

New Dynamic Implied Copula Model with Applications to CDO Market Data

Hiroshi Tsuda*, Masakazu Ando**, Yoko Tanokura**, Seisyo Satou** and Genshiro Kitagawa**

(Received 20 January, 2009)

In this paper, we propose a new dynamic implied copula model and report the usefulness of our new model based on analysis of iTraxx EUR data. We can improve the accuracy of price estimation by our new model compared with the dynamic implied copula model proposed by Ando, M., Tsuda, H., Tanokura, Y., Satou, S., and Kitagawa, G. (2009), which can obtain information for Collateralized Debt Obligation (CDO) prices. Our main idea is to apply the concept of the time dependent Markov model by Kariya, T. and Tsuda, H. to a dynamic implied copula model. From the empirical results, we find useful evidence that our new model performs well for the estimation and prediction of the individual CDO prices.

Key words : Implied copula, Hazard rate, Monte Carlo filter, Time dependent Markov model

キーワード : インプライド・コピュラ, ハザード率, モンテカルロ・フィルター, 時間依存型マルコフ・モデル

新しいダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルの 債務担保証券 (CDO) の市場データへの適用

津田 博史*, 安藤雅和**, 田野倉葉子**, 佐藤整尚**, 北川源四郎**

1. はじめに

2007年の夏ごろから顕在化しはじめた米国のサブプライム問題に端を発する金融危機は、世界経済に深刻なダメージを与えてきている。その原因となった債務担保証券 (Collateralized Debt Obligation, 以下 CDO と略す) に関するリスク評価が、金融機関にとり喫緊のテーマとなっている。

CDO とは、社債や貸出債権 (ローン) などのプール資産を担保として発行される証券化商品のひとつである。資産のオリジネーター (原資産提供者) にとっては、証券化により資金調達が可能となり、加えて貸借対照表上の資産の軽減にもつながる。投資家

にとっては、利回りが高いものの、信用リスクの高い低格付け資産に個別に投資するよりも、それらを束ねたポートフォリオを担保にした CDO 商品に投資することで、リスク分散効果によりリスクの低減を図れることが期待される。また、CDO 商品は、優先劣後構造により信用補完によってリスクのレベルを分けることで投資家のニーズにあわせた組成が可能なることから、近年急速に取引が拡大した金融商品である。

CDO の価格評価やリスク計測によく用いられているものにファクター・正規コピュラモデルがある。

*Department of Mathematical Science, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyotanabe, Kyoto, 610-0321, Japan, TEL:+81-774-65-7443, E-mail: htsuda@mail.doshisha.ac.jp, **The Institute of Statistical Mathematics, Minatoku, Tokyo, 106-8569, Japan.

このモデルは Vasicek (1987)¹⁾によって提案され、Li (2000)²⁾、Laurent and Gregory (2005)³⁾によって証券化商品の価格評価に用いられた。デフォルト発生時刻の同時分布を比較的簡単な関数を用いて表現できる点が特長である。正規コピュラは、同時分布に正規性を仮定しているが、実際の金融データにおいては、正規性の仮定では、変量間の依存関係を必ずしも適切に表現しきれないことがあるため、正規コピュラ以外のコピュラを用いた評価が多数試みられている。

他方、コピュラそのものを市場データからインプライドする方法が、Hull and White (2006)⁴⁾により提案された。インプライド・コピュラアプローチと呼ばれるこの方法は、ハザード率シナリオの実現確率を実際の市場データから求めるものであり、これにより妥当なプレミアムの評価や市況を反映したデフォルト相関を求めることが可能となる。なお、インプライド・コピュラアプローチは、観測時点におけるハザード率の確率分布を推定する方法であり、ハザード率分布の時系列構造については考慮されていない。そこで、安藤、津田、田野倉、佐藤、北川 (2009)⁶⁾は、将来のハザード率を予測するために、時系列構造を考慮したダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルを提案した。

本稿では、より価格推定精度を向上させるためにダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルの発展型となる新しいモデルを提案する。そして、実際の CDO の市場データ (iTraxx EUR) からハザード率の期待値の推定・予測、および CDO の価格推定・予測に関する実証結果により、本モデルの有効性を示す。

2. CDO の価格評価

2.1 CDO とは

CDO には、担保資産の種類や取引の目的によって様々な種類があるが、組成方法の違いでみれば、社債など現物資産を実際取引して組成されるキャッシュ型とクレジット・デフォルト・スワップ (CDS) (プロテクションの売手が参照資産のデフォルトリスクを負う対価として買手からプレミアム(手数料)

