J・S・ミル『論理学体系』における帰納の要諦
――数学的帰納を巡って――

新　茂　之

はじめに

本論の目的は、ミル（John Stuart Mill, 1806-1873）の主著『論理学体系』の中で考究している帰納という論理的操作に一定の光を当てて、ミルが表立って取り上げていない数学的帰納の位置づけを闡明するところにある。ミルの『論理学体系』は、かならずしも帰納的ではない立論に言及して、その分析を精緻に展開している(1)。そうした立論の中には、不当に帰納という名称を残している論証も存在する。数学的帰納も帰納という言い方を保持している。はたして、ミルは、数学的帰納を帰納と見做すのであろうか。それとも、数学的帰納は、ミルにあっては、帰納の部類には入らないのであろうか。数学的帰納の厳格な体系的定式化は、論理学の現代的な動向とともに進展していくので、ミルは、そのような数学的帰納に自覚的になれたわけではない。だから、逆に、ミルが帰納に関して用意している足場から数学的帰納に関する評価を見定めるという試みは、『論理学体系』の現代的価値を値踏みする上で有効な指針になるはずである。そこで、本論では、ミルが帰納という言葉の不当な使用から抉り出している帰納の特

質を明別して、その照明の下で数学的帰納の性格を浮かび上がらせてみたい。

そのために、まず、第一章では、ミルの言説によりながら、帰納の基本的な特徴を見出した上で、ミルが帰納とは考えていない推論の一つを吟味の俎上に上げ、それと対比する形で帰納の特色の一つを明白にする。次に、第二節では、帰納という言葉を含んでいるものの真正の帰納ではない論証の立論的性格を解析する。その中で、帰納の第二の特色を明晰にして、数学的帰納がミルの言うところの帰納であるのかどうか、その問題を提起する。こうした論究を勘案しながら、第三節では、ケプラーが火星の連続的な軌道として楕円という着意を提出したときの思考の過程が帰納的であるという意見に対するミルの反論に注視して、なぜケプラーの企てが帰納ではないのか、その背景に迫る。最後に、第四節では、帰納の第三の特色を露わにし、ミルが帰納に関して打ち出している考え方の方向に沿って、数学的帰納の特性を際立たせる。

こうした本論の考察に加えて、論理学の現代的な視点から数学的帰納の働きにも言及しておきたい。すなわち、数学的帰納を論証として機能させる論理的体系は、体系の変則的な構成を遠ざけて、体系的な基礎を整備している。それと同じように、自然が斉一的であることは、帰納の成立に資する。ミルの言明も踏まえ、帰納と数学的帰納に絡めて自然の斉一性と体系の整礎性に触れながら、本論を締め括る。

第一節　帰納の基本的な性格

ミルは、帰納を次のように定義している。「帰納は、一般的な命題を発見し証明する操作である」[2]。この規定に従えば、帰納は、一般的な命題を見出して、その妥当性を証示するための推理である。しかも、ミルによれば、「一般

的な真理に到達する過程に関する分析は、どのような帰納であれ、あらゆる帰納に関する分析である」[3]。帰納の狙いは、一般的な命題を明別して、その正当性を論証するところにある。それゆえ、一般的な命題を論理的に導出するための手続きに関する解析は、帰納についての探査にほかならない。ミルに準拠していっそう特定的に言えば、帰納的な推理は、「ある集合に帰属する一定の個物について真であることは、その集合全体について真である」という仕方で進んでいく[4]。あるいは、帰納は、母集団から取り出した標本群で観察できた内容を母集団全体の特質として定位しようとする。このような帰納について、ミルは、それが「既知から未知に進んでいる」という点を強調している[5]。標本群の各成素について調べた事柄は、すでに確認している情報である。その情報に基づいて、実際には調査していない成素に関しても、その情報が真であると考えて、それを母集団に帰属するあらゆる成素のそれぞれに拡張しようとする。標本群に注目している段階では、母集団の一部を標本群として抽出しているだけで、母集団のあらゆる要素を網羅しているわけではない。それゆえ、ミルの洞察にあるように、帰納は、既知の前件から未知の後件を引き出そうとしているのである。

このような理解からすれば、たとえば、わたくしたちは、次のように考えるかもしれない。金星も地球も火星も、その他の惑星も太陽の光で輝いているので、太陽系のあらゆる惑星は、太陽の光で輝いている[6]。この考え方は、「あらゆる」に言及する一般的な命題を導出しているから、上述した帰納の特性に照らせば、帰納であるように思える。とはいえ、ミルは、このような推論を「わたくしたちのものとは全体的に異なる種類の帰納」と位置づけて[7]、ミルが見極めようとしている帰納からは除外している。なぜ、太陽系の惑星に関する推論は、帰納ではないのであろうか。ミルに則れば、その推論は、「既知の事実から未知の事実への推論ではなくて、既知の事実に関する簡略的な登録にすぎない」[8]。この説明から了知できるように、「太陽系のあらゆる惑星は、太陽の光で輝いている」という言

明は、ミルの言うところの一般的な命題ではない。この場合、太陽系の惑星に関する全称の言明は、「水星も、金星も、地球も、火星も、木星も、土星も、天王星も、海王星も、太陽の光で輝いている」という個別的な言明を一つにまとめて省略的に表している。すなわち、それは、枚挙的全称性の言明である。ミルの述べ方を援用すれば、そのような命題が表しているのは、「単称的な命題からなる数にすぎない」(9)。枚挙的全称性は、特定の標本に関する述定を一つ一つずつ網羅する代わりに、「あらゆる」という言葉によって、当該の標本群を要素とする有限な集合を略記しているだけである。だから、そのような言明は、たとえ「あらゆる」という言葉を用いていたとしても、未知の内容を含んでおらず、ミルの見方からすれば、帰納が産出する主張ではない。

