Qualitative Analysis to Solutions for Equations via Fixed Point Theorems V - Applications to Mixed Problems of Parabolic Partial Differential Equations with Dirichlet Conditions -

Seiji SAITO*

(Received October 3rd, 2023)

In this article we give sufficient conditions of stability and boundedness for solutions of mixed problems of parabolic partial differential equations with Dirichlet conditions by applying fixed point theorems.

Key words ： fixed point theorem, parabolic partial differential equation, Dirichlet condition, stability, boundedness

キーワード ： 不動点定理，放物型偏微分方程式，ディリクレ条件，安定性，有界性

不動点定理による方程式の定性解析 V - ディリクレ条件を有する放物型偏微分方程式の混合問題への応用 -

齋藤誠慈

1. はじめに

集合 $\boldsymbol{R}_+ = [0,\infty)$，$I = [0,1]$，および $m \in \boldsymbol{N}$（自然数全体）, $n \in \boldsymbol{Z}_+$（非負整数全体）とする．ベクトル空間 V 上の写像 $\mathcal{U}: V \to V$ の不動点 $x_e \in V$ とは，$\mathcal{U}(x_e) = x_e$ を満たす点をいう．

著者は，準線形常微分方程式，準線形差分方程式，あるいは準線形積分微分方程式の解に関し，不動点定理を応用し定性解析の結果を得ている [4, 5, 6, 7, 8]．

本研究では，偏分方程式の Dirichlet（ディリクレ）条件の解に関して定性解析のために，不動点定理を応用している．

次の線形偏分方程式の Dirichlet 条件の混合問題 ($t \geq 0$，$x \in I$)

$$
\begin{aligned}
&u_t(t,x) = u_{tt}(t,x) && \text{(DBC)}\\
&u(t,0) = 0 = u(t,1) \quad (t>0)\\
&u(0,x) = f(x) \quad (0<x<1)
\end{aligned}
$$

を考える．ここでは，変数 t, x について C^2 級の $u : \boldsymbol{R}_+ \times I \to \boldsymbol{R}$, C^2 級の $f : I \to \boldsymbol{R}$（$f(0) = 0 = f(1)$）とする．今後問題 (DBC) を，線形 D 型混合問題という．

Fourier（フーリエ）級数の定理から，連続関数 $u(t,x) \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I)$ が，式

$u(t,x) = 2\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y) f(y)dy \sin(k\pi x)$

を満たすことと，u が問題 (DBC) の解であることとは同値である．ここで $n \in \boldsymbol{Z}_+$ として，集合 $S_n \subset C([0,n] \times I)$ は，問題（DBC）の f などに依存して決まる閉凸集合として，写像 $\mathcal{U}_n : S_n \to S_n$ が定義され，閉包 $[\mathcal{U}_n(S_n)]$ がコンパクトならば，Schauder の不動点定理（2 節参照）から不動点 $u_n = \mathcal{U}_n(u_n)$（$n \geq 0$）が存在する．さらに，$n \to \infty$ であるようにできれば，$u = \lim_{n\to\infty} u_n$ とおき，連続関数 $u \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I)$ は，問題 (DBC) を満たすことになる．

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6702, E-mail : ssaito@mail.doshisha.ac.jp

本研究では，不動点定理の応用により問題 (DBC) の摂動系問題

$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + h(t,x,u(t,x))$
$u(t,0) = 0 = u(t,1) \quad (t>0)$
$u(0,x) = f(x) \quad (0<x<1)$

につき，解 u の f の関する定性解析の議論を述べる．

2. 不動点定理等の準備

各種類の方程式の解に関する定性解析において，重要な役割を果たす不動点定理やコンパクト性定理等を述べる．

「１」Schauder（シャウダー）の不動点定理 [1)p.456 2)p.26 10)p.26, 11)p.179]

定理 2.1 （Schauder）バナッハ空間 X の部分集合 S 上の写像 $\mathcal{V}: S \to X$ は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 集合 $S \subset X$ は，閉凸．

(2) $\mathcal{V}(S) \subset S$.

(3) 写像 $\mathcal{V}: S \to S$ は連続．

(4) 像 $\mathcal{V}(S) \subset X$ は相対コンパクト，すなわち，閉包 $\overline{\mathcal{V}(S)}$ はコンパクトである．

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は S 内に少なくとも 1 つの不動点を有する．

「２」Ascoli-Arzelà（アスコリ・アルツェラ）の定理 [2)p.22, 3)p.75]

記号 $\|x\|$ は，$x \in V$（線形空間）のノルムとする．

定理 2.2 関数集合 $S = \{f : I_1 \to \boldsymbol{R}^m, f$ は連続 $\}$（区間 $I_1 = [a,b]$）は，次の条件 (1)，(2) を満たすとする．

(1) S は（I_1 上で）一様有界，すなわち，ある $M>0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\max_{I_1} \|f(t)\| \le M \ (f \in S)$$

(2) S は（I_1 上で）同程度連続，すなわち，微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon \ (f \in S,\ t,s \in I_1,\ |t-s| < \delta)$$

このとき，集合 $S \subset X$ は相対コンパクト，すなわち，閉包 $\mathrm{cl}(S)$ がコンパクトである．

「３」Gronwall（グロンウォール）の不等式 [12)p.30]

定理 2.3 連続関数 $u, g : J \to \boldsymbol{R}_+$（区間 $J \subset \boldsymbol{R}$）と定数 $K \ge 0$ に関し，次式が成り立つとする．

$$u(t) \le K + \int_a^t g(s)u(s)ds \ （区間 [a,t] \subset J）$$

このとき，次式が成り立つ．

$$u(t) \le K e^{\int_a^t g(s)ds} \ (t \in J)$$

「４」関数集合のコンパクト性

自然数 $n \in \boldsymbol{N}$，区間 $I = [0,1]$，$J_n = [0,n]$，$D(n) = J_n \times I$ とする．$D(n)$ 上で連続関数の集合 $C(D(n))$ の部分集合 S について一様有界，かつ同程度連続であるとき，対角線論法により全有界性が示される．あるいは，ある集合の有限個からなる ε（イプシロン）ネットの存在により，相対コンパクト性を導いている．[9)10 章]

例 2.4 集合 $S = \{w : D(n) \to \boldsymbol{R}\} \subset C(D(n))$ は次の条件を満たすとする．

(1) S は（$D(n)$ 上で）一様有界，すなわち，ある定数 $M>0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\sup_{D(n)} |w(t,x)| \le M \ (w \in S)$$

(2) S は（$D(n)$ 上で）同程度連続，すなわち，任意の微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$|w(t_1,x_1) - w(t_2,x_2)| < \varepsilon$$
$$(w \in S,\ |t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| < \delta)$$

このとき，集合 S は $C(D(n))$ において相対コンパクトである．

定義 2.5 (1)（ε ネット）バナッハ空間 X の集合 $S \subset X$ について，S の ε ネット $N_\varepsilon(S) \subset X$（$\varepsilon > 0$）は，次式で定められる．

$N_\varepsilon(S) = \{y \in X :$ 任意の $x \in S$ に関し，$\|x - y\| < \varepsilon$なる y が存在 $\}$

(2) （全有界性）集合 $S \subset X$ が全有界であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$ に対し，有限個からなる $N_\varepsilon(S)$ が存在するときをいう．

定理 2.6 [2)p.23,3)p.54] バナッハ空間 X において，次の必要十分性が成り立つ．

「集合 $S \subset X$ が全有界」$\Leftrightarrow$「S は相対コンパクト」．

次の例は，関数集合 $\{w(t,x) \in C(D(n)) : w$ は C^2 級 $\}$ が相対コンパクトであるための条件を，偏導関数 $\frac{\partial^\ell w}{\partial x^\ell}$（$\ell = 0,1,2$）に関して与えている．

例 2.7 自然数 $n \in \boldsymbol{N}$，区間 $I = [0,1]$，$J_n = [0,n]$，$D(n) = J_n \times I$ として，次の条件 (1) - (4) が成り立つとする．