を受け取る契約のこと)などのクレジット・デリバティブを参照資産として組成されるシンセティック型などに大きく分けられる。なお、最近では、参照資産として、複数の CDO や資産担保証券 (asset backed securities, ABS) を組み込んだ CDO が発行されており、多様化している。

シンセティック CDO の仕組みは、CDO の発行体 (特別目的会社 (SPC) と呼ばれる) がスワップ・カウンターパーティとの間で、ポートフォリオを参照資産とする CDS の契約を結び、投資家には CDO を発行して発行代金を受け取る。受け取った資金により高格付けで流動性の高い債券 (主に国債) を購入し、そこから得られる元利金と CDS のプレミアムから、投資家への CDO の元利金の支払いがおこなわれる。参照資産にデフォルトが発生した際には、担保としていた債券を売却して CDS プロテクションの支払いに充てるが、その支払額だけ CDO の想定元本が減額される。ただし、発行された債券 (エクイティ債、メザニン債、シニア債) には優先順位が設けられており、もっとも優先順位の低いトランシェ (エクイティ) から減額されることになる。当該トランシェが負担する損失の範囲は、アタッチメントポイントとデタッチメントポイントによって定められており、満期時点で総損失額がアタッチメントポイントを下回っていれば想定元本が全額償還されるが、デタッチメントポイントを上回る場合は、想定元本は償還されないことになる。

CDO を組成する際に担保資産として用いられる CDS のポートフォリオについては、独自に設定するビスポークタイプと、CDS 市場のインデックスの算出に用いられているポートフォリオを利用するタイプがある。CDS 市場の代表的なインデックスは、北米の CDS 市場においては CDX.NA.IG があり、125 の投資適格な企業の CDS により算出される。各参照企業の組入れ比率は均一である。このインデックスの構成銘柄を参照資産とする CDO のトランシェの大きさは、0~3%、3~7%、7~10%、10~15%、15~30%、30~100%に分かれている。満期は 5 年、7 年、10 年物がある。欧州にも同様の iTraxx EUR というインデックスがあり、このインデックスの構成銘柄を参

照資産として組成されるシンセティック CDO のトランシェは、0～3%、3～6%、6～9%、9～12%、12～22%、22～100% に分けられている。満期は5年、7年、10年物があり、各参照企業の組入れ比率は均一である。

2.2 CDO の価格評価

CDO の価格は、契約期間における期待キャッシュ・フローの現在価値から算出される。具体的には、あるトランシェの投資家は、利払日(主に3ヶ月ごと)に残存想定元本に利率と利払日間隔を掛けた金額を受け取り、満期時点に残存想定元本が償還される。仮に契約期間中に担保資産にデフォルトが発生した際、その都度、(1-回収率)×想定元本が損失額として当該トランシェの想定元本から減額されるとともに、最上位のトランシェの想定元本からも、デフォルト資産から損失額分を引いた残りの額分が償還される。

実際、当該トランシェの現在価値は、Hull and White (2006)⁴⁾ により示された評価モデルを用いると $V = A(s) + B(s) - C$ と表わされる。 s は当該トランシェのプレミアムを表し、 $A(s)$, $B(s)$, C はそれぞれ次に示す式となる。

$$\begin{aligned} A(s) &= s \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) E[P(t_i)] D(t_i) \\ B(s) &= s \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2} \right) \{ E[P(t_{i-1})] - E[P(t_i)] \} D\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \quad (1) \\ C &= (1-R) \sum_{i=1}^n \{ E[P(t_{i-1})] - E[P(t_i)] \} D\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで $t_i (1 \leq i \leq n)$ は i 番目の支払時刻、 t_0 を開始時刻とし、 $t_n = T$ を満期とする。 $P(t_i)$ は t_i 時点の残存想定元本を表す。 $D(t)$ は現時点における満期 t の割引率であり、 R は回収率を表す。なお、デフォルトは、支払い日の中間の時点で発生すると仮定している。

このような条件のもとで当該トランシェの現在価値を計算するには、支払時刻 t_i での残存想定元本の期待値 $E[P(t_i)]$ を求めなければならない。参照企業が1社である CDS の場合は、回収率 R を0とすると、期待残存想定元本は、 $E[P(t_i)] = (1-Q(t_i))L$ となり、最初は想定元本 L と等しい。ここで、 $Q(t_i)$ は t_i 時点前にデフォルトするリスク中立確率である。

