

Difficulties of Evolutionary Many-Objective Optimization

Tomoyuki HIROYASU** Hiroyuki ISHIDA* Mitsunori MIKI*** and Hisatake YOKOUCHI**

(Received January 17, 2009)

Well-known Evolutionary Multi-objective Optimization (EMO) algorithms, such as NSGA-II and SPEA2, show rapid degradation of accuracy with increasing number of objectives. To solve this problem, EMO algorithms have been modified by strengthening selection pressure, limitation of search area in the objective space, and use of indicator functions, etc. Here, we describe the difficulties of the search in many-objective space by examining the search of some modified EMO algorithms. The difficulties can be divided into two classes. The first is the difficulty of convergence toward the Pareto-optimal front, which was confirmed to be due to weak selection pressure and disproportion between the extent of search area and the number of solutions. The second is the difficulty of diversity maintenance; it was confirmed that the solutions lost their diversity even if they converged toward the Pareto-optimal front by strengthening the selection pressure. For these difficulties, we examined the search of a preference-based algorithm as an example of a strategy limiting the search area. We demonstrated a trade-off relation between accuracy and diversity through computational experiments.

Key words : many-objective optimization, multi-objective optimization, R-NSGA-II, decision maker, reference point

キーワード : 多数目的最適化, 多目的最適化, R-NSGA-II, 意思決定者, 希求点

多数目的最適化における進化的探索の問題点

廣安知之・石田裕幸・三木光範・横内久猛

1. はじめに

多くの最適化実問題は複数の評価基準を有し、これを多目的最適化問題と呼ぶ。一般的に、多目的最適化問題では、評価基準同士が競合する関係（トレードオフの関係）にあるため、全ての評価基準が最良となる解が存在しない。従って、多目的最適化では、どのような解と比較しても優越されない解であるパレート

最適解という概念を導入している。パレート最適解は複数存在することが多く、このパレート最適解の集合を導出することが多目的最適化の目標の1つとなる。パレート最適解集合を求めるアプローチの1つに、進化的計算を利用した多目的進化計算 (Evolutionary Multi-objective Optimization:EMO) がある。進化計算には多点探索という特徴があるため、EMO は一度

* Graduate Student, Department of Knowledge Engineering and Computer Sciences, Doshisha University, Kyoto
Telephone:+81-774-65-6921, Fax:+81-774-65-6716, E-mail:hishida@mikilab.doshisha.ac.jp

** Faculty of Life and Medical Sciences, Doshisha University, Kyoto
Telephone:+81-774-65-6932, Fax:+81-774-65-6019, E-mail:tomo@is.doshisha.ac.jp

*** Department of Knowledge Engineering and Computer Sciences, Doshisha University, Kyoto
Telephone:+81-774-65-6930, Fax:+81-774-65-6716, E-mail:mmiki@mail.doshisha.ac.jp

の探索でパレート最適解集合の導出が可能である。近年、EMOの研究は盛んに行われており、その代表的な手法としてNSGA-II¹⁾、SPEA2²⁾がある。

これらの手法の有効性は、目的数が4以下の場合には報告されている。しかし、一般的な最適化実問題には、更に多くの目的数が存在する。この様に、目的数が5以上存在する場合、多目的最適化の中でも特に、“多数目的最適化”と呼ばれる。多数目的最適化に対し一般的なEMOを適用した場合、導出される解集合の精度が著しく悪化すると報告されている³⁾。この多数目的最適化における精度の悪化を改善するため、以下のように多目的最適化手法の改良が行われている。

1. 選択圧の強化

選択圧を強くして、解同士の適合度に差が生じやすくすることで、パレート最適フロントへの収束を高めるアプローチである。これは2種類に大別できる。1つは同じ適合度が与えられるはずの非劣解に異なる適合度を与える方法である^{4, 5, 6, 7, 8)}。もう1つは、優越の定義を拡張することで解同士の優越関係を生じやすくする方法である⁹⁾。

2. 目的関数空間における探索領域の削減

目的関数空間上で探索領域を狭めるためには2種類の方法がある。1つは、目的関数空間の次元数を削減する方法である^{10, 11)}。もう1つは、目的関数空間の次元数はそのままにしておいて、目的関数空間上の導出したい領域を指定することにより、探索領域を狭める方法である^{12, 13, 14)}。

3. 評価指標の利用

導出した解集合の精度と多様性をともに考慮する評価指標として、解集合が支配する超体積を利用する方法がある¹⁵⁾。この評価指標を最大化させるように探索を行う手法が提案されている^{16, 17)}。