逆に言えば、帰納が提示する全称性は、枚挙的ではなく、それまで数え上げられていなかった未知の標本をも内含する包括的全称性でなければならない。そうであるから、ミルは、次のように立言する。「一般的な命題は、際限のない数の個物について、すなわち、多かれ少なかれ、存在したり、あるいは、存在できたりするあらゆるものについて、肯定されたり、否定されたりするような命題である」(10)。帰納が確立しようとする全称性は、すでにあった対象であれ、いまある対象であれ、これからあるであろう対象であれ、具体的な標本にはなっていない対象にも及んでいるので、前提が提示している範囲を越えてしまっており、その点で包括的になっているのである。

ミルも述べているように、「図形が紙の上にあろうが想像の中にしかなかろうが、論証は（前に観察されたように）、一般的な定理を直接には証明していない」(11)。わたくしたちは、幾何学の定理を証明するときには、たいていの場合、図形を実際に描いたり、あるいは、それを思い浮かべたりする。当の定理に関する証明は、わたくしたちの目の前にある具体的な図形の操作とともに進んでいく。上の引用に則って言えば、それは、くだんの定理を一般的に論証しているわけではない。というのも、「そのような結論は、その図形で提示させている個別的な三角形あるいは円

について真である」からである[12]。定理の証明を遂行するために図形を用いる場合、その立論から引き出せる結論は、目前の図形に関して成立する個別的な主張でしかない。それにもかかわらず、たとえば、三平方の定理に関する証明がそうであるように、わたくしたちは、目の前にある図形と共通の特徴を持っているあらゆる図形に当該の結論を適用できると考えて、それを定理として一般的に言明しようとする。このように、幾何学の領域では、わたくしたちは、まずは既知の図形について定理を例証し、それに基づいて、その範疇に帰属する未知の図形をも包括して、一般的な陳述を果たそうとしている。こうした叙述の仕方からすれば、幾何学の証明は、帰納的であるように思える。確かにミルもそのような証明を「推論の同等性による帰納」と呼んではいる[13]。

しかし、ミルは、次のように明言する。「その用語は、適切には帰納に帰属できない」[14]。この引用がはっきりと示しているように、図形を使って編成していく幾何学の推論は、ミルにあっては、帰納ではない。とはいうものの、なぜ、個別的な事例から包括的全称性に移行しようとしているように見えもする幾何学の手法は、帰納的ではないのであろうか。ミルは、その理由に、「というのも、獲得された真理は、ほんとうに一般的ではあるけれども、個別的な実例の証拠に基づいては信じられていないからである」という解説を与えている[15]。この言説に基づいても、幾何学の証明が主張する全称性は、やはり、包括的である。それにもかかわらず、ミルに言わせれば、その手続きは、個別的な事例には依拠しておらず、帰納ではない。ミルがここで唱道しているような把握は、いったい、どのようにして成立するのであろうか。この問いに答えるには、ミルが語る推論の同等性による帰納がどのような類の立論であるのか、その特色を顕わにしなければならない。というのも、推論の同等性による帰納は、その名称からして、帰納的であるように見えているのにもかかわらず、ミルに従うかぎり、実際には帰納ではないからである。裏返して言えば、推論の同等性による帰納の内実は、具体的な図形から進んでいく幾何学的論証がなぜ帰納ではないのか、この問い掛

けに光を投げ掛ける。

ミルは、「ニュートンが二項定理を帰納によって発見した」という見解に反論しながら[16]、推論の同等性による帰納の性格を鮮明にしようとしている。ミルが嘱目している意見は、こうである。すなわち、ニュートンは、一般的な形式の二項式を取り扱う前に、具体的な冪について二項式を考察し、そこで発見した内容を一般化して二項定理を確保した。ミルの言葉を借りれば、「二項式を一定の数の冪にまで上げて、各冪の代数的な式が当の冪の指数と二項式の二つの項に対して立っている関係を見抜くまで、そうした冪を互いに比較」できる[17]。実際に計算できる数の冪まで二項式を取り上げて、そうした二項式を互いに見比べて、それらと係数の関係に共通している特徴を洗い出す。その上で、それを一般的に定式化すれば、あらゆる二項式に適用できる二項定理を獲得できる。これは、有限個の個別的な事例から、未知の事例も含んだ一般的な命題を導出しているので、一見したところでは、帰納である。

このような見方に反対して、ミルは、それが「ほんとうのところでは帰納ではない」とはっきりと述べる[18]。なぜか。ミルに従えば、そのような立論は、「個別的な実例からの一般的な命題の推論を含み込んでいないからである」[19]。確かに、具体的な指数をいくつか指定して、その下で二項定理を個別的に考察すれば、二項定理の一般的な考え方を分かりやすく理解できる。このような発想の仕方は、個々の場合に関する観察から一般的な把握に向かっているような体裁を取っている。だから、気づきの見地では、わたくしたちの思考は、帰納的である、と言えるかもしれない。とはいえ、ミルは、そうした観点を採用していない。なぜなら、帰納的な手続きに訴えずに二項定理の妥当性を証明できるからである。ミルの言い方に準拠すれば、「二項式を冪乗するさいには、その係数は、順列と組み合わせの諸法則に依存しなければならない」[20]。すなわち、順列と組み合わせについての着想を援用すれば、具体的な冪乗を個々に確認せずに、二項定理を一般的に確立できる。明らかに、この方途は、標本に関する個別的な観察に訴