CDO のトランシェの場合は、総損失額の一部を負担することになり、その範囲はアタッチメントポイントとデタッチメントポイントで定められている。具体的には、当該トランシェのアタッチメントポイントを a_A 、デタッチメントポイントを a_D とし ($a_A < a_D$)、総想定元本を L_{total} とすると、資産プールの損失額が y のときの当該トランシェの残存想定元本 $P(y)$ は、

$$P(y) = \begin{cases} (a_D - a_A)L_{total} & y \leq a_A L_{total} \\ a_D L_{total} - y & a_A L_{total} < y \leq a_D L_{total} \\ 0 & y > a_D L_{total} \end{cases} \quad (2)$$

となる。この残存想定元本の期待値を求めるには損失額分布が必要となるが、具体的には、この残存想定元本 $P(y)$ に t_i 時点で損失額が y となる確率

$Prob(Y = y | t_i)$ を掛け、それを $y=0$ から $y=L_{total}$ まで足すことにより期待残存想定元本

$$E[P(t_i)] = \sum_{y=0}^{L_{total}} Prob(Y = y | t_i) P(y) \quad (3)$$

が求まる。式(3)で示した CDS の期待残存想定元本は、式(2)の特殊な場合と考えられる。すなわち、CDS の場合、損失負担は全額のため $a_D = 1$ 、 $a_A = 0$ と考えられ、損失額 y は0か L の2通りであることから、残存想定元本は、

$$P_{CDS}(y) = \begin{cases} L & y = 0 \\ 0 & y = L \end{cases} \quad (4)$$

で表わされる。損失額分布は、先に示したデフォルト確率分布 $Q(t_i)$ を用いて、損失額が発生しない ($y=0$) のときは、時刻 t_i まで生存していることを意味するので、 $Prob(y=0 | t_i) = 1 - Q(t_i)$ であり、損失が発生した ($y=L$) のときは、 t_i 時点でデフォルトしていることになるので $Prob(y=L | t_i) = Q(t_i)$ となり、

$$E[P(t_i)] = (1 - Q(t_i))L + Q(t_i)0 = (1 - Q(t_i))L \quad (5)$$

が示せる。

CDO の当該トランシェの残存想定元本の期待値を求めるためには、 t_i 時点の資産プールの損失額分布を算出する必要がある。ある企業 j のデフォルト時刻を τ_j とすると、それが支払時刻 t_i よりも早ければ ($\tau_j < t_i$) 資産プールに損失が発生していることになり、遅ければ ($\tau_j > t_i$) 損失は発生していないこと

になる。実際に支払時刻 t_i 時点でデフォルトするかどうかは不確実であり、複数の企業が同時にデフォルトする可能性もあるため、これらを考慮に入れた同時デフォルト時刻分布を導くことで、損失額分布の算出が可能となる。

具体的な損失額分布の算出法としては、Hull and White (2004) ⁵⁾が提案した反復法による算出方法を用いた。潜在的損失額を次の範囲

$$\{0, b_0\}, \{b_0, b_1\}, \dots, \{b_{L-1}, \infty\}$$

に分ける。 $\{0, b_0\}$ を 0 番目の bucket, $\{b_{l-1}, b_l\}$ を l 番目の bucket ($1 \leq l \leq L-1$) $\{b_{L-1}, \infty\}$ を L 番目の bucket とする。この bucket 内に損失額が入る確率を $Prob_l$ とし、そこでの損失額を A_l として代表させると損失額分布は $(Prob_l, A_l), l=1, \dots, L$ として表わされる。この損失額分布を裏付け資産が増えるごとに更新させることで条件付き損失額分布が求まる。

2.3 インプライド・コピュラアプローチ

次に、インプライド・コピュラアプローチを紹介する。インプライド・コピュラアプローチは、Hull and White (2006) ⁴⁾によって提案された価格評価法であり、ある t 時点のハザード率シナリオの実現確率を市況に合うように実際に取引された市場データを用いて求めることで、CDO トランシェの価格を求める方法である。

CDO の価格評価モデルの多くはファクター・コピュラ・モデルに基づいている。このモデルは、複数の資産の同時デフォルトをモデリングする方法として、デフォルト時刻の同時分布をコピュラ概念を用いて表現する。