本稿では、上記の幾つかの手法の探索の様子を確認することにより、多数目的最適化の問題点について述べる。まず2章では、解集合がパレート最適フロントに収束することの難しさについて述べ、3章では、解集合がパレート最適フロントに収束したとしても、パレート最適フロント上で多様性を維持することが難しいことを述べる。そして、2, 3章を受けて4章では、

多数目的最適化ではどのような探索戦略が適しているかを議論し、その戦略に沿った手法の探索の様子を確認する。

2. パレート最適フロントへの収束の難しさ

従来の多目的最適化手法を多数目的最適化に適用した際の探索の様子を確認するため、NSGA-IIを用いた数値実験により、目的数の増加が探索に及ぼす影響を確認した。まず、各目的数において、NSGA-IIにより導出される解集合の精度を比較した。テスト問題には、DTLZ2 (単峰性関数)、DTLZ3 (多峰性関数)、DTLZ4 (バイアスのある単峰性関数)³⁾を利用した。DTLZテストセットは、目的関数の次元数を変更可能な数少ないテストセットで、いずれの問題も最小化問題である。また、DTLZテストセットは、関数 $g(x)$ の値を参照することにより、その解のパレート最適フロントからの距離を確認できるように設計されている³⁾。ある解の関数 $g(x)$ の値が小さいほど、パレート最適フロントに近い解であることを示す。また、関数 $g(x)$ の値が0になった時、その個体はパレート最適フロントに到達したことを示している。最小化問題における関数 $g(x)$ とパレート最適フロントの関係の概念図をFig. 1に示す。

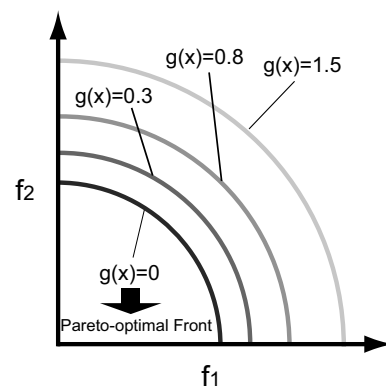


Fig. 1. Relation between $g(x)$ and pareto optimal front.

そこで本実験では、目的数を2, 6, 10としたDTLZテストセットの各問題を探索した際の関数 $g(x)$ の値に着目し、目的数の増加が解の精度に及ぼす影響を確認した。NSGA-IIのパラメータはTable 1の通りで、各問題について、30試行の探索を行った。

Table 1. Parameters of NSGA-II.

Population size	100
Archive size	100
End generation	250
Crossover rate	1.0
Crossover operation	2-point crossover
Gene length	20 * Number of variables
Mutation rate	1.0/Gene length
Crowding tournament size	2

各テスト問題における世代ごとの関数 $g(x)$ の値を Fig. 2 に示す。各グラフともに、横軸が世代数、縦軸がアーカイブに含まれる個体の関数 $g(x)$ の平均値であり、30 試行の中央値を表したものである。

各テスト問題において、目的数の増加につれて精度が著しく低下したことを確認できる。そして、10 目的の場合では、世代数の増加に従い $g(x)$ が上昇し、解集合の精度が探索の初期段階よりも悪化したことを確認できる。この現象を Fig. 3 を例に説明する。Fig. 3 は 2 目的の最小化問題の概念図である。図上の解 C, D を比較した場合、解 D の方が $g(x)$ が低く、精度が高いにも関わらず、探索中では劣解となり、解 C の方が重要視されてしまう。このような精度と適合度の逆転現象は、目的関数空間に対して探索解が少ない場合に起こり易い。もしも探索解の数が多く、Fig. 3 の点線で描かれた領域にも解が存在すれば、解 C は劣解となり、精度の順序と優越に基づくランクは逆転しないのである。また、同一ランク内の解同士を比較する場合にも同様の現象が起こる。解 A, B を比較した場合、これら 2 つの解はともに非劣解となるため同一ランクが付与されることになるが、探索中では多様性維持のために解の混雑度も加味するため、精度が悪い解 A の方が重視されてしまう。つまり、精度が高い解を偶発的に導出できたとしても、探索解数と目的関数空間の不均衡から起こる適合度割当と精度との逆転現象により、探索中で淘汰されてしまう可能性が高いのである。従って、10 目的などの多数目的最適化では、空間の広さに対して余りにも探索解が少なく、上記のような適合度割当と精度との逆転現象が頻繁に起こるため、探索が進むにつれて精度が悪化したと考えられる。これが多数目的最適化におけるパレート最適フロントへの収束の難しさの 1 つとなる。

