Qualitative Analysis to Solutions for Equations via Fixed Point Theorems IV - Applications to Quasilinear Integro-differetial Equations -

Seiji SAITO*

(Received July 3, 2023)

In this article we give sufficient conditions of stability and boundedness for solutions of quasilinear integro-differential equations by applying fixed point theorems.

Key words : fixed point theorem, quasilinear integro-differential equation, stability, boundedness.

キーワード : 不動点定理，準線形積分微分方程式，安定性，有界性.

不動点定理による方程式の定性解析 IV - 準線形積分微分方程式への応用 -

齋藤誠慈

1. はじめに

集合 $\boldsymbol{R}_+ = [0,\infty)$ と $m \in \boldsymbol{N}$（自然数全体）とする．積分微分方程式の初期関数問題

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \int_0^t F(t,s,x(s))ds,\ x(s) = \phi(s)$$

（$s \in [0,\tau]$，$\tau \geq 0$）に関し，線形的 $f(t,x) = A(t)x$（行列 $A(t): m \times m$ は $t \geq 0$ で連続，$x \in \boldsymbol{R}^m$），合成積型 $F(t,s,x) = C_1(t-s)x$（$t \geq s \geq 0$，行列 $C_1 : m \times m$ は連続），および非合成積型 $F(t,s,x) = C_2(t,s)x$（行列 C_2 は $t \geq s \geq 0$ で連続）の場合，文献 [10] においては，リアプノフ汎関数（補助関数）等を応用して，詳しい結果が得られている．なお，関数 $\phi : [0,\tau] \to \boldsymbol{R}^m$ は連続で，$x(s) = \phi(s)$（$s \in [0,\tau]$）を初期関数条件といい，解 $x(s)$ は $s \in [0,\tau]$ において，$x(s) = \phi(s)$ を満たすことを意味する．

本研究では，準線形的 $f(t,x) = A(t,x)x$（行列 $A : m \times m$ は $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ で連続）の場合に関し，次の積分微分方程式の初期値問題

$$x'(t) = A(t,x(t))x(t) + \int_\tau^t F(t,s,x(s))ds,\ x(\tau) = \xi \quad \text{(ID)}$$

について，不動点定理やコンパクト性定理の応用により，解の定性解析の結果を述べる．

ベクトル空間 V 上の写像 $F : V \to V$ の不動点 $x_e \in V$ とは，$F(x_e) = x_e$ を満たす点をいう．不動点定理について，第 2 節で述べる．

問題 (ID) を満たす解 $x(t)(t,\tau \in J$，区間 $J \subset \boldsymbol{R}_+)$ があれば，$x(t)$ が問題 (ID) を満たすことは，$x(t)$ が次の積分方程式を満たすことと同値である（$t \in J$）．

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\tau) + \int_\tau^t A(s,x(s))x(s)ds \\ &+ \int_\tau^t \int_0^u F(u,s,x(s))dsdu \end{aligned}$$

ここで，集合 $C(J)$ を区間 J 上で連続関数全体として，$y \in C(J)$ に関し，次の積分方程式

$$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t A(s,\underline{y(s)})x(s)ds$$

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone : +81-774-65-6702, E-mail : ssaito@mail.doshisha.ac.jp

$$+\int_\tau^t \int_0^u F(u,s,\underline{y(s)})dsdu \qquad \text{(IEq)}$$

を考える．下線部に注意すると，式 (IEq) は線形積分微分方程式

$$x'(t) = A(t,\underline{y(t)})x(t) + \int_\tau^t F(t,s,\underline{y(s)})ds$$

の積分形であるから，初期条件 $x(\tau)=\xi$ につき，一意的な連続解 $x \in C(J)$ が存在するので，$x=x_y$ とおく．改めて，写像 $\mathcal{U}: C(J) \to C(J)$ を $\mathcal{U}(y)=x_y$（$y \in C(J)$）と定めると，次の関係が成り立つ．