えてはいないから、既知の標本に関する観察に基づいて未知の標本も含んだ母集団に関する包括的な命題を結論する帰納ではない。

第二節　推論の同等性による帰納

前節では、ミルの論定に従って、帰納の基本的な特徴を炙り出した。帰納は、標本の中で実際に確認できた既知の情報だけに基づいて、母集団に帰属する未知の標本にも当の情報を拡張的に適用していくための立論である。だから、帰納は、既知の事例に依拠しながらも、未知の事例を含み込んでいかなければならない。そうであれば、ミルの主張に反して、この見地から、個々の事例で吟味した二項定理に関する証明の方針を一般化して、二項定理に関する包括的な論証を組み立てる、という企ては、帰納的である、と改めて主張できるように思えもする。というのも、その証明の中で実際に認定できているのは、そうした個別的な場合だけであり、それ以外の冪数は、未知の状態にあるからである。だから、わたくしたちがこのような仕方で二項定理の妥当性を明瞭にしようとするとき、その試みは、帰納であるのではないか。それにもかかわらず、前節で証示したように、ミルは、その観点を採り入れない。

ミルは、次のように述べる。「実際、当の法則が二、三の低次な冪に行き渡っていることが一度見て取られたときには、その法則と順列の法則との同一性は、それが普遍的に成立するのを証明する考察をすぐに示唆するはずである」[21]。この言説に基づけば、二項定理の証明は、帰納的な立論と同じように、確かに、個別的な事例を取り上げてはいる。すなわち、その証明を進めていくさいに、いくらかの事例は、言及の対象になってはいる。しかしながら、ミルの理解に則るかぎり、その証明は、それに依拠してほかの冪数をすべて含み込む、という方向で帰納的には展開

していない。言い方を換えれば、二項定理の一般的な主張は、帰納によって成立しているのではなくて、順列と組み合わせの計算に基づいてすでに包括的に浮かび上がっている。なるほど、上述のように、そうした立論の手掛かりは、少数の小さな冪数にあるかもしれない。とはいえ、いったんそれが手に入れば、二項定理に関する全般的な捉え方は、それに取って代わって、二項定理の正当性を顕わにしている。つまり、順列と組み合わせの考え方に基づいて二項定理を演繹的に証明できるのである。

　とはいうものの、このような把握に対して、やはり次の反論を想定できるかもしれない。二項定理について完成させた論証は、演繹的でありはするものの、その閃きを与えた着想は、むしろ帰納的に産生しているのではないか。帰納は、既知の個別性から、未知の対象にまで及ぶ包括性を導出している。しかも、二項定理の証明を組み立てていくさいの実情に鑑みれば、二項定理の証明は、いくらかの個々の冪数についての観点が他のあらゆる冪数にまで及ぶ、という見方を表立って開示している。この了解からすれば、右に述べた仕方で二項定理の証明を与えていこうとする手法は、既知の範囲だけから未知の領域を網羅しようとする帰納に基づいているはずである。しかしながら、こう述べたとしても、これまで見定めてきたように、ミルにあっては、わたくしたちは、二項定理の証明を帰納的に構成しているわけではない。なるほど、ミルの叙述に準拠しても、二項定理の証明の中で取り上げている若干の事例は、いっそう包括的な証明の方法をわたくしたちに示している。帰納は、個々の事例を積み上げて一般的な結論を形成し、そのようにしてあらゆる事例を網羅しようとしている。とはいえ、これに対して、二項定理の証明は、個々の事例から完全な立論を構築するための手掛かりを得て、それに取って代わる形で当の論証を完備させている。裏返して言えば、二項定理の証明では、いくらかの小さな冪数に関する考察は、それに代わる演繹的な論証が手に入れば、一般的な結論の根拠としてはもはや働かないのである。

二項定理の証明を創出しているときと同じように、わたくしたちは、具体的な図形を用いて幾何学の証明を組み立てる。その場合にも、わたくしたちは、特定の図形をまずは準備する。それにもかかわらず、実際には、当の図形について明示しようとしている立証は、次のような仕方で進んでいる。すなわち、その推論は、目前の図形だけに通用しているのではなく、その図形が保有している諸条件を満たすあらゆる図形にまで等しく及んでいる。とはいえ、一見したところでは、わたくしたちが図形を具体的に描いているときには、幾何学の立論は、その図形がまさに提示している個別の事例に結びついていて、そこから一般的な結論を導出しているようにも見える。すなわち、それは、定まった範囲で同定した内容をいまだ見極めていない図形にまで拡張して、当該の結論に包括性を付与しているように思えはする。はたして、このような述べ方は、図形を用いて例証的に固めていく幾何学的論証に当てはまるのであろうか。

しかしながら、前節で指摘したように、実際の図形を使って一般的な定理を解き明かしていくという方策は、推論の同等性による帰納であって、真正の帰納ではない。別言すれば、図形についての幾何学的論証は、特定の図形に関する観察の個別性に依拠して結論の包括性を引き出そうとする帰納ではない。というのも、確かに、わたくしたちが描く図形は、個別的であるけれども、その図形について展開している証明は、右述のように、その図形にしか妥当しないのではなくて、その段階ですでに一般性を内包しているからである。当の証明は、くだんの図形が充足しなければならない基本的要件に見合うあらゆる図形を集めている。だから、二項定理の証明と同じように、幾何学のそれも、個別的な観察の累積によって一般的な結論を導出しておらず、それゆえ、幾何学的論証の結論は、その正当性の根拠を個別的な事例に求めていない。このように、図形の具象性の助けを借りて幾何学の定理の妥当性を説明しようとする試みは、二項定理の証明と同じく、推論の同等性による帰納である。こうした審察を踏まえれば、推論の同等

性による帰納の立論は、個別的な場合の例示に関する観察に一般的な論証の糸口を求めながらも、そうした個別性には依拠せずに、その観察を個々の事例をあまねく包摂している一般的な証明に置き換えようとしているところにある。だからこそ、ミルの洞見にあるように、個別的な観察の対象になる具体的な図形を活用して遂行する幾何学的証明を推論の同等性という視点から捕捉しなければならないのである。

