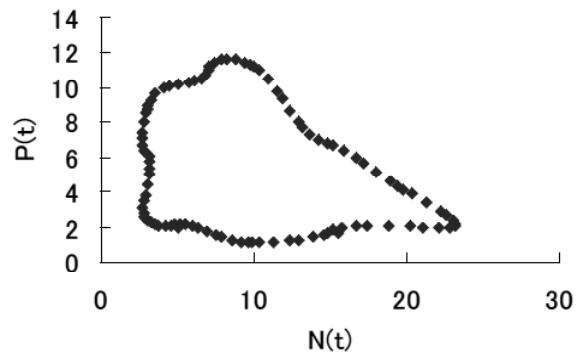


Fig 5. Case with  $r = 2.0, q = 0.4, a = 0.2$ .

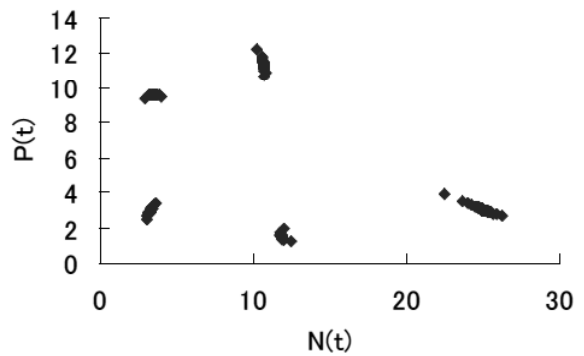


Fig 6. Case with  $r = 2.2, q = 0.4, a = 0.2$ .

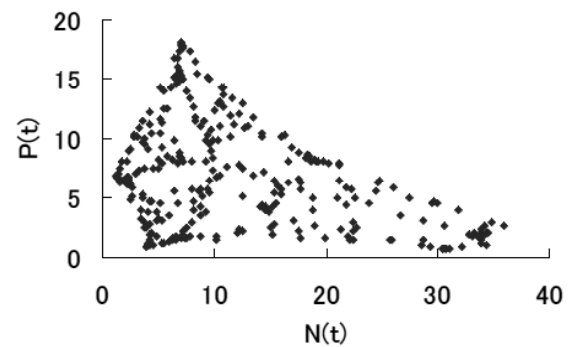


Fig 7. Case with  $r = 2.65, q = 0.4, a = 0.2$ .

式(3)の不動点  $x_e = (N_e, P_e)^T$  の安定性を示すには、次の一様漸近安定性定理が有効である ⑥. 不動点  $x_e$  が一様漸近安定であるとは、

ア)  $x = x_e$  は一様吸引的[UA],すなわち、十分小の  $\delta > 0$  が存在し、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある正数  $T_0 > 0$  をとれば、任意の初期点  $x_0: \|x_0 - x_e\| < \delta$  と任意の初期時刻  $n_0 \geq 0$  から出発する任意の解(軌道)  $x(n; n_0, x_0)$  は、時刻  $n \geq n_0 + T_0$  のとき、

$$\|x(n; n_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon ;$$

イ)  $x = x_e$  は一様安定[US],すなわち、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  をとれば、任意の初期点  $x_0: \|x_0 - x_e\| < \delta$  と任意の初期時刻  $n_0 \geq 0$  から出発する任意の解  $x(n; n_0, x_0)$  は、時刻  $n \geq n_0$  のとき、

$$\|x(n; n_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。距離  $d(x, x_e) = \|x - x_e\|$  とする。

**定理 3.**(Halanay etc.) 式(4)は、不動点  $x_e$  をもち、その近傍を  $B_c = \{x \in \mathbf{R}^m : \|x - x_e\| < c\}$  ( $c > 0$ ). 次の条件(i), (ii) をみたす  $V: B_c \rightarrow \mathbf{R}_+$  が存在すれば、不動点  $x_e$  は一様漸近安定である：

(i) ある  $a, b \in \text{CIP}$  をとれば、

$$a(d(x, x_e)) \leq V(x) \leq b(d(x, x_e))$$

が成り立つ；

(ii)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$  とおく。ある  $c \in \text{CIP}$  をとれば、

$$\Delta V(x) \leq -c(d(x, x_e))$$

が成り立つ。

パターン1) が一様漸近安定であるかは未だ示されていない。リアプノフ関数の方法を応用すれば、その十分条件(例えば  $e^r < (qr + 1)e^{qr}$ )をみたすパラメータ  $r, q$  が求められる。