(1) 関数集合 $A_0(n) = \{w \in C(D(n))\}$ は，（$D(n)$ 上で）一様有界，すなわち次式が成り立つ．

$$|w(t,x)| \le W_0 \ ((t,x) \in D(n),\ n \in \boldsymbol{N})$$

(2) 集合 $A_0(n)$ は，（$D(n)$ 上で）同程度連続，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，$|t_2 - t_1| < \delta$，かつ $|x_2 - x_1| < \delta$（$(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in D(n)$）のとき，次式が成り立つ．

$$|w(t_1,x_1) - w(t_2,x_2)| < \varepsilon$$

(3) 関数集合 $A_1(n) = \{w \in A_0(n) : w$ は C^1級 $\}$ につき，ある正数 W_1 が存在し，

$$|w_x(t,x)| \le W_1 \ ((t,x) \in D(n),\ n \in \boldsymbol{N})$$

を満たす．

(4) 関数集合 $A_2(n) = \{w \in A_1(n) : w$ は C^2級 $\}$ につき，ある正数 $W_2 > 0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$|w_{xx}(t,x)| \le W_2 \ ((t,x) \in D(n),\ n \in \boldsymbol{N})$$

このとき，$St(n) = A_2(n)$ とおく．関数集合 $St(n) \subset C(D(n))$（$n \in \boldsymbol{N}$）は，相対コンパクトである．

証明は，文献 [9] 第 10 章を参照されたい．

3. 放物型偏分方程式の解の漸近挙動

線形空間 $C^2[0,1]$ の正規直交基底を $\{\varphi_k \in C[0,1] : k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ とし，$f(0) = 0 = f(1)$ を満たす $f \in C^2[0,1]$ に関し Fourier 係数 $d_k = \displaystyle\int_0^1 \varphi_k(y) f(y) dy$（$k \in \boldsymbol{Z}_+$）を用いて，ノルムを

$$\|f\|_{\mathfrak{F}} = \sum_{k=0}^{\infty} |d_k|$$

と定義する．正数 $M > 0$ が存在し，非負整数 $k \in \boldsymbol{Z}_+$ に対し，$|d_k| \le \frac{M}{k^2}$ から，$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{k^2}$ より，$\|f\|_{\mathfrak{F}} < \infty$ である．$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} > \frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ より，正数 $M \le 1$ のとき，$\|f\|_{\mathfrak{F}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^2}{k^4} \ge \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 = \int_0^1 |f(y)|^2 dy$.

定義 3.1 関数 $g(x)$ を固定し，線形系 D 型混合問題

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) \ (t > 0,\ 0 < x < 1) \quad (3.1)$$
$$u(t,0) = 0 = u(t,1) \ (t \ge 0)$$
$$u(0,x) = g(x) \ (0 \le x \le 1)$$

の解（$g(0) = 0 = g(1)$）を，次式で与える．

$$u^g(t,x) = \int_0^1 K(t,s,y) g(y) dy \quad (t \ge 0,\ 0 \le x \le 1)$$

関数 $g : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ は C^2 級で，また

$$K(t,x,y) = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)\sin(k\pi y) \quad (t \ge 0,\ 0 \le x \le 1)$$

とおく．また，線形摂動系 D 型混合問題

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + h(t,x,u(t,x)) \quad (3.2) \\ &\quad (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u(t,0) &= 0 = u(t,1) \quad (t > 0) \\ u(0,x) &= f(x) \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

ただし，実数値関数 $u \in C^2(\boldsymbol{R}_+ \times I)$，$h \in C^1(\boldsymbol{R}_+ \times I \times \boldsymbol{R})$，$f \in C^2(I)$（$f(0) = 0 = f(1)$）を仮定し，摂動系混合問題 (3.2) の漸近挙動に関する定義を述べる．

(1) 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u^g が，線形系 D 型混合問題 (3.1) の解 u^f に対して，安定（[S]）であるとは，任意の微小な $\varepsilon > 0$ に対し，正の $\delta < \varepsilon$ が存在し，任意の $f \in C^2[0,1]$（$\|f-g\|_{\mathfrak{F}} < \delta$）に関し，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の一意解 $u^f(t,x)$ が，次式を満たすときをいう．

$$|u^f(t,x) - u^g(t,x)| < \varepsilon \ (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)$$

なお，$u^f(0,x) = f(x)$，$u^g(0,x) = g(x)$ である．単に，摂動系混合問題 (3.2) の解 u^f は，u^g[S]，u^g 安定という．

(2) 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u^f が，線形系 D 型混合問題 (3.1) の解 u^g に対して，有界（[B]）であるとは，任意の $\alpha > 0$ に対し，十分大の $\beta > \alpha$ が存在し，任意の初期関数 f が $\|f-g\|_{\mathfrak{F}} < \alpha$ であるとき，問題 (3.2) の一意解 u^f が，次式を満たすときをいう．

$$|u^f(t,x) - u^g(t,x)| < \beta \ (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)$$

単に，摂動系混合問題 (3.2) の解 u^f は，u^g[B]，u^g 有界という．

4. 放物型偏微分方程式の線形摂動系 D 型混合問題

本節では，Gronwall の不等式，Ascoli-Arzelà の定理，不動点定理等の応用により，放物型偏微分方程式の線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) を考え，解の漸近挙動を議論する．

線形摂動系 D 型混合問題の解の一意性 [9)10 章]

例 4.1 問題 (3.2) の解は，存在すれば一意的である．

証明 関数 $h : \boldsymbol{R} \times I \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は，C^1 級より，任意の $T > 0$，任意の $R > 0$ につき，ある $L = L(T,R) > 0$ が存在し，$t \in [0,T]$，$x \in I$，$|u| \le R$ において，$|\frac{\partial h}{\partial u}(t,x,u)| \le L$ が成り立つ．このとき，

$|h(t,x,u_1) - h(t,x,u_2)|$
$= |\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u}(t,x,u_2 + \theta(u_1-u_2)) d\theta (u_1 - u_2)|$
$\le L|u_1 - u_2|$（$|u_k| \le R$，$k = 1,2$）．

2 つの解を $u_1(t,x)$，$u_2(t,x)$ とし，$w(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ と定めると，

$w_t = w_{xx} + h(t,x,u_1) - h(t,x,u_2)$（$t > 0, 0 < x < 1$），
$w(t,0) = 0 = w(t,1)$（$t > 0$）,$w(0,x) = 0$（$0 < x < 1$）．

ここで，$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w(t,x)^2 dx$ を微分して，

$E'(t) = \int_0^1 w(t,x) w_t(t,x) dx$
$= \int_0^1 w(t,x)\{w_{xx} + h(t,x,u_1) - h(t,x,u_2)\}$
$= [w(t,x)w_x(t,x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 w_x(t,x)^2 dx$
$\quad + \int_0^1 w(t,x)\{h(t,x,u_1) - h(t,x,u_2)\}$
$\le \int_0^1 |w(t,x)| L |u_1(t,x) - u_2(t,x)| dx$
$\le L\int_0^1 w(t,x)^2 dx = LE(t)$．区間 $[0,t]$ で $E'(t)$ を積分し，$E(0) = 0$ より，$E(t) \le L\int_0^t E(s) ds$ を得，Gronwall の不等式から，$E(t) \le E(0)e^{Lt} = 0$（$t \in [0,T]$）．よって，$u_1(t,x) = u_2(t,x)$（$t \in [0,T]$，$x \in I$）．◊

フーリエ級数の定理から，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) において $h(t,x,u) \equiv 0$ のとき，次式で与えられる．

$u(t,x)$
$= 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x)$
$\quad (t > 0,\ 0 < x < 1)$

本研究では，線形摂動系D型混合問題 (3.2) の解の存在に関して，不動点定理を応用し，さらに漸近挙動性について示している．自然数 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$J_n = [0, n] \subset \boldsymbol{R}_+$，$D(n) = J_n \times I$ とし，解候補からなる連続関数の集合 $S(n) = \{w \in C(D(n)) : D(n) \to \boldsymbol{R}\}$ を，適切に定め，次の写像 $\mathcal{V} : S(n) \to C(D(n))$（$w \in S(n)$）を考える．