このように、幾何学では、わたしたちが実際に看取しているのは、標本としての図形であるのにもかかわらず、それに関する証明は、母集団についての査証になっている。確かに、幾何学の証明は、標本を表立って取り上げて、標本から考証を開始している。この側面だけを見れば、それは、帰納的であり、ミルは、幾何学の証明も推論の同等性による帰納と呼んでいる。なるほど、ミルは、帰納という呼び方をここでは援用してはいるけれども、これまで究明してきたように、幾何学の図像的検証は、帰納的ではない。それでは、推論の同等性による帰納と同じように、帰納という称呼を含み論理学と数学の中で重要な位置を占めている証明の方略である数学的帰納は、はたして、ミルが明別しようとしているところの帰納であるのであろうか。推論の同等性による帰納を真正の帰納として規定していないミルの発想に基づけば、数学的帰納を帰納として定位するのは、困難であるかもしれない。二項定理の証明にせよ、幾何学の証明にせよ、それらは、推論の同等性による帰納であり、演繹的な体系を指向している数学の中にあるから、帰納的な装いを纏いはしているけれども、ミルの言う意味で帰納的ではない。この角度からすれば、数学的帰納は、推論の同等性による帰納と同じ方向にある。とはいえ、これに反対して、数学的帰納が「帰納」という言葉を持っている点にいっそう重みを置いて、その実相を露わにすれば、数学的帰納は、推論の同等性による帰納とは異なり、きちんと帰納的な局面を内蔵している、と結論づけられるかもしれない。どのような範疇に帰属する立論として数学的帰納を特徴づけられるのであろうか。

たとえば、自然数に関する数学的帰納を単純な形式で記述すれば、こうである。0がϕという属性を持っており、かつ、ある自然数がϕを備えていると想定したときに、かならず後続の自然数にもϕが帰属しているのを論証できれば、次のように結論づけてもよい。すなわち、あらゆる自然数は、それぞれϕという属性を具備している。一瞥では、この論証は、ある自然数と後続の自然数について証明を具体的に編成した上で、それに依拠して、あらゆる自然数に関する主張を与えようとしているので、個別性から包括性を導出している。とはいうものの、これとは対照的に、それとは異なる把握も成り立つ。自然数に関する数学的帰納の中心的部分は、ある自然数に関する想定の下で後続の自然数について個別的な考察を遂行しながらも、それが一般的な立論を内含しているところにあり、推論の同等性による帰納と軌を一にしている。ミルの視点からすれば、わたくしたちは、自然数に関する数学的帰納をどのように覚知できるのであろうか。この問いに答えるには、ミルの言う「帰納という言葉の第三の不適切な使用」に照準を定めて[22]、わたくしたちが帰納と呼び慣わしている立論のうち、ミルが除外しようとしている過程を見定めなければならない。換言すれば、帰納という言葉を使いながらも、ミルからすれば、その誤用でしかないような理解の内実を抉り出す必要がある。そのようにして、数学的帰納が真正の帰納であるのかどうか、数学的帰納の立論的性格をようやく見極められるのである。

第三節　ケプラーの探索――帰納との関連で

前節では、ミルの論定に準拠しながら、次の立論に着眼した。すなわち、それは、一見したところでは帰納的であるように思えるけれども、ミルによれば、実際には帰納ではない推論である。その論証は、確かに、帰納と同じく、

いくつかの標本に注視しながらも、そこには留まらず、一般的な仕方で推理を進めようとしている。たとえば、具体的な図形を用いて組み立てていく幾何学の証明は、そうした事例に当たる。その証明は、瞥見するところでは、目の前にある図形に関する考察の個別性に依存している。しかしながら、具体的な図形を利用して編成しようとしている証明は、すでに一般性を内含しており、その妥当性を個々の図形ごとに見定めている検証の正しさに求めているわけではない。言い方を換えれば、幾何学的論証は、図形の具象性を援例してはいるけれども、次のような仕方で結論を引き出してはいない。すなわち、この三角形とその三角形とあの三角形が内角の和を二直角に定めているから、あらゆる三角形の内角の和は、二直角になるであろう。当該の図形は、あくまでも三角形の内角の和に関する論証を象るための掴み所にすぎず、特定の三角形について構想している証明は、そのような便宜とは異なる水準で一般的な明証性を与えている。別言すれば、この三角形をきっかけにして考案した証明は、他の図形をすべて網羅する包括的な推論と同格になっているのである。

すでに述べたように、ミルは、具体的な標本に結びついていながらも、それには依存しない形で一般性を担保しようとしている立論を、推論の同等性による帰納として特徴づけている。図形を用いた幾何学的証明は、その一例である。論理学と数学の展開に欠かせない数学的帰納は、推論の同等性による帰納と同じく、帰納という呼称を含んでいる。それでは、数学的帰納は、字義通りに帰納であるのであろうか。それとも、それは、推論の同等性による帰納のように、真個の帰納ではないのであろうか。前節で確認したように、数学的帰納は、可算的に無限な系列を構成しているあらゆる成素のそれぞれに成立する一般的な言明を明白にしようとする。そのために、数学的帰納は、まず、起点となる成素について、証明したいことがらを認定する。次に、当の系列の中で、ある段階よりも前の段階に位置する成素について、それが成立しているのを仮定して、当の段階が定位している成素に関しても当該の事項が真である

のを露わにする。このようにして、くだんの系列に帰属するあらゆる成素のそれぞれにそのことが妥当するという結論を下す。これが数学的帰納の基本的な推究的構造である。この記述から分かるように、数学的帰納は、一定の仮定の下で特定の段階にある成素に関する証明を示しているにすぎず、可算的に無限な系列に所属するすべての成素を包摂する論証に最初から関与しているわけではない。この見方からすれば、数学的帰納は、部分的な考察から一般的な帰結を取り出そうとしているので、帰納的ではある。それでは、ほんとうに、数学的帰納は、ミルの言うところの真正の帰納であるのであろうか。