パターン2), 3) は各々、リミットサイクル、周期解の存在を示唆する。今後の研究が期待される。

### 3.2. 一般化マロットの定理とカオス

修正ニコルソン・ベイリーモデル(3)のパターン4) は、カオスであると予想された 1). 本報告では、次の一般化マロット 13,17)の定理を用いて、実際に4) のとき、カオスが発現していることを述べる。

**定理 4.**(一般化マロット) 式(4)は、不動点  $x_e$  をもつ。次の条件(i) – (iii)が成立するとき、式(4)はリー・ヨークのカオスである：

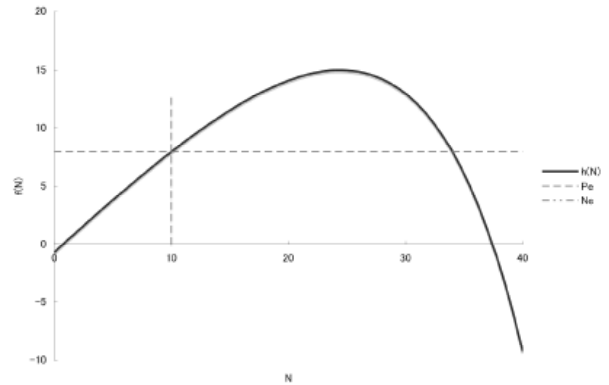
(i) 関数  $f(x)$  は、 $x_e$  の近傍  $B_e$  で連続微分可能；

(ii) ヤコビ行列  $Df(x_e)$  の固有値  $\lambda$  はすべて

$$|\lambda| > 1 ;$$

(iii) ある  $z \in B_e$  は、 $z \neq x_e$  で、ある整数  $M$  につき合成  $f^M(z) = x_e$ 、かつ、行列式  $|Df^M(z)| \neq 0$ .

パラメータ  $r = 2.65, q = 0.4, a = 0.2$  のとき、上記の条件(i),(ii)は容易に成立が確認できる 20).



**Fig 8.** The Graph of  $y = h(N)$ .

条件(iii)につき、 $z = (N, P)^T$  とおくと、 $x_e = (N_e, P_e)^T$  より、次式を得る：

$$P_e = N - N e^{-r(1 - \frac{N}{K})}$$

この式の解  $N$  の存在を示せばよい。右の関数を

$$h(N) = N - N e^{-r(1 - \frac{N}{K})}$$

とおき、 $h(N) = P_e$  は解をもつことは増減表と  $P_e$  の値から確認できる(Fig8.参照). 定理4の条件(iii)

の条件の成立も確認できる。以上から、一般化マロットの定理から、式(3)はパターン4) のとき、カオスである。

4. 赤血球密度モデル

健康な人間の赤血球の密度は、正常な状態である許容範囲の間で変動する。男性ではこの範囲は  $(5.4 \pm 0.8) \times 10^6$  個/m<sup>2</sup> であり、女性では  $(4.8 \pm 0.6) \times 10^6$  個/m<sup>2</sup> である。貧血症のような場合、このふるまいは時に劇的に変化する。

時刻  $n$  の赤血球の密度を  $x_n$ 、時間区間  $[n, n+1]$  の間で破壊される密度を  $d_n = ax_n$ 、血管中に放出される密度を  $p_n = b(x_n)^r e^{-sx_n}$  とすると、赤血球密度モデルは次式となる<sup>4,14)</sup>。

$$x_{n+1} = x_n - ax_n + b(x_n)^r e^{-sx_n} \tag{5}$$

( $n=0,1,2,\dots$ ). また、次式をおく。

$$F(x) = (1-a)x + b(x)^r e^{-sx}$$

式(5)は、 $a = 0.6, b = 1, r = 6, s = 1.5$  のとき、3 不動点  $x_1 = 0 < x_2 < x_3$  をもつ (Fig 9.参照)。

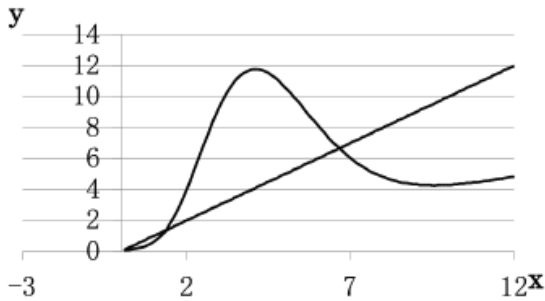


Fig 9. The Graph  $y = F(x)$  has 3-fixed points.