次に、精度の向上と非劣解の数には密接な関わりが

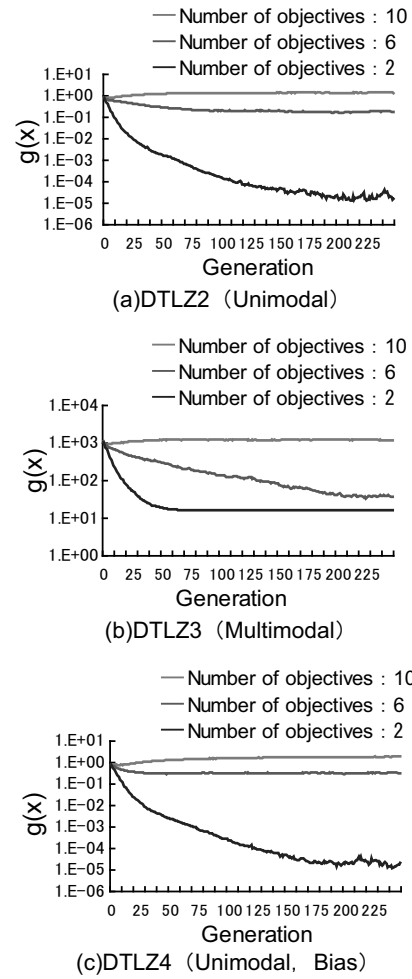


Fig. 2. Accuracy of solutions obtained by NSGA-II in each number of objective space.

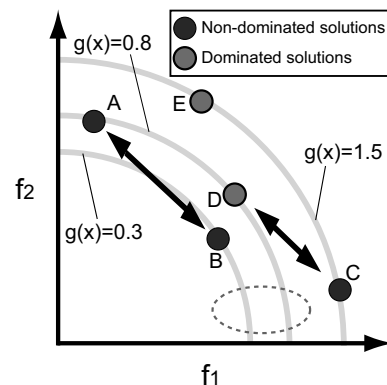


Fig. 3. An example of disagreement between accuracy and ranking based on domination.

あるため、本実験中の非劣解の数の推移に着目した。上述の実験において、世代ごとのアーカイブに含まれ

る非劣解の数を Fig. 4 に示す. 各グラフともに, 横軸が世代数を表し, 縦軸がアーカイブ母集団内の非劣数であり, 30 試行の中央値を表した. また, アーカイブサイズは 100 であるため, 非劣解数は 0~100 の値をとる.

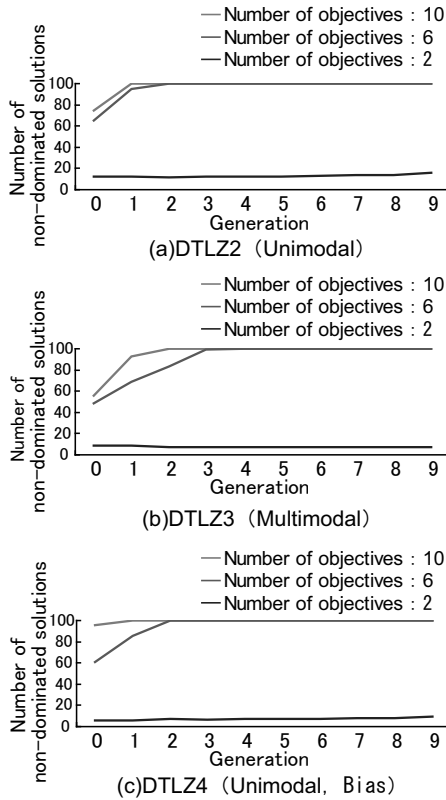


Fig. 4. Number of non-dominated solutions obtained by NSGA-II in each number of objective space.

実験結果より, 全てのテスト問題において, 目的数を多くすると, 著しく非劣解が占める割合が高くなったことが分かる. 特に 10 目的の場合, 2 世代目以降のアーカイブ母集団は非劣解のみで構成された. これは, 多数目的最適化では, 探索の初期段階から, ほとんどの解が同じ適合度を付与されたことを示している. 多目的 GA の探索では, 適合度が高い解周辺に次世代の解を生成することで解の精度を向上させているが, 多数目的最適化では解同士で優劣の区別が付かなくなるため, 精度が向上しなかったと考えられる. この問題に対して, 選択圧を強くすることによりパレート最適フロントへの収束を促進し, 精度を向上させる手法が提案されている. 次章では, その代表的な手法の探索

の様子を確認することにより, 多数目的最適化における解集合の多様性維持の難しさについて述べる.