前節では、この問いに答えるために、ミルが帰納という用語の誤った使い方として認証している事例に探査の照準を定めようとしていた。帰納という用語の使い方を巡ってミルが錯誤として位置づけているのは、「一群の観察された諸現象に関する、一般的な用語による記述でしかないものを、そうした現象からの帰納と混同するという誤りである」(23)。この言説に則れば、観察によって確認できた事実のまとまりを一般的な仕方で描述しているだけであるのに、わたくしたちは、場合によっては、それを誤って帰納と呼んでいる。とはいえ、ここで、ミルは、いったい、どのような事例を想定しているのであろうか。ミルに倣って、ケプラーの探査に着目してみたい。ミルの指摘にあるように、「ケプラーの対象は、惑星のそれぞれによって描かれているほんとうの軌道を規定することであった」(24)。ケプラーは、惑星の軌道に関する観測の資料に基づいて、その惑星が実際に成形している軌道を割り出そうとしていた。ミルの言い方に従えば、いっそう特定的には、その惑星は、火星であった(25)。しかしながら、火星を巡るケプラーの探索は、帰納的には進行していない。言うまでもなく、観測の結果に依拠すれば、火星の位置は、天空のどこかにある点を占めている。このときにわたくしたちが前提しているのは、火星がある点から別の点に間隙を作らずに遷移しているという事態である。ミルの言葉を借りて言えば、それは、火星が二つの点の間を、「連続性を一見したところど

のようにも破らずに移動した」という状況である[26]。このような仮定は、ケプラーの観察の要になっている。というのも、それがなければ、火星が連続的な軌跡を描いて移動していくという発想は、出てこないからである。だから、ケプラーは、火星について観測できた個々の位置をいっしょに結びつけて、実際には観測できていない位置も含めて、二つの位置に空隙が生じない仕方で火星の運行に着目しようとしている。この作業は、火星の運行に断続がないという考えを措定して、観測によって得られた火星の点在的な位置を一つに繋ぎ合わせようとする試みである。ミルは、ケプラーのこのような嘗試を、すでに手元にある一般的な見地で個々の観察を纏め上げようとしている営為の事例として挙げているので、ケプラーの求索は、ミルにあっては、帰納を構成していない。

他方で、ミルの論定に準拠すれば、「ケプラーがこれ以上にしたことがらは、こうした異なる点がどのような種類の曲線を作るはずであるのか、それを見出すことであった」[27]。それゆえ、ケプラーは、火星の位置を繋いで連続的な道筋を構想しているだけではなく、それに一致する曲線の形状を析出させようとしている。ケプラーの企図は、火星の位置に関して取得している既知の情報から、観察の対象になっていなかった未知の位置をも包み込みながら、それらを楕円という観点で包括しようとしている。この理解に基づけば、火星の軌道が楕円であるというケプラーの発見は、既知の個別的な標本に基づいて、それ以外の標本もすべて含み込んでいる母集団の特質に向かっているように思えもする。その意味では、ケプラーの思考は、帰納的である。とはいうものの、このような見方に対して、ミルは、ケプラーの推断を、「ある島についての一般的な考え方によって海岸の継起的な点に関する一連の観察を表現した航海士のそれ」になぞらえる[28]。すなわち、航海士は、島の全体的な形状に関する描像に基づいて、移動している船から見える島の個々の地点を繋いで島の様子を明確にしようとしている。ミルの述べ方からすれば、航海士には島に関する一般的な考え方があって、航海士は、具体的に見えている島の個々の点を当の一般的な心象の中に組み込も

うとしている。これは、一般的な概念の下に個別的な事例を包摂していく操作であるから、ミルの指摘に準拠するかぎり、帰納ではない。同じように、火星の軌道が楕円であるという一般的な理解がケプラーにあって、ケプラーがそのような把握の下に火星の動きに関する個々の観測を置いているとすれば、ケプラーの試みは、航海士のそれと同じように、帰納的ではない。

これまで説述してきたところに立脚して、その角度から、なぜケプラーの研究が帰納的ではないのか、その理由を改めて問い直してみよう。次の二つの要点が帰納の徴表として浮かび上がっている。（1）帰納的結論が明別しようとしている全称性は、それまでに観察の標的にならなかった対象をも含み込もうとする包括的なそれである。別言すれば、帰納が与えようとしている全称性は、枚挙的ではなく、帰納の結論は、帰納の前提が定めている範囲を超えてしまっている。（2）帰納の結論が主張している一般性の根拠は、帰納の前提を構成している具体的な事例の個別性に依拠していなければならない。ミルが推論の同等性による帰納として位置づけている立論は、そうした個々の事例に関する観察を参照しながらも、それをかならずしも要請しない形で、結論の一般性を言明できるようになっている。それゆえ、帰納は、個別性から一般性を引き出すという論理的な飛躍を内蔵するのである。

ミルは、ケプラーの二つの探討に着目している。一つは、火星の運行に関する個々の観測から火星の連続的な運行を導出しようとしたケプラーの着想である。ケプラーが用いた観測の資料は、有限であり、かつ、ケプラーは、すでに手元にある資料を枚挙的な全称性で取り纏めようとしているのではなく、観測できていない地点をも連続的な軌跡の中に入れ込もうとしている。だから、ケプラーの試みは、帰納の第一の特徴を具備している。しかも、間断を含まない軌跡が火星のそれであるという結論は、具体的な観測に依存している。そうした具体的な観測がなければ、ケプラーは、火星の軌跡を連続的に掴めなかったはずである。このような述べ方からすれば、ケプラーは、帰納の第一と

第二の特徴を満たす形でその推理を展開している、と言える。それにもかかわらず、ミルは、ケプラーの推定を帰納としては定位しない。ケプラーの調査は、第一節と第二節の考究を通して析出させた帰納の要件を充足しているのに、ミルにあっては、帰納的ではない。なぜ、ミルは、個々の観測から火星の連続的な軌跡を楕円として包括的に認証したケプラーの試図を帰納とは見做さないのか。