「$x(t)$ は問題 (ID) の解
　$\Leftrightarrow$ 関数 $x \in C(J)$ は写像 $\mathcal{U}$ の不動点」

著者は，常微分方程式，あるいは差分方程式の解に関し，不動点定理を応用し定性解析を行ってきた [4, 5, 6]．本研究では，積分微分方程式の解に関する定性解析のために，従前の研究 [7)p.54] の例と同様にして，不動点定理を応用している．

2.　不動点定理等の準備

本研究において，積分微分方程式の解に関する定性解析において，重要な役割を果たす不動点定理やコンパクト性定理等を述べる．

「１」Schauder（シャウダー）の不動点定理 [1)p.456 2)p.26 9)p.26]

定理 2.1　(Schauder) バナッハ空間 X の部分集合 S 上の写像 $\mathcal{V}: S \to X$ は，次の条件 (1) - (4) を満たすとする．

(1) 集合 $S \subset X$ は，閉凸．

(2) $\mathcal{V}(S) \subset S$.

(3) 写像 $\mathcal{V}: S \to S$ は連続.

(4) 像 $\mathcal{V}(S) \subset X$ は相対コンパクト，すなわち，閉包 $\overline{\mathcal{V}(S)}$ はコンパクトである．

このとき，写像 $\mathcal{V}$ は S 内に少なくとも 1 つの不動点を有する．

「２」Ascoli-Arzelà（アスコリ・アルツェラ）の定理 [2)p.22 3)p.75]

記号 $\|x\|$ は，$x \in V$（線形空間）のノルムとする．

定理 2.2 関数集合 $S=\{f: I \to \boldsymbol{R}^m, f \text{ は連続}\}$（区間 $I=[a,b]$）は，次の条件 (1)，(2) を満たすとする．

(1) S は (I 上) 一様有界，すなわち，ある $M>0$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\max_I \|f(t)\| \le M \ (f \in S)$$

(2) S は (I 上) 同程度連続，すなわち，微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある正数 $\delta < \varepsilon$ が存在し，次式が成り立つ．

$$\|f(t)-f(s)\| < \varepsilon \ (f \in S,\ t,s \in I,\ |t-s|<\delta)$$

このとき，集合 $S \subset X$ は相対コンパクトである．

「３」Gronwall（グロンウォール）の不等式 [11)p.30]

定理 2.3　連続関数 $u, g: I \to \boldsymbol{R}_+$ と定数 $K \ge 0$ に関し，次式が成り立つ．

$$u(t) \le K + \int_a^t g(s)u(s)ds \ (a, t \in I)$$

このとき，$u(t) \le K e^{\int_a^t g(s)ds}$（$t \in I$）が成り立つ．

3.　積分微分方程式の解の漸近挙動

積分微分方程式

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \int_\tau^t F(t,s,x(s))ds \qquad (3.1)$$

と初期条件

$$x(\tau)=\xi \quad (\xi \in \boldsymbol{R}^m) \qquad (3.2)$$

からなる初期値問題 ((3.1),(3.2)) を考える．関数 $f(t,x): \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ と，$F(t,s,x): \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$（$t \ge s \ge 0$）は連続とする．漸近挙動性の定義を述べる [8)Chap.8]．

定義 3.1　(解の一様漸近安定性) 式 (3.1) に関し，$f(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$F(t,s,\mathbf{0})=\mathbf{0}$（$\forall t,s \in \boldsymbol{R}_+$）と仮定する．このとき，関数 $x=\mathbf{0}$ を，式 (3.1) のゼロ解といい，式 (3.1) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ が，一様漸近安定（[UAS]，Uniformly Asymptotically Stable）であるとは，次の (1)，(2) が成り立つときをいう．

(1) 式 (3.1) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は一様安定（[US]，Uniformly Stable），すなわち，任意の微小 $\varepsilon>0$ に対し，ある正数 $\delta(\varepsilon)=\delta<\varepsilon$ をとれば，任意の初期時間 $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\delta$）に対する任意の解 $x(t)=x(t;\tau,\xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ (t \ge \tau)$$