いま、デフォルトがポアソン過程に従って起きると仮定した場合に、複数企業に同時に影響を与えるデフォルト要因 M を与えた下での $\lambda_j(t|M)$ を企業 j の t 時点でのハザード率とすると、 $\lambda_j(t|M)$ とデフォルト時刻の分布 $Q_j(t|M)$ の間の関係は、

$$\lambda_j(t|M) = \frac{dQ_j(t|M)/dt}{1-Q_j(t|M)} \quad (6)$$

と表わされ、 M の確率分布に応じたハザード率 λ_j が明らかとなる。インプライド・コピュラアプロ

チでは、ハザード率シナリオ $\lambda_k, k=1, \dots, K$ を事前に与えて、市況に適合するように市場データを用いて確率分布を求める方法である。具体的には、時刻 t の条件付き累積デフォルト確率を

$$Q(t|\lambda_k) = 1 - \exp(-\lambda_k t) \quad k=1, \dots, K \quad (7)$$

とし、 K 個からなるハザード率シナリオ λ_k の確率 π_k を推定することになる。実際の市場からは CDS インデックスと各トランシェのスプレッドが得られるため、式(1)の当該トランシェの現在価値 V の式 ($V(s_m, \lambda_k)$ と表す)を用いて、次の制約条件

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \pi_k V(s_m, \lambda_k) &= 0 \quad m=1, \dots, 6 \\ \sum_{k=1}^K \pi_k &= 1 \\ \pi_k &\geq 0 \quad k=1, \dots, K \end{aligned} \quad (8)$$

を満たす π_k を求めることになる。 λ_k の選択については、最も大きなハザード率の下での価格評価と、最も低いハザード率の下での価格評価を求め、その価格差を K 等分するようなハザード率を候補として採用する。

実際には、Hull and White (2006) ⁴⁾の方法と同様に、上記の制約条件のもと、 $\sum_{k=1}^K w_k \pi'_k$ (ただし $\sum_{k=1}^K w_k = 1$)、を最大にする π'_k を線形計画問題を解くこと⁶⁾で求めた。ここでは、各 k について得られた π'_k を規準化することにより $\pi_k = \pi'_k / \sum_{k=1}^K \pi'_k$ を求めた。

2.4 ダイナミック・インプライド・コピュラ・モデル

インプライド・コピュラアプローチは、ある時点において市場で観測された CDS インデックスとトランシェのスプレッドから、その時点におけるハザード率の分布を推定するが、将来のハザード率の分布を予測することができない。そこで、安藤、津田、田野倉、佐藤、北川 (2009) ⁶⁾は、ハザード率の時系列構造を考慮したダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルを提案し、ハザード率の予測を試みた。具体的には、ハザード率の時系列構造を表現するモデルとして、ハザード率の期待値に1次のトレンドモデル

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + v_n \\ E[\lambda_n] &= \bar{\lambda}_n = t_n + w_n \end{aligned} \quad (9)$$

が仮定されている. なお, システムノイズ v_n と観測ノイズ w_n は, それぞれ 1 次元のホワイトノイズである. モデルの推定, 予測にはモンテカルロ・フィルタが用いられた. モンテカルロ・フィルタは, 状態推定の問題で取り扱われる予測, フィルタ, 平滑化の分布を u 個の粒子を用いて近似する方法である. 詳細は Kitagawa (1993, 1996)⁷⁻⁸⁾ を参照のこと.

本論文では, 安藤, 津田, 田野倉, 佐藤, 北川 (2009)⁶⁾ に提案されたダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルに関して, より価格推定精度を向上させるための方法を提案する. 提案するモデルは, Kariya and Tsuda (1994)⁹⁾ の時間依存型マルコフ・モデルの概念, 及び, その状態空間モデルへの応用 (Tsuda (2003))¹⁰⁾ に準拠するものであり, 事前に明示的に把握することが困難な属性を時系列的属性としてモデルの中に導入するもので, 何らかの要因によって引き起こされる価格変動を考慮する. 具体的には, 未知の要因によって引き起こされる変動が 1 期前の誤差の変動に残っているものとして仮定する. すなわち, ハザード率の時系列構造を表現するモデルとして, ハザード率の期待値 $E[\lambda_n]$ に,

$$\begin{aligned} E[\lambda_n] &= \bar{\lambda}_n = t_n + \beta w_{n-1} + w'_n \\ t_n &= t_{n-1} + v_n \end{aligned} \quad (10)$$

を仮定する. なお, システムノイズ v_n と観測ノイズ w'_n は, それぞれ 1 次元のホワイトノイズであり, w_{n-1} は, 1 期前の観測ノイズが実現した誤差である. また, モデルの推定, 予測にはモンテカルロ・フィルタを用いた.