3. 多様性維持の難しさ

Average Ranking¹⁸⁾, Summed Ratio¹⁸⁾, The Favour Relation⁴⁾, K-Optimality¹⁹⁾ は, 非劣解同士にも異なる適合度を付与し, 解の選択圧を強くする代表的な手法である. その中でも, Average Ranking が最も良好な探索性能を有すると David W. Corne らは報告している⁷⁾. Average Ranking は, 各目的ごとにランキングを計算し, 全ての目的のランクを加算した値を適合度とするメカニズムである. 例えば, 3 目的の問題において, ある解が, f_1 に関して 3 番目に良好, f_2 に関して 2 番目に良好, f_3 に関して 5 番目に良好な値であるとする. この場合, $3+2+5=10$ がこの解の適合度となる. Average Ranking を組み込んだ多目的 GA は精度の高い解を導出できると報告されているが, 多様性については検討されていない. そこで, Average Ranking を組み込んだ NSGA-II の多様性について検証するため, 解の分布を確認する実験を行った. 対象問題を DTLZ2, パラメータの設定を全章と同様 Table 1 の通りにした. ただし, 本稿では多数目的最適化を対象としているが, ここでは確認を簡単にするため, 目的数を 2 とした. 0, 10, 20, 30, 40, 50 世代目におけるアーカイブ内の解の分布を Fig. 5 に示す. 各グラフともに, 横軸が 1 目的めの評価値, 2 目的めの評価値であり, アーカイブ内の 100 個の解集合を表している.

実験結果より, 導出された解集合は, $(f_1, f_2) = (0, 1)$ の点付近に収束したことが分かる. このことから, Average Ranking を用いると, 精度の高い解の導出は可能でも, 多様性のある解集合は導出できないことが分かる. 従って, 得られた解集合から最終的な解を決定する意思決定者 (Decision Maker:DM) からすれば, 解の選択肢が減るだけでなく, 解選択の際に有益な情報となる各目的間のトレードオフの度合い, パレート最適フロントの形状を把握できない. 同様に, Summed Ratio, The Favour Relation, K-Optimality などの手法も, 精度向上のメカニズムは導入しているが, 多様性は加味されていない. 多数目的最適化にお

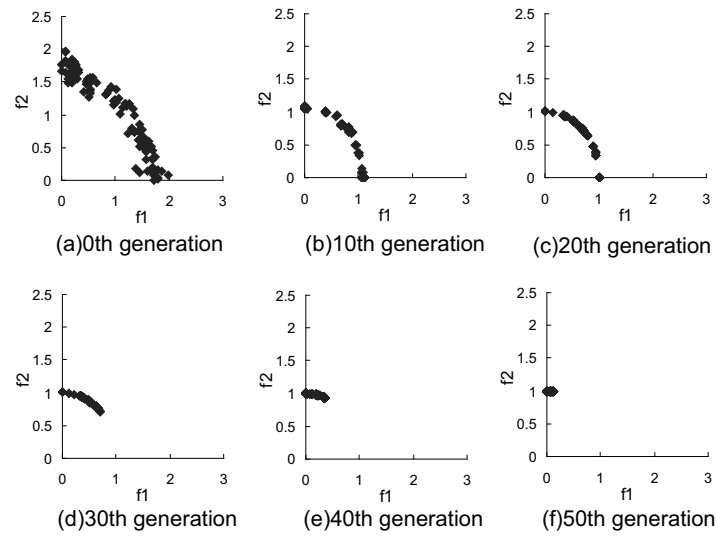


Fig. 5. Distribution of solutions obtained by NSGA-II with Average Ranking.

いても、多目的最適化の目標である精度、多様性のある解集合を導出すべきである。

4. 意思決定者の選好情報を利用した多目的最適化

4.1 探索戦略

本来ならば、精度、多様性を有する解集合を導出することが望ましい。しかし、多数目的最適化を対象とした場合は、パレート最適フロントに敷き詰めるのに必要な解の数が莫大であるため、それは困難であると考えられる。仮に、パレート最適フロントの形が線形で、パレート最適解が各目的において $[0, 1]$ の範囲全域に値をとる問題があったとする。この問題のパレート最適フロント上に各目的に関して 0.1 間隔で均一に解をマッピングした時に必要な解の数を考える。2目的の場合、この問題におけるパレート最適フロントの空間は1次元になるため、この空間に解を敷き詰めるには、およそ $1/0.1 = 10$ 個の解が必要であると考えられる。同様に、3目的の場合は2次元のパレート最適フロントになるため、およそ $(1/0.1)(1/0.1) = 10^2$ 個の解、10目的の場合は、およそ 10^9 の解が必要になると考えられる。この様に、パレート最適フロントを敷き詰めるために必要な解の数は指数的に増加するため、多数目的最適化においてパレート最適フロント全域に解を敷き詰めることは、計算コストを考慮すると極めて困難である。

そのため、多目的最適化の本来の目標であるパレート最適フロント全域に分布する解集合を導出する代わりに、限定された領域内で多様性を有する解集合を導出することが多数目的最適化の目標として挙げられる。そして、精度が高く、限定された領域内で多様性を有する解集合を基にして、DMは局所的に、各目的間のトレードオフの度合いなどの対象問題や各解の特徴を把握できるようになると考えられる。この目標を達成するための戦略として、以下の2段階のメカニズムが必要であると考えられる。