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{V}(w)](t, x) \\
&= 2\int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x) \\
&\quad + 2\int_0^t \int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y) \\
&\quad \times h(s, x, w(s, y)) dy ds \sin(k\pi x) \quad (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)
\end{aligned}$$

ここで，$u^w(t, x) = [\mathcal{V}(w)](t, x)$ とおくと，関数 $u^w \in C(D(n))$ は，$w \in S(n)$ に対する次の線形摂動系D型混合問題の一意解である（$t > 0$，$0 < x < 1$）．

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + h(t, x, \underline{w(t, x)}) \text{（下線部注意）}$$
$$u(t, 0) = 0 = u(t, 1),\ u(0, x) = f(x)$$

このとき，$u^w \in C(D(n))$ は，次の積分の式を満たす．

$$\begin{aligned}
&u^w(t, x) \\
&= 2\int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x) \\
&\quad + 2\int_0^t \int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y) \\
&\quad \times h(s, x, w(s, y)) dy ds \sin(k\pi x) \quad (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)
\end{aligned}$$

よって，中への写像 $\mathcal{V} : S(n) \to S(n)$ であることが示されたならば，次の同値関係を得る．

「写像 $\mathcal{V}(w) = u^w$（$w \in S(n)$）は，不動点 $z_n \in S(n)$ を有する」

$\Leftrightarrow$ $z_n = \mathcal{V}(z_n)$

$\Leftrightarrow$ 「$z_n(t, x) = 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy$ $\times \sin(k\pi x) + 2\int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y)$ $\times h(s, x, z_n(s, y)) dy ds \sin(k\pi x)$ が成り立つ」

$\Leftrightarrow$ 「関数 $z_n \in S(n)$ は，$(t, x) \in D(n)$ における問題 (3.2) の解」

さらに，点列 $\{z_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ から導出される関数 $\overline{z} \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I)$ が，問題 (3.2) の一意解であることを示す．

次の例では，摂動項 $h(t, x, u)$ の Fourier 係数 $c_k^w(s)$（$k \in \boldsymbol{N}$，関数 $w(t, x)$ は解候補である）は，$\boldsymbol{R}_+$ 上で有界とする．

例 4.2 線形摂動系D型混合問題 (3.2) に関し，次の条件 (1) - (4) が満たされるとする．

(1) 関数 $h(t, x, u) \in C^2(\boldsymbol{R}_+ \times I \times \boldsymbol{R})$ は，次式を満たす．

$$h(t, 0, u) = h(t, 1, u) = 0 \ (t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R})$$

(2) 連続関数 $m : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が存在し，Fourier 係数 $c_k^w(s) = 2\displaystyle\int_0^1 \sin(k\pi y) h(s, y, w(s, y)) dy$（各 $n \in \boldsymbol{N}$ と $w \in S(n)$ に対し，$k \in \boldsymbol{N}$）に関し，次式が成り立つ．関数集合 $S(n)$ は後述する．

$$|c_k^w(s)| \le \frac{m(s)}{k^2}$$

（$n \in \boldsymbol{N}$，$w \in S(n)$，$k \in \boldsymbol{N}$，$s \in \boldsymbol{R}_+$）

(3) 関数 $m(s)$ は $\boldsymbol{R}_+$ 上有界で，次式が成り立つ．

$$\sup_{s \ge 0} m(s) = M_0 < \infty$$

(4) 初期関数 $f(x) \in C^4(I)$ は，次の条件を満たす $W > 0$ が存在する．

(a) $f^{(\ell)}(0) = f^{(\ell)}(1)$（$\ell = 0, 2$）

(b) $\dfrac{2|f^{(4)}|_\infty}{45} + \dfrac{M_0 \pi^2}{45} \le W$

（なお，$|f^{(4)}|_\infty = \max_{y \in I} |f^{(4)}(y)|$）

このとき，線形摂動系D型混合問題 (3.2) の一意解 $u(t, x)$ が存在し，$u(t, x)$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= 2\int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x) \\
&\quad + 2\int_0^t \int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y) \\
&\quad \times h(s, y, u(s, y)) dy ds \sin(k\pi x) \\
&\qquad\qquad (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)
\end{aligned}$$

証明 条件 (1) は，$t \ge 0$ を固定するとき，$u(t, x)$ が x に関し，奇関数であるときに，合成 $h(t, x, u(t, x))$ も奇関数に拡張可能であることを保証する．初期関数 $f \in C^4(I)$ を固定し，関数集合 $S(n)$ を次に定義する．$n \in \boldsymbol{N}$ を固定し，$J_n = [0, n]$，$D(n) = J_n \times I$ とおく．

$S(n) = \{w(t, x) \in C(D(n)) :$ 関数 $w : D(n) \to \boldsymbol{R}$ は次の条件 (ア) – (ウ) を満たす $\}$．

(ア) $w(t, 0) = 0 = w(t, 1)$

(イ) $w(0, x) = f(x)$（$x \in I$）

(ウ) $\max\{|w(t, x)| : (t, x) \in D(n)\} \le W$

写像 $\mathcal{V} : S(n) \to C(D(n))$ を，$w \in S(n)$ に対し，次式で定める．

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{V}(w)](t, x) \\
&= \int_0^1 K(t, x, y) f(y) dy \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 K(t-s, x, y) h(s, y, w(s, y)) dy ds \quad (4.3)
\end{aligned}$$

（$K(t, x, y) = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x) \sin(k\pi y)$，$(t, x) \in D(n)$）

写像 $\mathcal{V}$ は中への写像であることを示す．$\mathcal{V}(w) = u^w$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&u^w(t, x) \\
&= 2\int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x) \\
&\quad + 2\int_0^t \int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y) \\
&\quad \times h(s, y, w(s, y)) dy ds \sin(k\pi x)
\end{aligned}$$

を得る．$\mathcal{V}(S(n)) \subset S(n)$ を示す．

$$K(t, 0, y) = 0 = K(t, 1, y) = 0$$

から，$u^w(t, 0) = 0 = u^w(t, 1)$．

$$\begin{aligned}
&|u^w(t, x)| \\
&\le |2\int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x)| \\
&\quad + |2\int_0^t \int_0^1 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y) \\
&\quad \times h(s, y, w(s, y)) dy ds \sin(k\pi x)| \\
&= A_1^w + A_2^w \text{ とおく．}
\end{aligned}$$

項 A_1^w について．$f(y)$ を周期 2 の奇関数に拡張し，その Fourier 係数

$d_k = \int_{-1}^{1} \sin(k\pi y) f(y) dy$
は，部分積分法により条件 (4) から
$|d_k| = |\int_{-1}^{1} \frac{\sin(k\pi y)}{(k\pi)^2} f''(y) dy|$
$= |\int_{-1}^{1} \frac{-\sin(k\pi y)}{(k\pi)^4} f^{(4)}(y) dy| \le \frac{2|f^{(4)}|_\infty}{k^4\pi^4}$
（$k \in \boldsymbol{N}$）である．
$A_1^w = |2\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x)|$
$= |\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} d_k \sin(k\pi x)|$
$\le 2\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \le 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2|f^{(4)}|_\infty}{k^4\pi^4}$
$\le \frac{2|f^{(4)}|_\infty}{45}$ （$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$）．
項 A_2^w について．
$A_2^w = |2\int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y)$
$\times h(s, y, w(s, y)) dy \sin(k\pi x) ds|$
$\le 2\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} c_k^w(s) ds$
$\le 2\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \frac{m(s)}{k^2} ds$
$= 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} (\frac{e^{k^2\pi^2 t}-1}{k^2\pi^2}) \frac{M_0}{k^2}$
$\le 2M_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4\pi^2} = \frac{2M_0}{\pi^2}\frac{\pi^4}{90} = \frac{M_0\pi^2}{45}$．
よって，$|u^w(t, x)| \le \frac{2|f^{(4)}|_\infty}{45} + \frac{M_0\pi^2}{45} \le W$ より，$\mathcal{V}(S(n))$ は一様有界である．$\mathcal{V}(S(n)) \subset S(n)$ となる．