不動点  $x_1 = 0$  は一様漸近安定である。赤血球密度が、ゼロ付近になるとゼロに収束するから、これは人体に危険な状態を意味する。微分の絶対値  $|F'(0)| < 1$  からも明らかである。

不動点  $x_2$  では、 $|F'(x_2)| > 1$  のとき不安定である。赤血球密度は、 $x_2$  付近ではゼロに収束するか、上昇するかのいずれかである。

不動点  $x_3$  では、 $|F'(x_3)| > 1$  のとき不安定である。式(5)は1次元力学系であるために、安定・不安定性の判定は比較的容易である。

参考文献 14) では、 $r=8, s=16, b=1.1 \times 10^6, a=0.78$  のとき、3 周期点の存在  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$  (3 周期点集合が2つ)を示し、リー・ヨークの定理より、式(5)はカオスであることを述べている (Fig 10. 参照)。

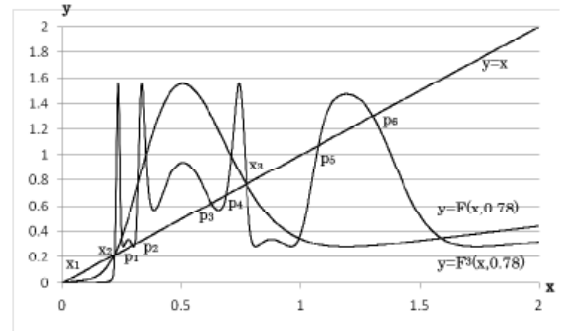


Fig 10. The Graph  $y = F^3(x)$  with  $a=0.78$  indicates the Li-Yorke's chaos.

式(5)が3 周期点をもてばカオスであり、当然不安定でもある。1次元力学系の場合、判定は容易である。多次元力学系であると、3 周期点が存在しても直ちに、カオスであるとは限らない。よって多次元力学系では、カオスであることと不安定であることは区別すべきといえる。

本報告では、多次元差分方程式に関する不安定性定理を証明したことを述べる。次の非自励系差分方程式を考える：

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{6}$$

**定理 5.** (不安定性定理) 式(6)は不動点  $x_e = f(n, x_e)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )をもつ。不動点  $x_e$ は、次の条件(a) - (c) をみたす  $V: \mathbf{Z}_+ \times B_c(x_e) \rightarrow \mathbf{R}_+$  が存在すれば、安定でない、すなわち不安定である。ただし、  
 $B_c(x_e) = \{x : \|x - x_e\| < c\}$ ,  
 $E(x_e; p) = \{x : 0 < \|x - x_e\| < p\}$  ( $0 < p < c$ )  
とする。

(a) ある  $a \in \mathbf{CIP}$  をとれば、任意の  $n \geq 0$  と  $x \in E(x_e; p)$  に対して

$$V(n, x) \leq a(d(x, x_e))$$

が成り立つ；

(b)  $\Delta V(n,x) = V(n+1, f(n,x)) - V(n,x)$  とおく.  
ある  $b \in \text{CIP}$  をとれば, 任意の  $n \geq 0$  と  
 $x \in E(x_e; p)$  に対して

$$\Delta V(n,x) \geq b(d(x, x_e))$$

が成り立つ;

(c)  $V(n, x_e) = 0$  ( $n \geq 0$ ).

証明は, 文献 21) の常微分方程式に対するリアプ  
ノフの不安定性定理と同様である.

### 5. ロトカ・ボルテラ差分方程式

捕食・被捕食モデルとは, 第一次世界大戦時に  
アドリア海で観察された硬骨魚の個体数の周期的  
な増減に関して考案されたモデルである. ボルテ  
ラは魚類の個体数を捕食者と被食者の二つの群に  
分け, 二者の遭遇は捕食者の増加と被捕食者の減  
少に影響するとした. 単位時間当たりに遭遇する  
数はそれぞれの群の数の積に比例し, それは捕食  
者には有利に, 非捕食者には不利に働くと仮定し

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cx + dxy \end{cases}$$

で表される方程式を考えた. 本報告では, この方  
程式をオイラー近似により差分化し, 次の差分方  
程式がカオスであることを述べる<sup>18)</sup>.

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} = rx_n y_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

用いる定理は, 第 3 章の一般化マロットの定理で  
ある. 式(7)は, 次式

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} rx(1-x-y) \\ rxy \end{pmatrix}$$

により,

$$u_{n+1} = F(u_n) \quad (8)$$

となる. 一般化マロットの定理を応用する. 式(8)

の不動点  $x_e = F(x_e)$  は  $x_e = \left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{2}{r}\right)^T$  ( $r > 2$  のはず).