- STEP 1: パレート最適フロントへの収束
解集合を限定した領域内へ収束させる。多数目的最適化では、2章で述べたように、従来の優越のメカニズムだけでは解集合がパレート最適フロントに収束しない。そのため、優越以外のパレート最適フロントへの収束のメカニズムとして、目的関数空間上で各解がどの程度限定した領域に近いかを判断し、それにより選択圧を加える。
- STEP 2: 多様性の維持
限定した領域内で解集合の多様性が維持されるようにする。STEP 1のメカニズムのみでは、3章で述べたように解集合が1点に収束してしまい、多様性のある解集合を導出できない。そのため、限定した領域内で、多様性を維持するためにはど

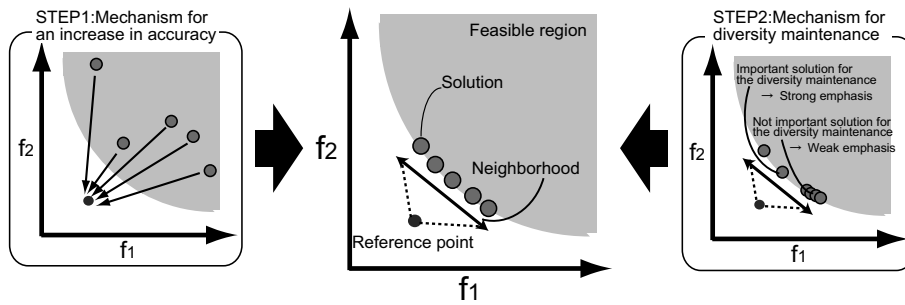


Fig. 6. Strategy for Evolutionary Many-Objective Optimization Using Decision Maker's Preferences.

の解が重要であるのかを判断し、解の重要度を比較する際にその情報を利用する。

領域を限定するアプローチの一例として、DMの選好情報を用いる手法が提案されている^{12, 13, 14}。これらの手法では、DMの選好情報の基準として、希求点(目的関数空間上にDMが自由に設定する理想の点)を利用する。本戦略に希求点を適用した場合、希求点から最も近くにある1つの解に解集合が収束せず、その近傍にも解集合を得ることが出来れば、目標を満たすと考えられる。そして、STEP1に相当する代表的なメカニズムとして、希求点からの距離や希求点との類似度を表現する achievement scalarizing function²⁰などの指標を導入する。また、STEP2に相当する代表的なメカニズムとして、 ϵ -clearing¹²がある。これは、解同士のユークリッド距離がパラメータ ϵ 以上に保たれるようにするメカニズムである。具体的には、ある解集合から無作為に解を選択し、選ばれた解から ϵ 以下の距離にある解を多様性維持のために不必要な解とみなして重要度を下げることによって、淘汰され易くしたり親として選択されにくくする。そして、無作為に選択した解や重要度を下げた解を除いた後の解集合から、再び無作為に解を選択し、同じ処理を繰り返していく。多数目的最適化におけるDMの選好情報を用いた多目的最適化の探索戦略を表す概念図を Fig. 6 に示す。ただし、これは2目的最小化問題を想定した概念図である。

4.2 R-NSGA-II

DMの選好情報を用いた代表的なEMOである Reference point based NSGA-II (R-NSGA-II)¹²では、優越に基づくランキングを行った後、同一ランクの解

集合に対し、希求点からのユークリッド距離(各目的を正規化した後のユークリッド距離)に基づく適合度を割り当てる。これが探索戦略のSTEP 1に相当するメカニズムである。その後、STEP 2に相当するメカニズムとして ϵ -clearing が適用され、同一ランクの解集合の多様性を加味して適合度が更新される。希求点からのユークリッド距離に基づく適合度割り当て、 ϵ -clearingの擬似コードをそれぞれ Algorithm 1, 2に示す。擬似コードにおいて、 P は探索解集合を表す。また、R-NSGA-IIでは、複数の希求点の設定が可能のため、DMにより設定された希求点の集合を R で表す。適合度は各解の *fitness* に格納される。解の重要度の比較は、まず、優越に基づいたランキングにより導出された各解の *rank* を基準に行われる(ただし、多数目的最適化では、ほとんどの解に同一の *rank* が格納されている)。次に、比較対象の解が同一ランクを有する場合、重要度の比較は Algorithm 1, 2により導出された *fitness* を基準に行われる。