1 期先の将来予測については, モデルの推定の際に得られた状態変数 t_n の数値結果をシステムモデルに代入することにより, 1 期先の状態変数 t_{n+1} が得られるので, これを観測モデルに適用することにより 1 期先のハザード率の期待値 $\bar{\lambda}_{n+1}$ が求まる. ハザード率分布の形状は, n 時点と同じとみなし, 期待値のみ変動したと仮定することにより, 1 期先のハザード率分布を予測する. これを裁定機会がない, すなわち, 式(1)の価格評価モデルで,

$$V = A(s) + B(s) - C = 0$$

を仮定することにより, 各トランシェの期待スプレッド s の値が求まる.

3. 実証分析

3.1 ハザード率の分布の推移

本節では, 5 年満期の欧州の CDS インデックス iTraxx EUR のスプレッド及び CDS インデックスの構成銘柄を参照資産とする CDO のトランチドインデックスのスプレッドの日次データの終値に基づき, インプライド・コピュラ・モデルにより推定したハザード率の確率分布の推移を示す. データは, 2005 年 9 月 23 日から 2008 年 9 月 26 日間の期間であり, 出所は, Bloomberg L.P. である.

Fig. 1 は iTraxx EUR の参照資産である CDS ポートフォリオを担保資産とする CDO トランシェのスプレッドの推移を表す (左軸の単位 Basis point). トランシェにはエクイティ (Equity, 実線), メザニン (Mezzanine), シニア (Senior, 長鎖線) があるが, メザニンについてはさらに Mez1 (破線), Mez2 (点線), Mez3 (長二点鎖線) と分かれている. そして, 最初に挙げたエクイティ (Equity, 実線) については, プレミアムが年率 5% と定められており, 取引開始前に一括で決済される受取額の方が変動することから, ここでは想定元本に対する割合 (%) として右軸にて示すことにする.

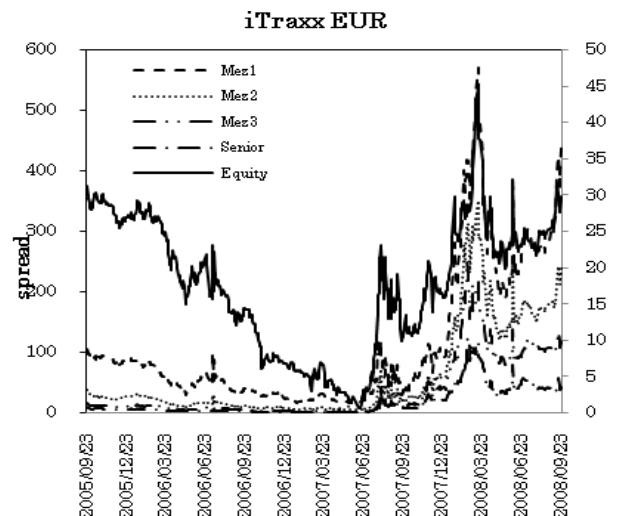


Fig. 1. CDO tranches of iTraxx EUR index

Fig. 1 で示すように iTraxx EUR は、どのトランシェのスプレッドも 2007 年の 7 月ごろから上昇しており、信用リスクが低いシニアクラスの価格（スプレッド）も上昇していることから、米国のサブプライム問題が欧州市場の信用リスクの上昇へと影響を与えていることがわかる。2008 年の 3 月は、米国の大手金融機関が経営危機に陥り、急激にスプレッドが上昇している。同様に、2008 年 9 月には、米国の大手金融機関の破綻により、再びスプレッドが上昇している。

Fig. 2 の (A) は、2005 年 9 月 23 日から 2008 年 9 月 26 日間の期間における iTraxx EUR のハザード率の確率分布の推定結果を示す。縦軸は、ハザード率の確率密度を表し、横軸はハザード率の大きさに左から右に向かって増加する。そして、奥から手前に向かって時間が経過しており、開始時点から徐々に確率分布の峰が左方（ハザード率が低い方）に移動しているが、中盤あたりから右方（ハザード率が高い方）に移動していくことがわかる。Fig. 2 (B) は、Fig. 2 (A) の高さを制限したもので、奥から手前に向かって時間が経過し、Fig. 2 の (C) は、手前から奥に向かって時間が経過したときのハザード率分布の変化を示している。俯瞰のポイントを下げると、中盤あたりから時間の経過とともにハザード率が大きい方にシフトしていく様子だけでなく、分布の散らばり度も大きくなっている様子が確認できる。このことは、デフォルト関連の増加を示唆する。