関数集合の像 $\mathcal{V}(S(n)) \subset C(D(n))$（$n \in \boldsymbol{N}$）はコンパクトであることを示す．実際，$\mathcal{V}(S(n))$ は同程度連続が成り立つ．実際，任意の正数 $0 < \varepsilon < 1$ に対し，正数 $\delta < \varepsilon$ は次の条件を満たすとする．

$$\frac{2\delta}{3}|f^{(4)}|_\infty + \delta\frac{M_0\pi^2}{3} + \delta\frac{2M_0\pi}{3} < \varepsilon.$$

また，$0 \le t_2 - t_1 < \delta$，$0 \le x_2 - x_1 < \delta$ とする．
$|u^w(t_2, x_2) - u^w(t_1, x_1)| \le |u^w(t_2, x_2) - u^w(t_1, x_2)| + |u^w(t_1, x_2) - u^w(t_1, x_1)| \le C_1^w + C_2^w$ とおく．
$C_1^w = |u^w(t_2, x_2) - u^w(t_1, x_2)|$
$\le 2|\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_2} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x_2)$
$- \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_1} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x_2)|$
$+2|\int_0^{t_2}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)} h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)$
$-\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$= 2|\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \{e^{-k^2\pi^2 t_2} - e^{-k^2\pi^2 t_1}\}$
$\times \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x_2)|$
$+ 2|(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2}) \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)$
$-\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$\le 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_2} \{1 - e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\} |d_k|$
$+ 2|\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \{e^{-k^2\pi^2(t_2-s)} - e^{-k^2\pi^2(t_1-s)}\}$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$+ 2|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$= C_{11}^w + C_{12}^w + C_{13}^w$ とおく．
$C_{11}^w = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_2} \{1 - e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\} |d_k|$
$\le 2\sum_{k=1}^{\infty} k^2\pi^2\delta \frac{2|f^{(4)}|}{k^4\pi^4} = 2\delta\frac{|f^{(4)}|_\infty}{3}$．
$C_{12}^w = 2|\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}$
$\times (1 - e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\} h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$\le 2\int_0^{t_1} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\pi^2\delta |c_k^w(s)| ds$
$\le 2\delta\sum_{k=1}^{\infty} k^2\pi^2 e^{-k^2\pi^2 t_2} \frac{e^{k^2\pi^2 t_1}-1}{k^2\pi^2}\frac{m(s)}{k^2}$
$\le 2\delta\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_0}{k^2} \le \delta\frac{M_0\pi^2}{3}$．
$C_{13}^w = 2|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)|$
$= 2\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)} |c_k^w(s)| ds$
$\le 2\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_2-s)} \frac{M_0}{k^2} ds \le \delta\frac{\pi^2 M_0}{3}$．
$C_2^w = |u^w(t_1, x_2) - u^w(t_1, x_1)|$
$\le 2|\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_1} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x_2)$
$- \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_1} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x_1)|$
$+ 2|\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} \sin(k\pi y)$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_2)$
$- \int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} \sin(k\pi y)$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x_1)|$
$= 2|\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t_1} \sin(k\pi y) f(y) dy$
$\times |\sin(k\pi x_2 - \sin(k\pi x_1)|$
$+ 2|\int_0^{t_1}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} \sin(k\pi y)$
$\times h(s, y, w(s, y)) dyds \{\sin(k\pi x_2) - \sin(k\pi x_1)\}|$
$\le 2\int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} 2|\cos\frac{k\pi(x_2+x_1)}{2}|$
$\times |\sin\frac{k\pi(x_2-x_1)}{2}|$
$+ 2|\int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} c_k^w(s) ds$
$\times \{\sin(k\pi x_2) - \sin(k\pi x_1)\}|$
$\le 2\int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_0}{k^2} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} 2\frac{k\pi\delta}{2}$
$+ 2\int_0^{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t_1-s)} \frac{M_0}{k^2} ds 2\frac{k\pi\delta}{2}$
$\le \delta\frac{2M_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \delta\frac{M_0\pi}{3}$．
よって，任意の正数 $\varepsilon < 1$ に対し，正数 $\delta < \varepsilon$ をとり，$|t_1 - t_2| < \delta$，かつ $|x_1 - x_2| < \delta$ ならば
$|u^w(t_2, x_2) - u^w(t_1, x_1)|$
$\le |u^w(t_2, x_2) - u^w(t_1, x_2)| + |u^w(t_1, x_2) - u^w(t_2, x_2)|$
$\le C_{11}^w + C_{12}^w + C_{13}^w + C_2^w$
$\le 2\delta\frac{|f^{(4)}|_\infty}{3} + \delta\frac{M_0\pi^2}{3} + \delta\frac{2M_0\pi}{3} < \varepsilon$
を得て，集合 $S(n)(\subset C(D(n)))$ は，$D(n)$ 上で相対コンパクトである（例 2.4 参照）．

写像 $\mathcal{V} : S(n) \to S(n)$ は連続であることを示す．実際，$\{w_p \in S(n) : p \in \boldsymbol{N}\}$ は，$\lim_{p\to\infty} w_p = w_0$（$\in S(n)$，$n \in \boldsymbol{N}$）とし，$u_p = u^{w_p}$，$u_0 = u^{w_0}$ とおく．
$|u_p(t, x) - u_0(t, x)|$
$= |2\int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} \sin(k\pi y)\{h(s, y, u_p(s, y)) - h(s, y, u_0(s, y))\} dyds \sin(k\pi x)|$．
ここで，
$\sup\{|u_p(t, x)| : (t, x) \in D(n)\} \le W$，$\sup\{|u_0(t, x)| : (t, x) \in D(n)\} \le W$（$n \in \boldsymbol{N}$）
より，$\lim_{p\to\infty} \mathcal{V}(w_p) = \mathcal{V}(w_0)$（$\in S(n)$）が成り立つから，$\mathcal{V}$ は連続である．

集合 $S(n)$ は，閉凸で有界集合であることは明らか．

Schauder の不動点定理から，不動点 $w \in S(n) : w = \mathcal{V}(w)$
$\Leftrightarrow w(t, x) = 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi y) f(y) dy \sin(k\pi x)$
$+2\int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-s)} h(s, y, w(s, y)) dyds \sin(k\pi x)$
（$t \in J_n$，$x \in I$，$n \in \boldsymbol{N}$）
が存在し，一意的である（例 4.1 参照）．

各写像 $\mathcal{V} : S(n) \to S(n)$（$n \in \boldsymbol{N}$）の不動点の集合 $\{w(t, x) \in S(n) \subset C(D(n))\}$ （$D(n) = J_n \times I$，

$J_n = [0,n]$，$I = [0,1]$，$n \in \boldsymbol{N}$）から，次の点列 $\{u_n \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I) : \boldsymbol{R}_+ \times I \to \boldsymbol{R}\}$ を構成する．

$$u_n(t,x) = \begin{cases} w(t,x) & ((t,x) \in D(n)) \\ w(n,x) & (t \geq n,\, x \in I) \end{cases}$$

集合 $\{u_n \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I) : n \in \boldsymbol{N}\}$ は，$|u_n(t,x)| \leq W$（$n \in \boldsymbol{N}$，$t \in \boldsymbol{R}_+$，$x \in I$）より，一様有界．また $\{u_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ は，$\boldsymbol{R}_+ \times I$ 上で同程度連続．実際，任意の正数 $\varepsilon < 1$ に対し，$\delta > 0$ は $2\delta\frac{|f^{(4)}|_\infty}{3} + \delta\frac{2M_0\pi^2}{3} + \delta\frac{2M_0\pi}{3} < \varepsilon$ を満たし，$|t_1 - t_2| < \delta$，かつ $|x_1 - x_2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} &|u_n(t_2,x_2) - u_n(t_1,x_1)| \\ &\leq |u_n(t_2,x_2) - u_n(t_1,x_2)| + |u_n(t_1,x_2) - u_n(t_2,x_2)| \\ &\leq C^w_{11} + C^w_{12} + C^w_{13} + C^w_2 \\ &\leq 2\delta\frac{|f^{(4)}|_\infty}{3} + \delta\frac{2M_0\pi^2}{3} + \delta\frac{2M_0\pi}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．