Algorithm 1では、まず4~6行目の操作により、解 F_i と希求点 R_j の全ての組み合わせについてのユークリッド距離 $d_{i,j}$ を計算する。次に、7~9行目の操作により、同一ランク内の解集合において、全ての解の希求点 R_j からのユークリッド距離を昇順にソートした際、解 F_i が何番目に位置するのかを $o_{i,j}$ に格納する。そして、10~12行目の操作により、解 F_i における全ての希求点に関する順位 $o_{i,0} \sim o_{i,|R|}$ の中から、最小の値を解 F_i の *fitness* としている。

Algorithm 2では、まず4~5行目の操作により、同一ランク内の全ての解集合の中からランダムに選択した1つの解を r とし、解集合 F から解 r を取り除く。次に、6~11行目の操作により、解集合 F の中から、

Algorithm 1 : Flow of R-NSGA-II for improvement of accuracy

```

1 : calculate_domination_based_rank( $P$ )
2 : for all  $rank$  do
3 :    $F := \{x \in P | x.rank = rank\}$ 
4 :   for all pairs  $i \in F, j \in R$  do
5 :      $d_{i,j} := \text{normalized\_euclidean\_distance}(i, j)$ 
6 :   end for
7 :   for all pairs  $i \in F, j \in R$  do
8 :      $o_{i,j} := \text{ascending order of } d_{i,j} \text{ in } \{d_{x,j} | x = 1, \dots, |F|\}$ 
9 :   end for
10:  for all  $i \in F$  do
11:     $i.fitness := \min\{o_{i,y} | y = 1, \dots, |R|\}$ 
12:  end for
13: end for

```

Algorithm 2 : Flow of R-NSGA-II for diversity maintenance

```

1 : for all  $rank$  do
2 :    $F := \{x \in P | x.rank = rank\}$ 
3 :   while  $F \neq \phi$  do
4 :      $r := \text{random\_element}(F)$ 
5 :      $F := (F - \{r\})$ 
6 :     for all  $i \in F$  do
7 :       if  $\text{normalized\_euclidean\_distance}(i, r) \leq \varepsilon$  do
8 :          $i.fitness := \text{worst\_fitness}$ 
9 :          $F := (F - \{i\})$ 
10:      end if
11:    end for
12:  end while
13: end for

```

解 r とのユークリッド距離がパラメータ ε 以内にある解の $fitness$ を最も悪い値に設定し、解集合 F から取り除く。そして、上記の 4~11 行目の操作を、解集合 F が空集合になるまで繰り返す。

ここで、領域を限定する探索戦略に沿った手法の探索の様子を確認するため、数値実験を行った。テスト問題には 10 目的の DTLZ2, DTLZ3 を用い、パラメータは 2 章と同様 Table 1 の通り、 $\varepsilon = 0.1$ とした。まず、DTLZ のテスト問題は関数 $g(x)$ により各解の精度を確認可能であることを利用し、R-NSGA-II と NSGA-II の $g(x)$ の推移を確認することにより、精度について比較を行った。また、DM が選好する領域が 1 通りではな

い場合を想定して、2 つの希求点を設定した。具体的には、DTLZ2 においては、希求点は実行可能領域外にあるパレート最適フロントよりも十分良好な次の 2 点を設定した： $(0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$, $(0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。DTLZ3 においては、その問題の複雑さからパレート最適フロント付近に収束することは困難なため、パレート最適フロントよりも改悪な位置ではあるが、探索により導出することが困難である十分良好な領域に位置する次の 2 点を設定した： $(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0)$, $(4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$ 。それぞれのテスト問題における各世代の $g(x)$ の値を Fig. 7 に

示す。横軸が世代数、縦軸が各世代における解集合の $g(x)$ の値の平均値を表し、30 世代の中央値を用いた。

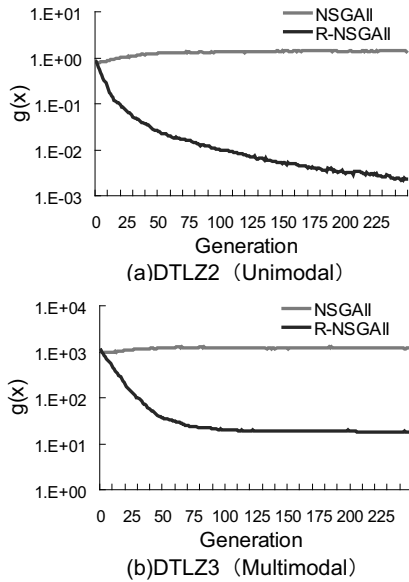


Fig. 7. Comparison between R-NSGA-II and NSGA-II regarding accuracy.