3.2 ハザード率の期待値の推定結果

次に、提案した方法によるハザード率の期待値に対する推定結果を示す。まず、インプライド・コピュラアプローチにより求められた各時点のハザード率の確率分布の期待値に対して、式 (10) のモデルの推定を行うには、推定誤差を最小にする 1 期前の誤差 w_{n-1} の係数 β の値を求める必要がある。なお、観測ノイズ w'_n は平均 0、分散 σ_w^2 、システムノイズ v_n には平均 0、分散 σ_v^2 の正規分布を仮定した。

Fig. 3 は、係数 β とハザード率の期待値に関する推定誤差の標準偏差を示す。 $\beta = 0.3$ のとき、推定誤差の標準偏差が最小となることを示している。

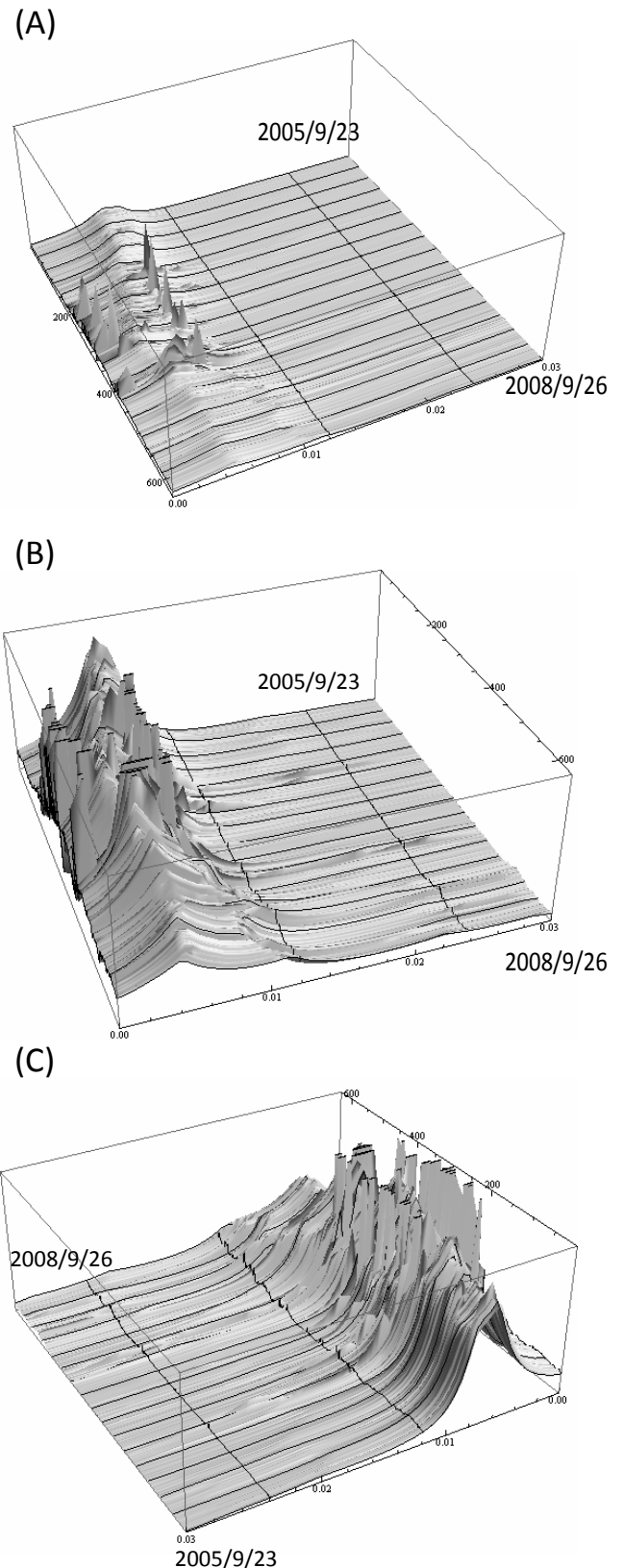


Fig. 2. Probability distributions of Hazard rate

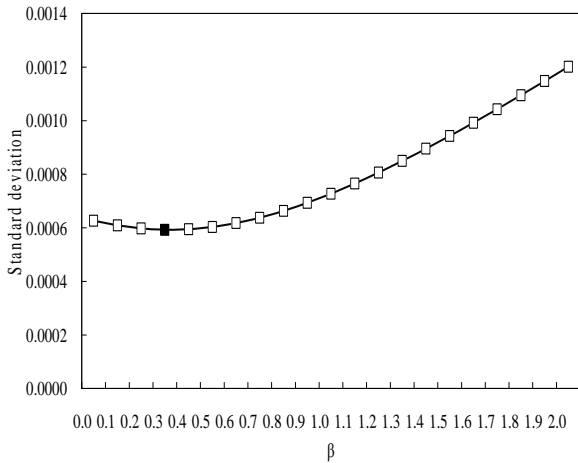


Fig. 3. Standard deviations of estimation error

次に、推定誤差が最小となる $\beta = 0.3$ として、ダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルにより推定したハザード率の期待値に基づき、トランシェごとの推定価格と市場価格 s_m との誤差を評価した結果を Table.1 に示す. Table.1 は、各トランシェごとに 2005 年 9 月 23 日から 2008 年 9 月 26 日間の期間における価格誤差の分散と標準偏差(単位 Basis point)を示す. 