よって，Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{u_n \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I)\}$ は，集合 $\boldsymbol{R}_+ \times I$ 上で，極限

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t,x) = u_0$$

は収束し，$u_0 \in C(\boldsymbol{R}_+ \times I)$ が存在し，次式を満たす．

$$\begin{aligned} &u_0(t,x) \\ &= 2\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x) \\ &+2\int_0^t\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}h(s,y,u_0(s,y))dyds\sin(k\pi x) \end{aligned}$$

$$(t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)$$

この関数 u_0 は，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の一意解である．◇

次の例では，摂動項 $h(t,x,u)$ の Fourier 係数 $c^w_k(s)$（$k \in \boldsymbol{N}$，関数 $w(t,x)$ は解候補である）は，$t \in \boldsymbol{R}_+$ に関し，絶対可積分とする．

例 4.3 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，$I = [0,1]$ として，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 関数 $h(t,x,u) \in C^2(\boldsymbol{R}_+ \times I \times \boldsymbol{R})$ は，次式を満たす．

$$h(t,0,u) = h(t,1,u) = 0\ (t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R})$$

(2) 連続関数 $m_1 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が存在し，各 $n \in \boldsymbol{N}$ と $w \in S(n)$ に対し，Fourier 係数

$$c^w_k(s) = 2\int_0^1 \sin(k\pi y)h(s,y,w(s,y))dy$$

は，次式を満たす．関数集合 $S(n)$ は後述する．

$$|c^w_k(s)| \leq \frac{m_1(s)}{k^2}\ (n,k \in \boldsymbol{N},\ w \in S(n),\ s \in \boldsymbol{R}_+)$$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty m_1(s)ds = M_L < \infty$

(4) 関数 $f \in C^4(I)$ とする．ある定数 $\eta_0 > 0$，$T_0 \geq 0$，$W > 0$，$M_0 > 0$ は，次式 (a) - (d) を満たす．

(a) $f^{(\ell)}(0) = 0 = f^{(\ell)}(1)$（$\ell = 0, 2$）

(b) $\max\{m_1(s) : s \in [0,T_0]\} \leq M_0$

(c) $\displaystyle\int_{T_0}^\infty m_1(s)ds \leq \eta_0$

(d) $\displaystyle\frac{|f^{(4)}|_\infty}{45} + \frac{M_0}{90} + \frac{\eta_0\pi^2}{6} \leq W$

このとき，線形摂動系の D 型混合問題 (3.2) の一意解 $u(t,x)$ が存在し，$u(t,x)$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned} u(t,x) \quad = \quad & 2\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x) \\ & +2\int_0^t\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y) \\ & \times h(s,y,u(s,y))dyds\sin(k\pi x) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$(t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)$$

証明は，例 4.2 と同様である．詳しくは文献 [9] 第 10 章を参照されたい．

次の例では，集合のコンパクト性の証明に関し例 2.7 が応用される．

例 4.4 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，$I = [0,1]$ として，次の条件 (1) - (5) が成り立つ．

(1) 関数 $h(t,x,u) \in C^2(\boldsymbol{R}_+ \times I \times \boldsymbol{R})$ は，次式を満たす．

$$h(t,0,u) = h(t,1,u) = 0\ (t \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in \boldsymbol{R})$$

(2) 定数 $W_0 > 0$ と $M > 0$ が存在し，2 階偏導関数 $h_{xx}(t,x,u)$，$h_{ux}(t,x,u)$，$h_{uu}(t,x,u)$ につき，次の条件 (a)，(b) が成り立つ．

(a) $\max\{|h_{xx}(t,x,u)|, |h_{ux}(t,x,u)|, |h_{uu}(t,x,u)| : t \in \boldsymbol{R}_+, x \in I, |u| \leq W_0\} \leq M < 3$

(b) $|h(t,x,u)| \leq M|u| (t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I,\ |u| \leq W_0)$

(3) 初期関数 $f(x) \in C^4(I)$ は，次の条件 (a)，(b) を満たす．

(a) $f^{(\ell)} = 0 = f^{(\ell)}(1)$（$\ell = 0, 2$）

(b) $\frac{|f^{(4)}|_\infty}{15} \leq W_0(3 - M)$

(4) $\displaystyle 2|f^{(4)}|_\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3\pi^3} + \frac{M}{90}\{1 + W_1 + W_1^2 + W_2\} \leq W_1$

(5) $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}\{|f^{(4)}|_\infty + M(1 + W_1 + W_1^2 + W_2)\} \leq W_2$

（なお，$|f^{(\ell)}|_\infty = \max_{y\in I}|f^{(\ell)}(y)|$，$\ell \in \boldsymbol{Z}_+$）

このとき，線形摂動系混合問題 (3.2) の一意解 $u(t,x)$ が存在し，$u(t,x)$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned} u(t,x) = & 2\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x) \\ & +2\int_0^t\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y) \\ & \times h(s,y,u(s,y))dyds\sin(k\pi x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$(t \in \boldsymbol{R}_+,\ x \in I)$$

証明は，文献 [9] 第 10 章を参照されたい．

次の例では，混合問題 (3.2) の解 $u^f = u^f_0 + u^f_1$ において，線形常微分方程式と同様に，一般解（u^f_0 が相当）と特殊解（u^f_1 が相当）の存在と評価を示している．

例 4.5 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，条件 (1) - (3) を仮定する．

(1) 例 4.2 の前提条件 (1) - (4) を仮定する，

(2) 関数 $H_1 : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が存在し，次の不等式を満たす．

$$|h(s,y,w_1)-h(s,y,w_2)| \le H_1(s)|w_1-w_2| \quad (s\in\boldsymbol{R}_+,\ y\in I,\ w_1,w_2\in\boldsymbol{R})$$

かつ $H_1(s) \le c_1 < 3 \quad (s\in\boldsymbol{R}_+)$

(3) $h(t,x,0)=0$（$t\in\boldsymbol{R}_+$，$x\in I$）

このとき，g の線形混合問題 (3.1) と f の線形摂動系混合問題 (3.2) に関し，次の結論 (I)，(II) を得る．

(I) 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u^f は，線形系 D 型混合問題 (3.1) の解 u^g に対し，安定（[S]）である．固定される g に対し，g の近傍に存在する f を考える (u^g 安定)．

(II) 例 4.2 における f の条件を，$f,g\in C^4(I)$ が満たすと仮定する．さらに $p=f,g$ として，

$u^p(t,x)=u_0^p(t,x)+u_1^p(t,x)$，ただし

$$u_0^p(t,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t}\sin(k\pi y)p(y)dy\sin(k\pi x),$$

$$u_1^p(t,x)=2\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y) \times h(s,y,u^p(s,y))dydy\sin(k\pi x)$$

とおく．次の結論 (A) - (C) を得る．

(A) $\lim_{t\to\infty}u_0^p(t,x)=0$（$p=f,g$ で，$x\in I$）

(B) 解 $u^g=u_0^g+u_1^g$ について

$$\|u_0^g\|_{\boldsymbol{R}_+\times I}\le\frac{|g^{(4)}|_\infty}{45},\quad \|u_1^g\|_{\boldsymbol{R}_+\times I}\le\frac{M_0\pi^2}{90}$$

が成り立つ．なお，$\|u\|_{\boldsymbol{R}_+\times I}=\max\{u(t,x):(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times I\}$ である．

(C) $\|u_1^f\|_{\boldsymbol{R}_+\times I}<\|u^f\|_{\boldsymbol{R}_+\times I}$

証明方針　例 4.2 の条件 (1) - (4) から，Schauder の不動点定理から，任意の初期関数 f に関し線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解は一意的に存在する．