全てのテスト問題において、R-NSGA-II の方が NSGA-II よりも精度が高い解集合を得られたことを確認できる。また、解集合の多様性を確認するため、R-NSGA-II のある 1 試行によって得られた解の分布を確認した。NSGA-II の解集合の多様性を確認しなかったのは、精度の高い解同士を比較しなければ、DM にとって有益であるトレードオフの関係などの特徴が分からないからである。多目的最適化において、NSGA-II により得られる解集合は、上述の関数 $g(x)$ の推移を比較する実験結果により、探索によっても精度が改善しないことを確認できた。従って、NSGA-II の探索結果のような精度の悪い解集合の多様性が高かったとしても、DM にとって利点がないと考えられる。R-NSGA-II により導出された各解の目的関数値を Fig. 8 に示す。横軸が目的関数の番号、縦軸が目的関数の値を示し、1 つの解を線分で繋ぐことによって表現している。

DTLZ2, DTLZ3 とともに、1 点に解集合が収束することなく、希求点付近に多様性のある解集合が得られたことを確認できる。両テスト問題の探索結果ともに、希求点よりも目的関数値が高い値を示す解集合が多く存在するが、これは希求点が実行可能領域外などの探

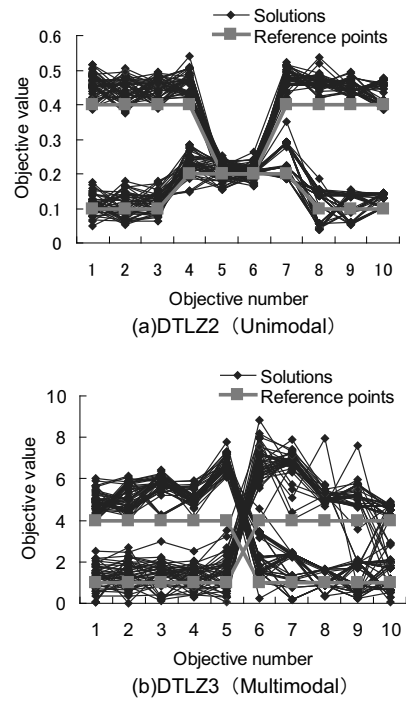


Fig. 8. Objective value-path of solutions obtained by R-NSGA-II.

索不可能な領域に設定されているからである。従って、R-NSGA-II で導出された解は、精度が高く、また、限定された領域で多様性のある解の導出という多目的最適化の目標を満たしている。

4.3 精度と多様性のトレードオフ

R-NSGA-II では、パラメータ ε を変動させることにより、導出する解集合の多様性の度合いを制御する。 ε が大きくなるにつれて多様性を加味する度合いが大きい探索となり、 $\varepsilon = 0$ は多様性を全く加味しない場合に相当する。しかし、R-NSGA-II において、多様性の度合いが精度にどのように影響を及ぼすのかについては議論されていない。従って、R-NSGA-II の探索において、多様性の向上が精度に及ぼす影響を確認する数値実験を行った。前節の実験と同じテスト問題、パラメータ、希求点を用い、 ε の変動により $g(x)$ の推移がどのように変化するかを確認した。 ε を変化した時、各テスト問題におけるそれぞれの ε の値での $g(x)$ の推移を Fig. 9 に示す。

両テスト問題において、 ε を大きくすればするほど、解集合の精度が悪くなったことが確認できる。これは、

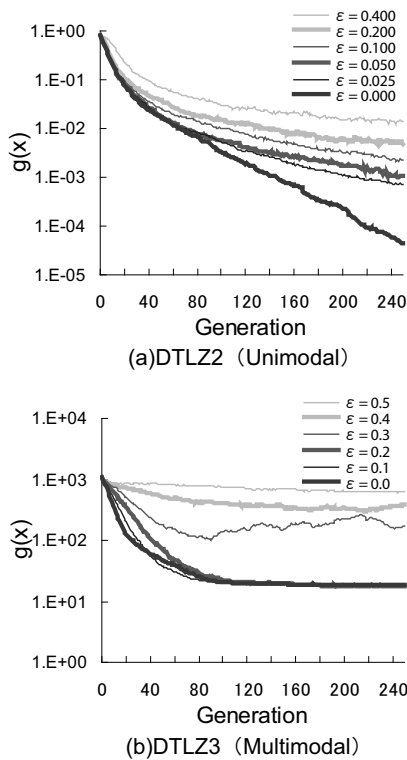


Fig. 9. Influence of the variation of ε upon the $g(x)$ transition.