各トランシェにおいて、1 期前の誤差 w_{n-1} を考慮しないモデル ($\beta = 0.0$) と比べて、推定誤差が小さくなっていることがわかる. 信用リスクが低くなるにつれて価格変動は小さくなるため、メザニン (Mez1) からシニア (Senior) に向けて誤差が小さくなる.

Table 1. Estimation Errors of CDO tranches

	$\beta=0.0$		$\beta=0.3$	
	Variance	Standard deviation	Variance	Standard deviation
Mez 1	76.05	8.72	73.48	8.57
Mez 2	16.06	4.01	11.77	3.43
Mez 3	14.73	3.84	11.76	3.43
Senior	2.76	1.66	2.57	1.60

Fig. 4 は、 $\beta = 0.3$ の場合の iTraxx EUR のハザード率の期待値をモンテカルロフィルタにより推定した結果である. ハザード率の期待値 $E[\lambda_n]$ (original 灰色) をモデル (estimation 黒の実線) が良好に推定

していることがわかる.

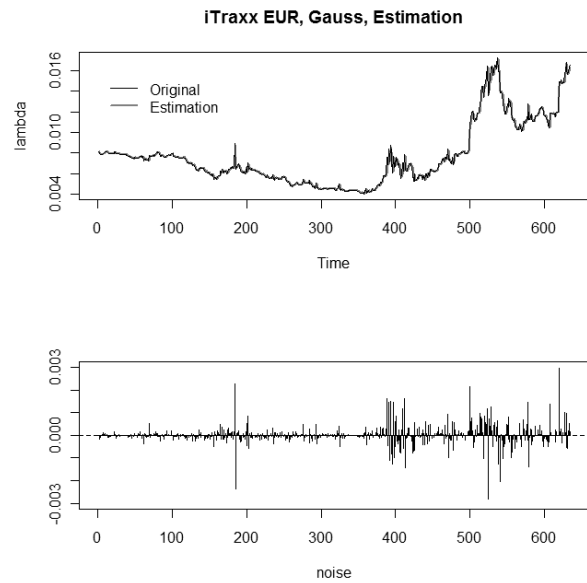


Fig. 4. Estimation of $E[\hat{\lambda}_n]$ at $\beta=0.3$

最後に、 $\beta = 0.3$ を仮定した場合のハザード率の期待値 $E[\lambda_n]$ の 1 期先を予測した結果を示す (Fig. 5). ハザード率 が 0.01 を超えた水準においても予測誤差が概ね数%以内に収まっている.