第四節　数学的帰納の位置づけ

前節では、ミルが帰納という名称の謬用として例示しているケプラーの取り組みに刮目した。第一節と第二節の論考を通して際立たせてきた帰納的推理の表徴は、（1）前提の網羅する領域を超え出ている包括的な全称性が結論になっていること、（2）その結論を推断するための根拠が前提の示す限定的な事例にもっぱら横たわっていること、これら二点である。前節の叙述によって、ケプラーが火星について実施した尋究は、そうした条件を満たしている。それにもかかわらず、ミルは、ケプラーの推量を帰納としては評価していない。というのも、前節で所述したように、ミルによれば、ケプラーは、一般的な概念の下に実際に観測している個々の事例を組み込もうとしており、ミルは、そのような努力を帰納としては捉えていないからである。前節で見定めたところに従えば、ケプラーは、航海士のように、惑星の運行が連続的に進展していくという描像の下で観測の個別的な結果の一つ一つを取り纏めているにすぎない。ミルは、こう述べている。「天文学者たちは、惑星が周期的に同じ場所に戻るのを長きに渡って知っていた」[29]。すなわち、当時の天文学の常識として、天文学者たちは、惑星が一連なりに一定の軌道の上を移動するという状況を天文の事実として思い描いていた。だから、むしろ、わたくしたちは、次のように説述すべきである。ケプ

ラーは、惑星の連続的な運動に関する一般的な想到をあらかじめ置いた上で、火星の軌道が無間であるのを再認していた。ミルからすると、これは、帰納ではない。

このように、ミルは、実際に観察した個々の事例を一般的な概念の中に編入していくという企てを帰納とは同定しない。それゆえ、逆に言えば、ミルが帰納として識別しようとしている推論では、実際に観察できている個別的な事例が起点になっていなければならない。航海士の推察も、ケプラーの推知も、帰納では結論とすべき一般的な理解を前提に設置して、手元にある個別の標本群を一括りにしようとしている。裏を返せば、ここに至って、わたくしたちは、所与の推理がミルの言う帰納であるのかどうか、それを判定するための別の指標を手に入れている。それは、当の推理が完全に個別的な事例から開始してあらゆる標本を含み込む包括性を新たに創出しようとしているのか、という観点である。確かに、前節で述定したように、一見したところでは、ケプラーの試行は、帰納的推理であるための二つの項目を揃えている。しかしながら、ミルの論説を追っていけば分かるように、そのような捉え方を通して、わたくしたちは、ケプラーの奮闘を帰納として改めて再構成しようとしていたにすぎない。しかも、ミルの証言によれば、火星の軌道が連続的であるという着想は、「ケプラーの生まれるずいぶん前から引き出されていた」(30)。上でも摘示したように、穴隙のない軌跡という考えは、ケプラーの時代では天文学の常識になっていて、ケプラーは、それに信拠して観測の資料を総覧し、火星の軌道の連続性を隠伏的に陳述していたことになる。このようにして、実質的な帰納が装備している第三の特色を明晰に定式化できる。すなわち、帰納の包括的な結論が内蔵している把握は、帰納的推理によってはじめて顕現しているのであって、それに先行して確定しているのではない。

それでは、ケプラーの探究には帰納的な局面は、ほんとうになにもないのであろうか。ミルは、「ケプラーの事例で係わっている唯一のほんとうの帰納」を次のように説明する(31)。「火星の観察された場所が想像上の楕円にあるも

ろもろの点によって正しく表示されていたので、それゆえ、火星は、それと同じ楕円で公転し続けるはずである」[32]。この推理の前提は、こうである。火星の運行に関する観測によって判明した地点のそれぞれは、一定の楕円の上にある。これは、個別的な事例に留まっているので、帰納の前提として働く。上の引用から分かるように、当の推理は、そこには停留せずに、観測では捕捉できていない火星の動きがすべて当の楕円の上にあるはずであるという仕方で包括的な結論を拡張的に導き出している。この包括性の考拠は、前提が提起している有限な観測に連結している。具体的に見極めた火星のそれぞれの位置が楕円を形作っているもろもろの点と一致しているという発見がこの推考に先駆けてケプラーの頭の中にないのであれば、それは、本節で整理した帰納の要点も所持していることになる。このような視座から、ミルは、上で引いた思考の過程を帰納として描き出そうとしている。

すでに引証したように、天文学者にとっては、火星が一つの軌道に沿って動いているというのは、当然の事柄であった。これを踏まえて、ミルは、次のように明述している。「これが確認されてしまったときには、ケプラーにとって行うべき帰納は、なにも残っていなかったし、ケプラーは、それ以上のどのような帰納も行わなかった」[33]。これは、明らかに上述した内容とは矛盾する発言である。ミルは、一方ではケプラーの立論が帰納的であったと言い、他方ではそれを否定している。なぜ、ミルは、このように混乱を来すような言説に関与しようとしているのであろうか。ミルは、ケプラーの研尋を別様にも描写している。「惑星が同じ軌道で動き続けるのをすでに知りつつ、ケプラーは、楕円が過去の軌道を正しく表示しているのに気づいたときに、それが将来の軌道を表示するはずであるのを知った」[34]。ケプラーは、以前から所持していた資料が示す火星の軌道が楕円の一部であるのを察知して、これから火星が移動するはずの個所もその楕円の上にあるのを結論している。このかぎりでは、上でも見たように、それは、確かに帰納的ではある。しかしながら、ミルの書き方をもう少し分節化すれば、いっそう重要であるのは、火星が一定