なお，解 $x(t)=x(t;\tau,\xi)$ とは，点 (τ,ξ) から出る式 (3.1) の解を意味する．

(2) 式 (3.1) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は，一様吸収的（[UA]，Uniformly Attractive），すなわち，微小な $\eta_0>0$ が存在し，任意の微小 $\varepsilon>0$（$\varepsilon<\eta_0$）に対し，ある十分大の経過定数 $T=T(\varepsilon)>0$ をとれば，任意の初期時間 $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\eta_0$）に対する任意の解 $x(t)=x(t;\tau,\xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ (t \ge \tau + T)$$

定義 3.2　(解の大域的一様漸近安定性) 条件 $f(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$F(t,s,\mathbf{0})=\mathbf{0}$（$\forall t,s \in \boldsymbol{R}_+$）と仮定する．

式 (3.1)（あるいは式 (3.1) の解）は大域的一様漸近安定性（[GUAS]，Globally Uniformly Asymptotically Stable）であるとは，次の (1) - (3) が成り立つときをいう．

(1) 式 (3.1) のゼロ解は一様安定（[US]）.

(2) 式 (3.1) は一様有界（[UB]，Uniformly Bounded），

すなわち，任意の $\alpha > 0$ に対し，十分大の $\beta > \alpha$ をとれば，任意の初期時間 $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ と任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| < \alpha$）に対する任意の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$\|x(t)\| < \beta \ (t \geq \tau)$$

(3) 式 (3.1) は大域的一様吸収的（[GUA]，Globally Uniformly Attractive），すなわち，任意の $\alpha > 0$ と任意の微小な $\varepsilon > 0$ に対し，ある経過定数 $T = T(\alpha, \varepsilon) > 0$ が存在し，任意の初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| < \alpha$）と初期時間 $\tau \geq 0$ の任意の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は，次式を満たすときをいう．

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ (t \geq \tau + T)$$

注意 3.3 大域的一様漸近安定性 [GUAS] について，一様有界性 [UB] を仮定しない定義も用いられる．その違いの解明には，今後の議論が待たれる．

定義 3.4 （ゼロ解の大域吸収性）式 (3.1) に関し，$f(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，$F(t,s,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$（$\forall t, s \in \boldsymbol{R}_+$）と仮定する．

式 (3.1) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ が，大域 (的) 吸収的（[GA]，Globally Attractive）であるとは，任意の微小 $\varepsilon > 0$，初期値 $\xi \in \boldsymbol{R}^m$，任意の初期時間 $\tau \geq 0$ と任意の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ に対し，経過時間 $T = T(\varepsilon, \xi, \tau, x(\cdot))$ が存在し，次式が満たされるときをいう．

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ (t \geq \tau + T)$$

4. 準線形積分微分方程式

本節では，Gronwall の不等式，Ascoli-Arzelà の定理，不動点定理等の応用により，準線形積分微分方程式の初期値問題

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + \int_\tau^t C(t,s)x(s)ds,\ x(\tau) = \xi \quad (4.3)$$

（$t \geq s \geq \tau \geq 0$，$\xi \in \boldsymbol{R}^m$）などの定性解析を述べる．

例 4.1 連続行列 $A_1(t) : m \times m$ からなる線形常微分方程式 $x'(t) = A_1(t)x(t)$ の基本行列を X（$X(0) = I$，単位行列 I）とする．このとき，次の結論 (I) - (III) を得る．

(I) $\|X^{-1}(t)\| \leq \|I\| e^{\int_0^t \|A_1(s)\|ds}$（$= K(t)$ とおく）（$t \geq 0$）

(II) $\|X(t)\| \leq K(t)$（$t \geq 0$）

(III) さらに，条件

$$\int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|ds \leq K_1 \ (t \geq 0)$$