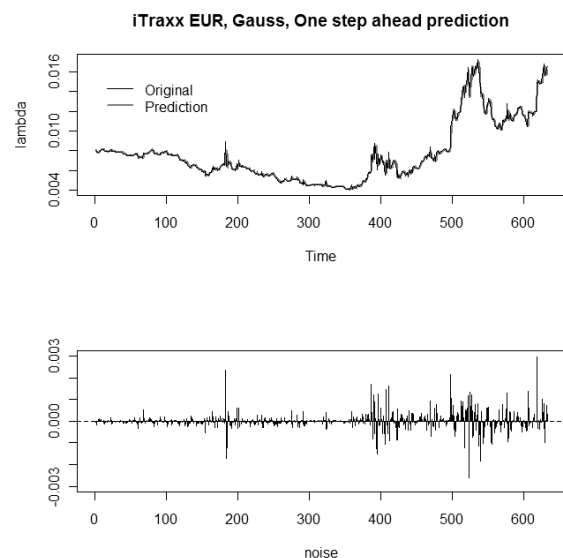


Fig. 5. Prediction of $E[\hat{\lambda}_n]$ at $\beta=0.3$

1 期先のハザード率の期待値の予測値を用いて、メザニン・トランシェのスプレッド値の予測を行っ

た結果を示す。具体的には、1期前のハザード率分布の形状が1期先も同じで、期待値のみ変動したと仮定し、式(1)の裁定機会がないと仮定した価格評価モデルから当該トランシェの現在価値を求めて、スプレッド値の予測を行った。Table.2は、各CDOトランシェの価格に関する予測誤差の分散と標準偏差(単位Basis point)を示す。予測期間は2005年9月24日から2008年9月26日間の期間である。Table.3は、サブプライム問題が顕在化しはじめた2007年7月以降2008年9月26日までの各CDOトランシェの価格に関する予測誤差の分散と標準偏差(単位Basis point)を示す。サブプライム問題が顕在化しはじめた2007年7月以降の期間では、各CDOトランシェで価格水準比で標準偏差が11%以内となっている。

なお、ここでは、 $\beta = 0.3$ と仮定したが、実際に予測を行うには、データが増えるごとに推定誤差を最小とする β を求める必要がある。

Table 2. Prediction Errors of CDO tranches
(Data period : 2005/9/24-2008/9/26)

	$\beta=0.3$			
	Variance	Standard deviation	Average of spread	Standard deviation \div Average
Mez 1	161.97	12.727	109.0	11.68%
Mez 2	30.44	5.517	56.8	9.71%
Mez 3	26.69	5.166	35.0	14.78%
Senior	3.22	1.795	16.1	11.16%

Table 3. Prediction Errors of CDO tranches
(Data period : 2007/7/1-2008/9/26)

	$\beta=0.3$			
	Variance	Standard deviation	Average of spread	Standard deviation \div Average
Mez 1	382.289	19.552	187.7	10.42%
Mez 2	72.641	8.523	114.2	7.46%
Mez 3	60.572	7.783	72.5	10.74%
Senior	6.573	2.564	33.5	7.65%

4. おわりに

本論文では、安藤、津田、田野倉、佐藤、北川(2009)により導入されたハザード率に時系列構造を表現したダイナミック・インプライド・コピュラ・モデルに基づく新たなモデルを提案した。当モデルは、実証分析結果から債務担保証券(CDO)の価格の推定精度を向上させることがわかった。このことにより、提案したモデルは、債務担保証券(CDO)のリスク評価の観点から役立つことが期待される。

参考文献

- 1) Vasicek, O., "Probability of Loss on Loan Portfolio", Workingpaper, KMV Corporation (1987).
- 2) Li, D.X., "On Default Correlation: a Copula Approach", Journal of Fixed Income, Vol.9, No.4, 43-54 (2000).
- 3) Laurent, J. P., and J. Gregory, "Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas", Journal of Risk, Vol.7, No.4, 103-122 (2005).
- 4) Hull, J. and White, A., "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach", Journal of Derivatives, 14, 8-28 (2006).
- 5) Hull, J. and White, A., "Valuation of a CDO and an nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation", Journal of Derivatives, 12, 2, 8-23 (2004).
- 6) 安藤雅和, 津田博史, 田野倉葉子, 佐藤整尚, 北川源四郎, "ダイナミック・インプライド・コピュラモデルによる債務担保証券(CDO)の価格予測", ジャーナル, Vol.18, 206-235, (2009) .
- 7) Kitagawa, G., "A Monte Carlo Filtering and Smoothing Method for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models", Proceedings of the 2nd U.S.-Japan Joint Seminar on Statistical Time Series Analysis, 110-131, Honolulu, Hawaii, January 25-29 (1993).
- 8) Kitagawa, G., "Monte Carlo Filtering and Smoothing Method for Nonlinear Non-Gaussian State Space Models", Journal of Computational Graphical Statistics, 5, 1, 1-25 (1996).
- 9) T.Kariya and H.Tsuda, "New Bond Pricing Models with Applications to Japanese Data", Financial Engineering and the Japanese Market, Vol.1, No.1, 1-20 (1994).
- 10) H.Tsuda, "Prediction of Individual Bond Prices via a Dynamic Bond Pricing Model: Application to Japanese Government Bond Price Data", Asia-Pacific Financial markets, Vol.10, No.1, 59-85 (2003).