の連続的な軌道に従って周期的に運動しているという見方がケプラーの中にすでにあった、という了得である。

ケプラーは、実際に観測した火星のばらばらになっている位置が互いに結びついて一つの針路を形成しているという着意を手にした上で、それを楕円という概念によって把持しようとしている。しかも、ミルに従えば、「楕円についての考え方は、ケプラーの精神に浮かんでいたにちがいなく、そのようにして、ケプラーは、当の惑星の軌道を楕円と同一視できた」(35)。この文言がはっきりさせているように、ミルにあっては、ケプラーは、火星の軌道が楕円であるという立言を帰納的に導出していたわけではない。上で帰納として認定したケプラーの推理は、あくまでも楕円という考え方を個別的な資料から拾い上げて一般化しているという了解に基づいている。しかし、ミルの真意は、ケプラーの吟味の実際をそのように編成するところにはない。ケプラーは、火星の軌道が連続的であるという考え方を置いた上で、実地に観測した火星の個々の位置をその下に包含しようとしている。それと同じように、ミルの視点からすれば、ケプラーは、火星の軌道が楕円であるという命題を帰納的に誘導しているのではなくて、楕円という考えがあらかじめケプラーに存在していて、ケプラーは、その下に観測の資料を収容しようとしている。これらは、もはや帰納ではない。ミルの述べ方を借りれば、そうした考え方は、「数多くの詳細が単一の命題の中で纏め上げられるのを可能にする記述的な操作」(36)である。すなわち、帰納として再構築できもするケプラーの探究は、現実には、すでに成立している一般的な概念の中にさまざまな標本を格納していくという営為にほかならず、ミルの用語法に従えば、帰納ではなく、記述であるのである。

ミルの言う帰納について、こうした理解が獲得できれば、数学的帰納は、どのような位置にあるのであろうか。これまでの考究によって帰納の三つの性格が明瞭になっている。それらは、（1）前提の範囲を超出した結論の包括的全称性、（2）個別的な前提に連結している結論的論拠の限定性、（3）結論を構成する包括的把握の後件的創出、こ

れら三つである。数学的帰納は、母集団の中から任意に標本を取り出し、その標本が一定の属性を持っていると仮定して、次の段階にある標本にも当の属性があるのを具体的に証明した上で、それを拠り所にして、くだんの属性が母集団のあらゆる成員にあるのを結論する。数学的帰納では、証明を象る具体的な観察は、個別的な標本を指向しており、結論の包括性は、それを前提にして、そこから出てきている。だから、数学的帰納は、帰納の第一の特性を充足している。しかしながら、数学的帰納が標本について展開している具体的な観察は、抽出する標本の任意性を担保している。換言すれば、数学的帰納は、帰納の論理的な飛躍を生じさせている帰納の第二の特性を排除して、その結論から論理的な瑕疵を取り除こうとしている。それゆえ、数学的帰納は、帰納の第二の特性を保障しておらず、その点では、推論の同等性による帰納と同列に位置している。とはいえ、数学的帰納では、任意の標本に関する具体的な考察が証明の中核を形成しており、推論の同等性による帰納のようにそれを外してしまえば、数学的帰納は、もはや成り立たなくなる。それゆえ、数学的帰納の結論は、ミルの言う帰納と同じく、その論拠を標本に関する個別的な考察に接合させている。もちろん、数学的帰納でも、母集団に関する包括的把握は、結論としてようやく樹立するのであり、前件的に先行しているわけではない。帰納が包有する三つの特性は、論理的に飛躍した立論が帰納の本性であるのを示している。だから、数学的帰納は、真正の帰納ではない。しかし、数学的帰納は、推論の同等性による帰納とか記述とかに比べれば、三つの帰納的要素を兼備しており、この点に照準を定めれば、次のように結論できよう。すなわち、数学的帰納は、論理学と数学の中で帰納という名称を担っている論証的立論である。

おわりに

本論では、ミルの論述に沿って、研究者たちが不当に帰納として扱っていたいくつかの立論に焦点を絞りながら、それらの非帰納的な性質を炙り出して、帰納の三つの要所を剔抉した。すなわち、ミルの構想する帰納は、（1）前提が指定している圏域を乗り越えて包括的全称性を結論しようとしており、（2）そのような結論を唱道するための基盤を前提の個別的な吟味に限局した上で、（3）当の結論の中で包括的把握を後件的に立言しようとしている。

帰納についてのこのような把捉を成形するために、まず、第一節では、次の点を確認した。「水星も、金星も、地球も、火星も、木星も、土星も、天王星も、海王星も、太陽の光で輝いている」という前提から「太陽系のあらゆる惑星は、太陽の光で輝いている」という結論を出してくるのは、帰納ではない。ここに現れている全称性は、太陽系の惑星をすべて枚挙してそれらを束ねているにすぎず、枚挙的全称性に留まっている。だから、帰納の力説する全称性は、前提で網羅している標本の領野を踏み越えていく包括的全称性でなければならない。このようにして、帰納の第一の特性を炙り出した。次に、第二節では、第一節の論議を踏まえながら、推論の同等性による帰納に指目した。推論の同等性による帰納では、標本に関する具体的な考究は、当の立論の中核を受け持っておらず、それゆえ、それを演繹的な論証に置換できる。当然のことながら、そのような立論は、帰納的ではない。だから、帰納では、標本の個別的な観察は、結論を導出するときの礎であり、それがなければ、帰納的推理は、その足場を喪失してしまう。個々の標本についての情報は、帰納的結論を鋳出すのに欠かせない要因として機能している。このようにして、帰納の第二の特性を判明にした。