を仮定し，$X(t) = I$（任意の $c > 0$，$-c \leq t \leq 0$）とすると，次式を得る．

$$\|X(t)\| \leq M(c)e^{\frac{-t}{K_1}} \ (t \geq 0)$$

証明方針 (I) 等式 $X(t)X^{-1}(t) = I$ を微分して，$X'(t)X^{-1}(t) + X(t)(\frac{d}{dt}X^{-1}(t)) = O$ より，$\frac{d}{dt}X^{-1} = -X^{-1}X'X^{-1} = -X^{-1}A_1XX^{-1} = -X^{-1}(t)A_1(t)$．これを，$[0,t]$ で積分して，$X^{-1}(t) = I - \int_0^t X^{-1}(s)A_1(s)ds$ から，$\|X^{-1}(t)\| \leq \|I\| + \int_0^t \|A_1(s)\|\|X^{-1}(s)\|ds$．Gronwall の不等式から，$\|X^{-1}(t)\| \leq \|I\|e^{\int_0^t \|A_1(s)\|ds}$ を得る．

(II) $X(t) = I + \int_0^t A_1(s)X(s)ds$ から，結論が成り立つ．

(III) 補題 4.13[2) p.70] から，次式を得る．

$$\|X(t)\| \leq M(c)e^{\frac{-t}{K_1}} \quad (t \geq 0,\ M(c) = \tfrac{\|I\|K_1}{c})．\ \Diamond$$

不動点定理等を応用して，次の例を得る．

例 4.2 準線形系初期値問題 (4.3) に関し，解は存在すれば一意的とする．任意の微小な $\varepsilon > 0$ に関して，任意の $f \in C(\boldsymbol{R}_+)$（$\|f\|_\infty \leq \varepsilon$）に対する $x'(t) = A(t, f(t))x(t)$ の基本行列を X_f（$X_f(0) = I$）とする．次の条件 (1) を仮定すると，結論 (I) を得る．

(1) 行列 $A(t,x) : m \times m$ は $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で連続．

(I) 次式が成り立つ．

$$\|X_f^{-1}(t)\| \leq \|I\|e^{\int_0^t \|A(s,f(s))\|ds} \quad (t \geq 0)$$

さらに，条件 (2) - (5) が成り立つとする．

(2) ある定数 $K > 0$ が存在し，次式が成立する．

$$\int_0^t \|X_f(t)X_f^{-1}(s)\|ds \leq K \ (t \geq 0)$$

(3) $\|X_f(t)X_f^{-1}(s)\| \leq K \ (t \geq s \geq 0)$

(4) 行列 $C(t,s) : m \times m$（$t \geq s \geq 0$）は $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で連続とする．ある正数 λ が存在し，次式が成立．

$$\int_0^t \|C(t,s)\|ds \leq \lambda \ (t \in \boldsymbol{R}_+)$$

(5) 次式が成り立つ．

$$\lambda K < 1$$

このとき，初期値問題 (4.3) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ の関し，次の結論 (II)，(III) を得る．

(II) 問題 (4.3) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は，一様安定 ([US])．

(III) 問題 (4.3) は，一様有界 ([UB])．

かつ，次の条件 (6) を仮定する．

$$(6)\ \lim_{t\to\infty} e^{-t/K} \int_0^t e^{\int_0^s \sup_{\|x\|\leq p} \|A(r,x)\|dr} ds = 0$$

このとき，結論 (IV) を得る．

(IV) 問題 (4.3) のゼロ解は，大域吸収的（[GA]）．

証明方針 (I) 例 4.1 と同様にして，

$$\|X^{-1}(t)\| \leq \|I\| + \int_0^t \|X^{-1}(s)\|\|A(s,f(s))\|ds$$

を得る．Gronwall の不等式から，

$$\|X_f^{-1}(t)\| \leq \|I\|e^{\int_0^t \|A(s,f(s))\|ds}$$

（$t \geq \tau$）．

(II) 任意の微小な $\varepsilon > 0$ に対し，正数 $\delta \leq \varepsilon$ は $\frac{K\delta}{1-K\lambda} \leq \varepsilon$ を満たすとする．任意の $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ を固定し $J_n = \{t : \tau \leq t \leq \tau + n\}$（$n = 1, 2, \cdots$），任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| \leq \delta$）を固定し，集合

$$S(n) = \{f \in C(J_n) : f(\tau) = \xi,\ \|f(t)\| \leq \varepsilon \ (t \in J_n),\ \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq k(n)|t_1 - t_2|\}$$