(I) 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u^f の u^g 安定（[S]）を示す．関数 $g\in C^2(I)$ は，線形系 D 型混合問題 (3.1) の初期関数とし，その解を $u^g(t,x)$（$t\in\boldsymbol{R}_+$，$x\in I$）とする．微小な $\varepsilon>0$ に対し，正数 δ は次式を満たすとする．

$\frac{2\delta}{1-\frac{c_1}{3}}<\varepsilon.$

任意の初期関数 $f\in C^2(I)$ は $f(0)=0=f(1)$ を満たし，$\|f-g\|_{\mathfrak{F}}<\delta$ とする．線形摂動系 D 型混合問題 (3.2)，線形混合問題 (3.1) の解をそれぞれ，

$$u^f(t,x)=2\int_0^1K(t,x,y)f(y)dy+2\int_0^t\int_0^1K(t-s,x,y)h(s,y,u^f(s,y))dyds,$$

$$u^g(t,x)=2\int_0^1K(t,x,y)g(y)dy+\int_0^t\int_0^1K(t-s,x,y)h(s,y,u^g(s,y))dyds$$

とする．このとき，Fourier 係数を次に定義する．

$d_k^f=2\int_0^1\sin(k\pi y)f(y)dy,$

$d_k^g=2\int_0^1\sin(k\pi y)g(y)dy,$

$c_k^f(s)=2\int_0^1\sin(k\pi y)h(s,y,u_f(s,y))dy,$

$c_k^g(s)=2\int_0^1\sin(k\pi y)h(s,y,u_0(s,y))dy.$

よって，$|u^f(t,x)-u^g(t,x)|$

$\le 2|\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}\sin(k\pi y)\{f(y)-g(y)\}dy\sin(k\pi x)|$
$+2|\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)\{h(s,y,u^f(s,y))$
$-h(s,y,u^g(s,y)\}dyds\sin(k\pi x)|$

$\le 2\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}|d_k^f-d_k^g|dy+2\int_0^t\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}$
$\times H_1(s)\int_0^1|u^f(s,y)-u^g(s,y)|dyds$

$\le 2\sum_{k=1}^\infty|d_k^f-d_k^g|$
$+2\int_0^t\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}H_1(s)ds\Delta U(t).$

ただし，$\Delta U(t)=\max\{|u^f(s,y)-u^g(s,y):s\in[0,t]\}$ とおく．

よって，$\Delta U(t)\le 2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}+2\sum_{k=1}^\infty\frac{c_1}{k^2\pi^2}\Delta U(t)=2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}+\frac{2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}c_1\Delta U(t)$ から，$\Delta U(t)(1-\frac{c_1}{3})\le 2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}$．すなわち，次式が成り立つ．

$$\max\{|u^f(s,x)-u^g(s,x)|:s\in[0,t]\}<\varepsilon \quad (t\in\boldsymbol{R}_+,\ x\in I).$$

従って，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u_f は，線形系 D 型混合問題 (3.1) に対し，u^g 安定である．

(II) (A) 関数 p の Fourier 係数は $d_k^p=\int_{-1}^1\sin(k\pi y)p(y)dy=2\int_0^1\sin(k\pi y)p(y)dy=2\int_0^1\frac{-\sin(k\pi y)}{k^2\pi^2}p''(y)dy$ より，$|d_k^p|\le\frac{4|p''|_\infty}{k^2\pi^2}$．よって $t\to\infty$ のとき，

$|u_0^p(t,x)|=2|\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}d_k^p\sin(k\pi x)|\le 2\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}|d_k^p|\le 4\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}\frac{4|p''|_\infty}{k^2\pi^2}\le 4|p''|_\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4\pi^4t}=\frac{4|p''|_\infty}{t}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4\pi^4}=\frac{4|p''|_\infty}{t}\frac{1}{90}\to 0$（$t\to\infty$）．

(B) 例 4.2 の証明において，$u^g\in C(D(n))$（$n\in\boldsymbol{N}$）から，明らか．

(C) $|u_1^f(t,x)|=2|\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty$
$\times e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)\times h(s,y,u^f(s,y))dyds\sin(k\pi x)|$
$\le 2\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}\int_0^te^{k^2\pi^2s}H_1(s)|u^f(s,y)|dsdy$
$\le 2\sum_{k=1}^\infty\frac{1-e^{-k^2\pi^2}}{k^2\pi^2}3|u^f|_\infty<2\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}3|u^f|_\infty$
$=|u^f|_\infty$．ただし $|u^f|_\infty=|u^f|_{\boldsymbol{R}_+\times I}$．◊

次の例では，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，解の漸近挙動性の十分条件を与えている．

例 4.6 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，例 4.3 の前提条件 (1) - (4) を仮定する，

このとき，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) のすべての解 u^f は，u^g 有界（[B]）である．

証明方針　線形系混合問題 (3.1) と $u^g(0,x)=g(x)$ の解は，

$$u^g(t,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2t}\sin(k\pi y)g(y)dy\sin(k\pi x)$$

である．初期条件 $u^f(0,x)=f(x)$（$f\in C(I)$）を満たす解 $u^f(t,x)$ は，

$$u^f(t,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x)+2\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi(t-s)}\sin(k\pi y)$$

$\times h(s,y,u(s,y))dyds\sin(k\pi x)$.
このとき，
$|u^f(t,x)-u^g(t,x)|\le$
$2|\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi t}\sin(k\pi y)\{f(y)-g(y)\}dy\sin(k\pi x)|$
$+2|\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi(t-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,u(s,y))dyds\sin(k\pi x)|$
$\le 2\sum_{k=1}^\infty|d_k^f-d_k^g|+2\int_0^t\sum_{k=1}^\infty|c_k^u(s)ds|$.
ただし，Fourier 係数
$d_k^f=2\int_0^1\sin(k\pi y)f(y)dy$,
$d_k^g=2\int_0^1\sin(k\pi y)g(y)dy$,
$c_k^u(s)=2\int_0^1\sin(k\pi y)h(s,y,u(s,y))dy$
は，$|f''|_\infty=\max\{|f''(y)|:y\in[0,1]\}$ とおくと，$\sum_{k=1}^\infty|d_k^f|\le\sum_{k=1}^\infty\frac{2|f''|_\infty}{k^2}$. $\alpha>0$ に対し，$\|f-g\|_{\mathfrak{F}}<\alpha$，$\beta>\alpha+B$，$B=\int_0^\infty m_u(s)ds\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}$ として，
$|u^f(t,x)-u^g(t,x)|$
$\le 2\sum_{k=1}^\infty|d_k^f-d_k^g|+2\int_0^t\sum_{k=1}^\infty\frac{m(s)}{k^2}$
$\le 2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}+2\int_0^\infty m(s)ds\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}$
$<2\alpha+B<\beta$. ゆえに，線形摂動系混合問題 (3.2) の解のすべては，線形系混合問題 (3.1) に対し，u^g 有界となる．◊

次の例では，不動点定理を応用し，混合問題 (3.2) の安定性を示している．

例 4.7 線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) に関し，次の条件 (1) - (3) が成り立つとする．

(1) 関数 $h:\boldsymbol{R}_+\times[0,1]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は，C^1 級とし，
$h(t,0,u)=h(t,1,u)=0$（$t\in\boldsymbol{R}_+$，$u\in\boldsymbol{R}$）

(2) ある正数 $C>0$ は，次条件を満たす．

$$\liminf_{\rho\to+0}\frac{1}{\rho}\sup_{|w|\le\rho}|h(s,y,w)|\le C<\frac{1}{3} \tag{4.6}$$
$$(s\in\boldsymbol{R}_+,y\in[0,1])$$

(3) 関数 $f\in C^4(I)$ とし，$f^{(\ell)}(0)=0=f^{(\ell)}(1)$（$\ell=0,2$）とする．また固定される $g\in C^4(I)$ は，$g^{(\ell)}(0)=0=g^{(\ell)}(1)$（$\ell=0,2$）を満たすとする．

このとき，線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) は，固定の g の線形系 D 型混合問題 (3.1) に対し，安定（[S]）である．