多様性を加味すれば加味するほど、精度が高い解が偶発的に生成されたとしても、多様性維持のメカニズムにより、淘汰され易くなるためだと考えられる。この様に、多数目的最適化における R-NSGA-II では、多様性を考慮すればする程、解集合の精度の悪化を招いてしまう。

5. まとめ

本稿では、多数目的最適化に各多目的最適化手法を適用し、その探索の様子を確認することにより、多数目的最適化の探索の問題点について述べた。まず、探索領域の広さに比べて探索解数が少ないことや、選択圧の弱さからパレート最適フロントへ収束することが難しいことを確認した。次に、選択圧を強化してパレート最適フロントへの収束を高めたとしても、解集合が1点に収束してしまい、多様性が失われることが分かった。一方で、多数目的最適化においてパレート最適フロント全域に解を分布させることは、計算コストを考慮すると非常に困難である。従って、限定した

領域内で精度が高く多様性のある解集合を導出することを多数目的最適化の目標とし、その目標に即した手法の探索の様子を確認した。しかし、領域を限定したとしても、多様性と精度にトレードオフの関係があることが分かった。従って、今後の研究の方向性の1つとして、多様性の度合いを増しても精度が低下しにくい手法を開発することが挙げられる。

参考文献

- 1) A. Pratab K. Deb, S. Agrawal and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization:nsga-ii. *In KanGAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2000.*
- 2) M. Laumanns E. Zitzler and L. Thiele. Spea2: Improving the performance of the strength pareto evolutionary algorithm. *In echnical Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.*
- 3) M. Laumanns K. Deb, L. Thiele and E. Zitzler. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization. tik-technical report, no.112. 2001.
- 4) R. Drechsler N. Drechsler and B. Becker. Multi-objective optimisation based on relation favour. *In Proc. 1st EMO, pp. 154.166, Springer Verlag, 2001.*
- 5) N. Drechsler A. Sulflow and R. Drechsler. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces. *Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization - EMO 2007, pp. 715-726, Springer, Berlin, 2007.*
- 6) M. Koppen and K. Yoshida. Substitute distance assignments in nsga-ii for handling many-objective optimization problems. *Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization - EMO 2007, pp. 727-741, Springer, Berlin, 2007.*
- 7) Knowles David W, Corne.and Joshua D. Techniques for highly multiobjective optimisation:some nondominated points are better than others. *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation, 773-780, 2007.*
- 8) S. Kukkonen and J. Lampinen. Ranking-dominance and manyobjective optimization. *Proc. of 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp. 3983-3990, Singapore, 2007.*
- 9) H. E. Aguirre H. Sato and K. Tanaka. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of moeas. *Lecture Notes in Computer*

- Science 4403: Evolutionary Multi-Criterion Optimization - EMO 2007*, pp. 5-20, Springer, Berlin, 2007.
- 10) D. Brockhoff and E. Zitzler. Are all objectives necessary? on dimensionality reduction in evolutionary multiobjective optimization. *Lecture Notes in Computer Science 4193: Parallel Problem Solving from Nature - PPSN IX*, pp. 533-542, Springer, Berlin, 2006.
 - 11) K. Deb and K. Saxena. Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems. *Proc. of 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 3353-3360, Vancouver, 2006.
 - 12) K. Deb and J. Sundar. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms. *In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2006)*, 635-642, 2006.
 - 13) K. Deb and A. Kumar. Interactive evolutionary multi-objective optimization and decision-making using reference direction method. *In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2007)*, pages 781-788. New York: The Association of Computing Machinery (ACM), 2007.
 - 14) P. Korhonen L. Thiele, K. Miettinen and J. Molina. Interactive evolutionary multi-objective optimization and decision-making using reference direction method. *A preference-based interactive evolutionary algorithm for multiobjective optimization*, Technical Report Working Paper Number W-412, Helsingin School of Economics, Helsingin Kauppakorkeakoulu, Finland, 2007.
 - 15) E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms-a comparative case study. *Parallel Problem Solving from Nature, Vol. V pp.292-301*, 1998.
 - 16) Nicola Beume Tobias Wagner and Boris Naujoks. Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization. *In S. Obayashi et al., Eds., Proc. Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 4th Int'l Conf. (EMO 2007), LNCS 4403*, pp. 742-756. Springer, Berlin, 2007.
 - 17) N. Tsukamoto H. Ishibuchi and Y. Nojima. Iterative approach to indicator-based multiobjective optimization. *Proc. of 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 3697-3704, Singapore, September 25-28, 2007.
 - 18) P.J. Bentley and J.P. Wakefield. Finding acceptable solutions in the pareto-optimal range using multiobjective genetic algorithms. In (Chawdry et al, eds.) *Soft Computing in Eng'g Design and Manufacturing*, Springer Verlag, 1997.
 - 19) F di Piero. Many-objective evolutionary algorithms and applications to water resources engineering. *PhD thesis, University of Exeter, UK*, 2006.
 - 20) A.P. Wierzbicki. Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization. *Math Operationsforsch Statist Ser Optimization 8* pp. 55-60, 1977.