と定数

$$
\begin{aligned}
k(n) &= \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\le\varepsilon}\|A(t,x)\|\varepsilon \\
&+ \max_{t\ge s\ge 0, t\in J_n}\int_0^t\|C(t,s)\|ds\varepsilon
\end{aligned}
$$

を定め，$f_n\in S(n)$ とする．この f_n（$n=1,2,\cdots$）に関し，次の線形常微分方程式（Qfn）:
$x_n'(t)=A(t,f_n(t))x_n(t)+\int_\tau^t C(t,s)f_n(s)ds$ （$t\in J_n$）
を考える．解 $x_n(t)=x_n(t;\tau,\xi)$ は一意的に存在するので，写像 $\mathcal{U}:S(n)\to C(J_n)$ を，$[\mathcal{U}(f_n)](t)=x_n(t)$（$t\in J_n$）によって定める．このとき，$X_n$ を線形斉次微分方程式 $x'(t)=A(t,f_n(t))x(t)$ の基本行列（$X_n(t)=I$, $0\le t\le\tau$）として，次式が成り立つ．

$x_n(t)=X_n(t)X_n^{-1}(\tau)\xi$
$+\int_\tau^t X_n(t)X_n^{-1}(s)\int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu$ （$t\in J_n$）

よって，$\|x_n(t)\|\le K\delta+\varepsilon K\lambda=K(\delta+\varepsilon\lambda)\le\varepsilon$.

また，$x_n(t)$
$=\xi+\int_\tau^t A(s,f_n(s))x_n(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu$
（$t\in J_n$）から，$\tau\le t_1\le t_2\le\tau+n$ として，
$\|x_n(t_1)-x_n(t_2)\|\le\int_{t_1}^{t_2}\|A(s,f_n(s))\|\varepsilon ds$
$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\tau^u\|C(u,s)\|\varepsilon dsdu\le k(n)(t_2-t_1)$.
すなわち $x_n\in S(n)$ から，$\mathcal{U}(S(n))\subset S(n)$ である．集合 $S(n)\subset C(J_n)$ は，有界で閉凸で，Ascoli-Arzelà の定理から，$S(n)$（$1\le n$ は固定）はコンパクト集合．

さらに，$[\mathcal{U}(f)](t)=x_f(t)$
$=\xi+\int_\tau^t A(s,f(s))x_f(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)f(s)dsdu$
（$t\in J_n$）より，$g\in S(n)$ に関し，次式が成り立つ．
$x_g(t)=\xi+\int_\tau^t A(s,g(s))x_g(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)g(s)dsdu$
（$t\in J_n$）．
よって，$\|x_f(t)-x_g(t)\|$
$\le\int_\tau^t\|A(s,f(s))x_f(s)-A(s,g(s))x_g(s)\|ds$
$+\int_\tau^t\int_\tau^u\|C(u,s)\|\|f(s)-g(s)\|dsdu$
$\le\int_\tau^t\{\|A(s,f(s))-A(s,g(s))\|\|x_f(s)\|$
$+\|A(s,g(s))\|\|x_f(s)-x_g(s)\|\}ds$
$+\int_\tau^t\int_\tau^u\|C(u,s)\|\|f(s)-g(s)\|dsdu$
$\le\int_\tau^t\{\|A(s,f(s))-A(s,g(s))\|\varepsilon$
$+\|A(s,g(s))\|\|x_f(s)-x_g(s)\|\}ds$
$+\int_\tau^t\int_\tau^u\|C(u,s)\|dsdu\|f-g\|_\infty$.
ここで，区間 J_n において
$\|f-g\|_\infty=\max_{s\in J_n}\|f(s)-g(s)\|$,
$M_n=\max_{t\in J_n}\int_\tau^t\int_\tau^u\|C(u,s)\|dsdu$
とすると，Gronwall の不等式から，$\|x_f(t)-x_g(t)\|$
$\le\{\int_\tau^{\tau+n}\|A(s,f(s))-A(s,g(s))\|\varepsilon ds$
$+M_n\|f-g\|_\infty\}e^{\int_\tau^{\tau+n}\sup_{\|h\|_\infty\le\varepsilon}\|A(s,h(s))\|ds}$ を得る．
よって $\|f-g\|_\infty\to 0$（n は固定，$f,g\in C(J_n)$）のとき，$\max_{t\in J_n}\|[\mathcal{U}(f)](t)-[\mathcal{U}(g)](t)\|\to 0$ から，写像 $\mathcal{U}:S(n)\to S(n)$ は連続である．