ミルは、研究者たちが不当に帰納として認知している探索を、火星の連続的な軌道が楕円であることを明らかにしたケプラーの研尋に見ている。第三節では、なぜミルがケプラーの探討を帰納として見定めないのか、その背景に接近しながら、帰納の第三の特性を分明にしようとした。ケプラーは、観測によって獲得できた個々の資料から軌道の形態を考案したのではなくて、観測を通してすでに分かっていた火星の位置をすでにケプラーが描出していた一般的な形象の中に織り込もうとしていた。これは、帰納ではない。だから、帰納は、一般的な言明の下に個々の事例を包摂しようとしているのではなく、むしろそれを事後的に行っているのであって、立論の過程では、一般的な言明を結論に繋留しなければならない。このように、帰納の土台を三つの視角からくっきりとさせて、最後に、第四章では、数学的帰納に関する視座を造形しようとした。本論で闡明した帰納の本性からすれば、帰納が立言する包括的全称性は、部分から全体に至るという論理的飛躍に由来している。わたくしたちは、論理学と数学にそのような論理的飛躍を持ち込めないので、数学的帰納は、その結論の論理的な妥当性を守らなければならない。しかし、数学的帰納の立論的構造は、部分的証明の漸進的累積によって包括的全称性を結論的に確保しようとしており、帰納の三つの基軸を実現させているのである。

　数学的帰納を論理学の現代的な知見から眺めておこう。たとえば、公理的集合論は、一定の公理を定めて、集合という概念に論理的な基底を付与しようとしている。そうした公理の一つに正則性に関する公理がある。この公理は、わたくしたちが集合について抱く常識的な観念から逸脱するような不規則な集合を排除するための公理である(37)。たとえば、ある集合がそれ自身の要素になっているのは、考えにくいし、わたくしたちは、所与の集合が別の集合の要素になりながら同時に後者の集合が前者の集合の要素であるような二つの集合を例示できないはずである。正則性に関する公理は、このような変則的な集合を公理的集合論の体系から擯斥しようとしている。xがyの要素であるとい

う関係を $x \in y$ という仕方で定式化しよう。すると、正則性に関する公理は、要素的関係が無際限に降りていくような状況も回避している。すなわち、正則性に関する公理は、次のような無限下降列を公理的集合論の体系から除外している。

$$\cdots \in a_{n+1} \in a_n \in \cdots \in a_1 \in a_0$$

このような無限下降列を惹起しない体系は、整礎的（well-founded）である。だから、正則性に関する公理は、集合の規則性を乱す集合とは距離を置いて、公理的集合の体系的基礎を整えている。正則性に関する公理から、次の主張を導出できる。すなわち、xの要素であるyのすべてにφという属性があるときにxにもその属性があれば、どのような集合にもφがある。これは、要素的関係に基づいて、数学的帰納を示している。別言すれば、ある母集団のあらゆる標本が特定の性質を持っているときに、母集団もその性質を所有しているのが証明可能であれば、どのような母集団も当の性質を保有している、という結論を立言できる。この論証は、一般的な数学的帰納と同じように、任意の母集団についての部分的な考察に基づいて母集団に関する全体的な言明を引き出している。公理的集合論では、このような数学的帰納を公理として承認すれば、正則性に関する公理をその系として証明できる。それゆえ、数学的帰納を要請する公理的集合論は、集合と集合との間から変格的な要素的関係を除去して、体系の規則的な様態を整序している。逆に、このような整礎性を確保できている公理的集合論では、数学的帰納を駆使して、部分で了解できることを全体に拡充できるようになっているのである。

ミルは、自然の斉一性と帰納との連関について、次のように述べている。「自然の進み行きが斉一的であるという

命題は、帰納の基本的な原理あるいは一般的な公理である」(38)。公理的集合論の用語法を援用すれば、体系の整礎性を担保する正則性に関する公理と要素的関係に基づく数学的帰納の原理とは、互いに同格である。誤解の誹りを覚悟に分かりやすく単純化して言えば、公理的集合論の体系をきちんと整えれば、その中で数学的帰納を駆使できるし、数学的帰納を証明の手法として活用するためには、公理的集合論の体系から変則的な事例を排斥しておかなければならない。ミルの発言を踏まえれば、自然に関する探究についても、自然が斉一的であれば、帰納は、自然の中で有効に働くし、帰納を利用しようと思えば、自然が斉一的であるのが望ましい。とはいえ、このように述定してしまえば、次のような反論に応えなければならない。帰納によってしか確認できない自然の斉一性を帰納の論拠に置くのは、論点先取の虚偽である。いったい、ミルは、自然の斉一性を帰納との関連でどのように捉えているのであろうか。すでに紙幅も尽きたので、それを残された課題としたい。

註

(1) John Stuart Mill, *A Sytem of Logic, Rationcinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation,* 1843, 8 th Edition, New York: Harper & Brothers Publishers, 1882, pp.354-376.

(2) *ibid.,* p.355.

(3) *ibid.,* p.356.

(4) *ibid.,* pp.360-361.

(5) *ibid.,* p.361.

(6) *ibid.,* p.363.

(7) *ibid.,* p.361.

(8) *ibid.,* p.361.

(9) *ibid.,* p.362.

(10) *ibid.*, pp.361-362.
(11) *ibid.*, p.364.
(12) *ibid.*, p.364.
(13) *ibid.*, p.364.
(14) *ibid.*, p.364.
(15) *ibid.*, p.364.
(16) *ibid.*, p.365.
(17) *ibid.*, p.365.
(18) *ibid.*, p.365.
(19) *ibid.*, p.365.
(20) *ibid.*, p.365.
(21) *ibid.*, p.365.
(22) *ibid.*, p.365.
(23) *ibid.*, pp.365-366.
(24) *ibid.*, p.366.
(25) *ibid.*, p.366.
(26) *ibid.*, p.367.
(27) *ibid.*, p.367.
(28) *ibid.*, p.367.
(29) *ibid.*, p.367.
(30) *ibid.*, p.367.
(31) *ibid.*, p.367.
(32) *ibid.*, p.367.
(33) *ibid.*, pp.367-368.

(34) *ibid.*, p.368.

(35) *ibid.*, p.369.

(36) *ibid.*, p.368.

(37) Patrick Suppes, *Axiomatic Set Theory*, New York: Dover Publications, 1972, pp.47-49.

(38) Mill, *op.cit.*, p.378.