証明方針　自然数 $n\in\boldsymbol{N}$ を任意に固定し，区間 $I=[0,1]$，$J_n=[0,n]$，集合 $D(n)=J_n\times I$ とおく．条件 (2) から，次の条件を満たす点列 $\{\rho_j>0:j\in\boldsymbol{N}$ として，条件 (ア) - (ウ) が成り立つ $\}$ が存在する．

(ア) $\lim_{j\to\infty}\rho_j=0$
(イ) $\sup_{|w|\le\rho_j}|h(s,y,w)|\le\rho_j C$　($s\in\boldsymbol{R}_+$，$y\in I$)
(ウ) $\rho_j>\rho_{j+1}$（$j\in\boldsymbol{N}$）

微小な正数 $\varepsilon<1$ に対し，ある $\rho_j<\varepsilon$（$j\in\boldsymbol{N}$）を固定する．関数 $g\in C^4(I)$ に対し，線形系問題 (3.1) の一意解を $u^g\in C^2(\boldsymbol{R}_+\times I)$ とおく．このとき $|u^g|_\infty=\max\{|u^g(t,x)|:(t,x)\in\boldsymbol{R}_+\times I\}\le 2|u^g(t,x)|_{\mathfrak{F}}$ である．実際，$|u^g(t,x)|$ $\le\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}|\int_{-1}^1\sin(k\pi y)g(y)dy\sin(k\pi x)|\le 2\sum_{k=1}^\infty|d_k^g|=2\|u^g\|_{\mathfrak{F}}$. 固定されている関数 $g\in C^4(I)$ に対し，$f\in C^4(I)$ は，次式を満たすとする．

$$\frac{2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}}{1-\frac{C}{3}}\le\rho_j.$$

次の関数集合 $S(n)\subset C(D(n))$ を定める．

$S(n)=\{w\in C(D(n))$: 関数 w は条件 (カ) - (ク) を満たす $\}$.

(カ) $w(0,x)=f(x)$（$x\in I$）
(キ) $w(t,0)=0=w(t,1)$（$t\in J_n$）
(ク) $|w(t,x)-u^g(t,x)|\le\frac{2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}}{1-\frac{C}{3}}\le\rho_j$
（$t\in J_n$，$x\in I$）

条件 (ク) から，$g=0$ のとき，$|w(t,x)|\le\varepsilon$（$t\in J_n$，$x\in I$）を得る．関数 $w\in S(n)$ に対し，写像 $U:S(n)\to C(D(n))$ を，次に定め，$u^w=U(w)$ とおく．

$$u^w(t,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x)$$
$$+2\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)$$
$$\times h(s,y,w(s,y))dyds\sin(k\pi x)$$
$$(t\in J_n,\ x\in I).$$

(I) 写像 U は中への写像 : $U(w)\in U(S(n))$ を示す．実際，f は $[-1,1]$ の奇関数とし，$u^w(0,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^\infty\sqrt{2}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x)=\int_{-1}^1\sum_{k=1}^\infty\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x)=f(x)$. また $u^w(t,0)=0=w(t,1)$ が成り立つ．
さらに，$(t,x)\in J_n\times I$ のとき，$|u^w(t,x)-u^g(t,x)|\le$
$2|\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi y)\{f(y)-g(y)\}dy\sin(k\pi x)$
$+2|\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,w(s,y))dyds\sin(k\pi x)|$
$\le 2\sum_{k=1}^\infty|d_k^f-d_k^g|+2\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi^2 t}\frac{e^{k^2\pi^2 t}-1}{k^2\pi^2}C\varepsilon\le 2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}+2C\varepsilon\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}\le\rho_j$（$t\in J_n$，$x\in I$）が成り立つ．ゆえに，$u^w\in S(n)$ から，$U(S(n))\subset S(n)$ である．

(II) 集合 $U(S(n))\subset C(D(n))$ は，相対コンパクトである．(I) と $U(S(n))\subset S(n)$ から，集合 $U(S(n))$ は一様有界である．$U(S(n))$ は同程度連続である．実際，$n\ge t_2\ge t_1\ge 0$，かつ $1\ge x_2\ge x_1\ge 0$ とする．
$|u^w(t_2,x_2)-u^w(t_1,x_1)|$
$\le|u^w(t_2,x_2)-u^w(t_1,x_2)|+|u^w(t_1,x_2)-u^w(t_1,x_1)|=A_1^w+A_2^w$ とおく．g に対し f は，
$\frac{2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}}{1-\frac{C}{3}}\le\rho_j$ を満たし，各 f の $|f''|_\infty\ge 0$ に対し $\delta>0$ は，次式を満たすとする．

$\frac{\delta}{6}|f''|_\infty<\varepsilon(\frac{1}{2}-\frac{2C}{3})$，かつ
$\delta\sum_{k=1}^\infty\frac{|f''|_\infty}{k^3}\pi+\frac{2C\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{2}$.

項 A_1^w について．$\delta>t_2-t_1\ge 0$，$\delta>x_2-x_1\ge 0$ として，$A_1^w=|u^w(t_2,x_2)-u^w(t_1,x_2)|\le$
$2|\int_0^1\sum_{k=1}^\infty\{e^{-k^2\pi^2 t_2}-e^{-k^2\pi^2 t_1}\}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x_2)$

$+(\int_0^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2})\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,w(s,y))dyds\sin(k\pi x_2)$
$-\int_0^{t_1}\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t_1-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,w(s,y))dyds\sin(k\pi x_2)|$
$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}\{e^{-k^2\pi^2t_2}\{1-e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\}|d_k^f|$
$+2\int_0^{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t_2}$
$\times\{1-e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\}e^{k^2\pi^2s}|h(s,y,w(s,y))|ds$
$+2\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t_2-s)}|h(s,y,w(s,y))|ds$
$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}k^2\pi^2(t_2-t_1)|d_k^f|+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t_2}$
$\times\{1-e^{k^2\pi^2(t_2-t_1)}\}\frac{e^{k^2\pi^2t_1}-1}{k^2\pi^2}C\varepsilon$
$+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t_2}\frac{e^{-k^2\pi^2t_2}-e^{-k^2\pi^2t_1}}{k^2\pi^2}C\varepsilon$
$\leq 2\delta\sum_{k=1}^{\infty}k^2\pi^2\frac{|f''|_\infty}{k^4}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}C\varepsilon$
$=\frac{\delta}{3}|f''|_\infty+\frac{4C\varepsilon}{6}<\frac{\varepsilon}{2}$ である．実際，$C<\frac{1}{3}$ から，固定される g に対し f は，$\dfrac{2\|f-g\|_{\mathfrak{F}}}{1-\frac{C}{3}}\leq\rho_j$ を満たし，各 f の $|f''|_\infty\geq 0$ に対し $\delta>0$ は，$\frac{\delta}{3}|f''|_\infty<\varepsilon(\frac{1}{2}-\frac{2C}{3})$ を満たすとする．

項 A_2^w について．$A_2^w=|u^w(t_1,x_2)-u^w(t_1,x_1)|$
$=2|\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t_1}\sin(k\pi y)f(y)dy$
$\times\{\sin(k\pi x_2)-\sin(k\pi x_1)\}$
$+\int_0^{t_1}\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t_1-s)}$
$\times|\sin(k\pi y)h(s,y,w(s,y))dy|ds|$
$\times\sin(k\pi x_2)-\sin(k\pi x_1)|$
$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|d_k^f|2|\cos\frac{k\pi(x_2+x_1)}{2}\sin\frac{k\pi(x_2-x_1)}{2}|$
$+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t_1}\frac{1-e^{-k^2\pi^2t_1}}{k^2\pi^2}2C\varepsilon$
$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f''|_\infty}{k^4}2\frac{k\pi\delta}{2}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}C\varepsilon$
$=2\delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f''|_\infty}{k^3}\pi+4\frac{\pi^2}{6}C\varepsilon$
$=2\delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f''|_\infty}{k^3}\pi+\frac{2C\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{2}$
を得る．