不動点  $x_e$  におけるヤコビ行列は

$$DF(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ r-2 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, その固有値は

$$\lambda + \frac{1 \pm \sqrt{9-4r}}{2}$$

である. その絶対値がすべて 1 より大である条件は  
 $r > 3$  である.

次に, 一般化マロットの定理の条件(iii)をみたく  
条件を導く.  $M = 1$  とし,  $F(z) = x_e$  なる  $z = (x,y)^T$   
が存在する  $r$  の範囲を求める.

$$\begin{bmatrix} rx(1-x-y) \\ rxy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ 1 - \frac{2}{r} \end{bmatrix}.$$

これより,  $r > 3$  のとき  $x = \frac{r+(r-2)}{2r}$  を得る.

このとき,  $z$  のヤコビ行列は  $|DF(z)| \neq 0$  をみたく.

以上より, 式(8)は  $r > 3$  のときカオスである.

### 6. 今後の課題と方針

本報告では, ワルラス則に従う経済学モデル, 数  
理生物学モデル, 赤血球密度モデル, ロトカ・ボル  
テラ方程式から生ずる差分方程式を扱い, それらの  
系につき, リアプノフの第 2 方法やカオス判定法を  
応用して, 安定性とカオスを議論した.

第 2 章の一般均衡理論における差分方程式につ  
き, カオスを与える一般的条件の導出が期待される.  
第 3 章の数理生物学の宿主擬寄生モデルでは, パラ  
メータの条件を求め, 安定・不安定多様体の性質を  
議論することは興味深い. 第 4 章での議論を発展さ  
せ, カオスと不安定性条件との関係を考察するも重  
要である. 第 5 章においてはオイラー近似による差  
分方程式を議論した. 今後は, ルンゲ・クッタ近似  
による差分方程式を考え, そのカオスに関する知見  
を微分方程式の議論に導く必要がある.

本研究の一部は 2009 年度同志社大学工学研究所研究助成金によって遂行された。ここに記して謝意を表する。

### 参考文献

- 1) L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, Random House (1988).
- 2) S.N. Elaydi, *Discrete Chaos 2nd*, Chapman & Hall/CRC (2008).
- 3) ディアック, ホームズ, 「天体力学のパイオニアたち (上)」, 訳: 吉田, シュプリンガーフェアラーク東京 (2004).
- 4) 今泉雅裕, 差分方程式の平衡点に関する不安定性定理, 同志社大学工学部知識工学科卒業論文(2010).
- 5) 巖佐庸, 数理生物学入門, HBJ 出版局(1990).
- 6) A. Halanay, V. Rasvan, *Stability and Stable Oscillations in Discrete Time Systems*, Gordon and Breach Sci. Publ.. (2000).
- 7) 川原理恵子, 価格調整差分方程式に関するカオス現象の存在, 同志社大学工学部知識工学科卒業論文(2008).
- 8) V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities I*, Academic Press(1969).
- 9) T. V. Li, J. A. Yorke, *Amer. Math. Monthly*, 82, 985 (1975).
- 10) J. D. Logan, W. R. Wolesensky, *Mathematical Methods in Biology*, Wiley(2009).
- 11) E. N. Lorenz, *J. Atmospheric Sciences*, 20, 130(1963).
- 12) 水口翔太, リアプノフの方法による数理生物学における修正ニコルソン・ベイリー差分方程式に関する定性解析, 同志社大学工学部インテリジェント情報工学科卒業論文(2010).
- 13) F. R. Marotto, *J. Math. Anal. And Appl.*, 63, 199(1978).
- 14) M. Martelli, *Discrete Dynamical Systems and Chaos*, CRC Press, LLC, BOCA BARTON(1992).
- 15) 森嶋通夫, 森嶋通夫著作集 1, 動学的経済理論, 岩波書店(1997).
- 16) 森嶋通夫, 森嶋通夫著作集 9, ワルラス理論, 岩波書店(1997).
- 17) 森田善久, 生物モデルのカオス, 朝倉(1996).
- 18) 野口岳人, 捕食・被捕食モデルのオイラー近似による差分方程式のカオス, 同志社大学工学部インテリジェント情報工学科卒業論文(2010).
- 19) S. Saito, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 53, 301(2009).
- 20) 辻裕輝, 一般化マロットの定理を応用による数理生物学における修正ニコルソン・ベイリー差分方程式のカオス, 同志社大学工学部インテリジェント情報工学科卒業論文(2010).
- 21) 山本稔, 常微分方程式の安定性, 実教出版(1979).
- 22) T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Math. Soc. Japan(1966).