よって，$w\in S(n)$，$|t_1-t_2|<\delta$，かつ $|x_1-x_2|<\delta$ のとき，$|u^w(t_2,x_2)-u^w(t_1,x_1)|\leq A_1^w+A_2^w\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$（$t_1,t_2\in J_n$，$x_1,x_2\in J_n$）より，$S(n)$ は同程度連続である．Ascoli-Arzelá の定理から，集合 $S(n)$（$n\in\boldsymbol{N}$）は相対コンパクトである．

(III) 集合 $U(S(n))\subset C(D(n))$ は閉凸集合である．

(IV) 写像 $U:S(n)\to S(n)$ は，連続である．点列 $\{w_j\in S(n):j\in\boldsymbol{N}\}$（$n\in\boldsymbol{N}$ は固定）は

$$\lim_{j\to\infty}w_j=w_0\in S(n)$$

のとき，$\lim_{j\to\infty}U(w_j)=U(w_0)$ を示せばよい．

(V) Schauder の不動点定理から，写像 U は，$S(n)$ 内に不動点 w をもつ
$\Leftrightarrow w=U(w)$
$\Leftrightarrow w(t,x)=2\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t}\sin(k\pi y)f(y)dy\sin(k\pi x)$
$+2\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,w(s,y))dyds\sin(k\pi x)$
（$t\in J_n$，$x\in I$）．

(VI) f の線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) の解 u^f が，一意的に存在する．次の関数列 $\{u_n:\boldsymbol{R}_+\times I\to\boldsymbol{R},n\in\boldsymbol{N}\}$ を構成する．

$$u_n(t,x)=\begin{cases}w(t,x) & (t\in J_n,\quad x\in I)\\ w(n,x) & (t\geq n,\quad x\in I)\end{cases}.$$

このとき，集合 $\{u_n\in C(\boldsymbol{R}_+\times I):n\in\boldsymbol{N}\}$ は，一様有界，かつ同程度連続である．Ascoli-Arzelá の定理から，集合 $\{u_n\}$ は，集合 $\boldsymbol{R}_+\times I$ の任意のコンパクト集合上で，相対コンパクトであるので，極限 $\lim_{n\to\infty}u_n=u$，かつ $u\in\{u_n\}$ が存在する．その関数 $u\in C(\boldsymbol{R}_+\times I)$ は，f の線形摂動混合問題 (3.2) の解である．また，例 4.1 から一意的である．

(VII) f の線形摂動混合問題 (3.2) の解 u^f は，g の線形系混合問題 (3.1) の解 u^g に対し，安定（[S]）である．任意の正数 $\varepsilon<1$ に対し，$\delta>0$ は，$\frac{2\delta}{1-\frac{C}{3}}\leq\varepsilon$ とする．$\|f-g\|_{\mathfrak{F}}<\delta$ のとき，$|u^f(t,x)-u^g(t,x)|\leq$
$2|\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t}\sin(k\pi y)\{f(y)-g(y)\}dy\sin(k\pi x)|$
$+2|\int_0^t\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2(t-s)}\sin(k\pi y)$
$\times h(s,y,u^f(s,y))dyds\sin(k\pi x)|$
$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|d_k^f-d_k^g|+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi^2t}\frac{e^{k^2\pi^2t}-1}{k^2\pi^2}C\varepsilon\leq 2\delta+2C\varepsilon\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=2\delta+\frac{C\varepsilon}{3}\leq\varepsilon$（$t\in\boldsymbol{R}_+$，$x\in I$）を得る．よって，$f$ の線形摂動系 D 型混合問題 (3.2) は，g の線形混合問題 (3.1) に対し，[S] である．◊

5.　おわりに

本研究では放物型偏微分方程式に関し,（Dirichet 境界条件を有する）線形系 D 型混合問題（L）:

$u_t(t,x)=u_{xx}(t,x)$（$t>0$，$x\in I$）
$u(t,0)=0=u(t,1)$（$t>0$）
$u(0,x)=g(x)$（$x\in I$）

ただし，$t\in\boldsymbol{R}_+=[0,\infty)$，$x\in I=[0,1]$，関数 $g:I\to\boldsymbol{R}$（$g(0)=0=g(1)$）は十分滑らか，関数 $u:\boldsymbol{R}_+\times I\to\boldsymbol{R}$ は C^2 級，また，
線形摂動系 D 型混合問題（H）:

$u_t(t,x)=u_{xx}(t,x)+h(t,x,u(t,x))$（$t>0$，$x\in I$）
$u(t,0)=0=u(t,1)$（$t>0$）
$u(0,x)=f(x)$（$x\in I$）

ただし，関数 $h:\boldsymbol{R}_+\times I\to\boldsymbol{R}$ と関数 $f:I\to\boldsymbol{R}$（$f(0)=0=f(1)$）は十分滑らかとして，2 問題を考える．3 節では，線形摂動系混合問題（H）の解 u^f に関し，線形系混合問題（L）の解 u^g 対する安定性 [S] と，有界性 [B] の定義を新たに与えている．4 節では，Schauder の不動点定理，Gronwall の不等式，Ascoli-Arzelá の定理を応用し，

- 非線形問題（H）の解 u^f の存在と一意性
- 非線形問題（H）の解 u^f の，線形問題（L）の解 u^g に対する安定性（stabiity）
- 非線形問題（H）の解 u^f の，線形問題（L）の解 u^g に対する有界性（boundedness）

の十分条件を与えている．

今後は，放物型偏微分方程式に関し,（Neumann 境界

条件を有する）線形系 N 型混合問題（LN）：

$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$（$t>0$，$x \in I$）

$u_x(t,0) = 0 = u_x(t,1)$（$t>0$）

$u(0,x) = g(x)$（$x \in I$）

と，線形摂動系 N 型混合問題（HN）：

$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + h(t,x,u(t,x))$（$t>0$，$x \in I$）

$u_x(t,0) = 0 = u_x(t,1)$（$t>0$）

$u(0,x) = f(x)$（$x \in I$）

について，非線形問題（HN）の解 u^f の存在と一意性，非線形問題（HN）の解 u^f の u^g 安定性，非線形問題（HN）の解 u^f の u^g 有界性に関し，不動点定理等で解析することを目指す．

また，双曲型偏微分方程式に関し，線形摂動系初期値問題（H-P）：

$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + h(t,x,u(t,x))$（$t>0$，$x \in \boldsymbol{R}$）

$u(0,x) = f(x)$（$x \in \boldsymbol{R}$）

$u_t(0,x) = g(x)$（$x \in \boldsymbol{R}$）

の解に関する存在と一意性について，ある十分条件を不動点定理による証明を与えることも可能である．

さらに，楕円型偏微分方程式の境界値問題

$u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z) = \rho(x,y,z)$，

ただし，有界領域 $D \subset \boldsymbol{R}^3$ は C^1 級の境界を有し，$x,y,z \in D$ の場合，その解の存在と一意性や，安定性の保証が，不動点定理の応用により期待される．

参考文献

1) N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part* I,（Wiley-Interscience Publ., New York, 1964), p.456.
2) A. G. Kartsatos, *Advanced Ordinary Differential Equations*, (Mariner Publ. Comp., Florida, 1980), pp. 23, 22, 26.
3) 河田敬義，三村征雄，現代数学序説 II（岩波書店，東京，1965)，pp. 54, 75.
4) 齋藤誠慈，数理モデル入門（裳華房，東京，2020）.
5) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 I -常微分方程式の境界値問題と準線形常微分方程式の安定性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[1]，pp. 34 - 40（2023）.
6) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 II -常微分方程式の漸近同値性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[1]，pp. 41- 49（2023）.
7) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 III -準線形差分方程式と修正ニコルソン・ベイリーモデル-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[2]，pp. 49 - 56（2023）.
8) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 IV -準線形積分微分方程式への応用-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[3]，pp. 50 - 59（2023）.
9) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の安定性解析（森北出版，東京，2023 年出版予定）,10 章.
10) D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, (Cambridge Univ. Press, London, 1974), p. 26.
11) T. A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, (Academic Press Inc., New York, 1985)，p. 179.
12) 山本稔，常微分方程式の安定性（実教出版，東京，1979），pp. 30，140.