Schauder の不動点定理から，ある $x_n\in S(n)$ は，$\mathcal{U}(\overline{x_n})=\overline{x_n}$
$\Leftrightarrow\ \overline{x_n}(t)=\overline{x_{\overline{x_n}}}(t)=\xi+\int_\tau^t A(s,\overline{x_n}(s))\overline{x_{\overline{x_n}}}(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)\overline{x_n}(s)dsdu$（$t\in J_n$）．
従って，問題 (4.3) は一意解 $\overline{x_n}(t)=\overline{x_n}(t;\tau,\xi)$（$t\in J_n$, $n=1,2,\cdots$）が存在する．$n=1,2,\cdots$ に対し，点列 $\{y_n\in C[\tau,\infty)\}$ を次に定義する．

$$
y_n(t)=\begin{cases}\overline{x_n}(t) & (t\in J_n)\\ \overline{x_n}(n) & (t\ge\tau+n)\end{cases}
$$

このとき，$y_n(\tau)=\xi$，$\|y_n(t)\|\le\varepsilon$（$t\ge\tau$）である．$\tau\le t_1\le t_2\le\tau+n$ のとき，
$|y_n(t_1)-y_n(t_2)|\le\int_{t_1}^{t_2}\|A(s,y_n(s))\|\varepsilon ds$
$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\tau^u\|C(u,s)\|\varepsilon dsdu\le k(n)|t_2-t_1|$（$t_1,t_2\in J_n$）
Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{y_n\in C[\tau,\infty)\}$ は，$[\tau,\infty)$ の任意のコンパクトな区間においてコンパクト集合より，部分列 $\{y_{n(p)}:p\in\boldsymbol{N}\}\subset\{y_n:n\in\boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，J の任意の有界閉集合で収束し，極限 $\lim_{p\to\infty}y_{n(p)}=x_0\in\{y_n\}$ が存在し，$x_0\in C[\tau,\infty)$ は，問題 (4.3) の解であることが示される．

ゆえに，ゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は，$\forall\varepsilon>0$, $0<\exists\delta<\varepsilon$: $\forall\tau\ge 0,\forall\xi\in\boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\delta$），$\|x(t)\|\le\varepsilon(t\ge\tau)$ より，[US] である．

(III) 結論 (II) と同様である．任意の $\alpha>0$ に対し，正数 $\beta>\alpha$ は $\frac{K\alpha}{1-K\lambda}<\beta$ を満たすとする．任意の $\tau\in\boldsymbol{R}_+$ を固定し $J_n=\{t:\tau\le t\le\tau+n\}$ （$n=1,2,\cdots$），任意の $\xi\in\boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|\le\alpha$）を固定し，集合
$B(n)=\{f\in C(J_n):f(\tau)=\xi,\|f(t)\|\le\beta$
$(t\in J_n)$，$\|f(t_1)-f(t_2)\|\le K(n)|t_1-t_2|\}$,
と定数

$$
\begin{aligned}
K(n) &= \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\le\beta}\|A(t,x)\|\beta \\
&+ \max_{t\ge s\ge 0,\ t\in J_n}\int_0^t\|C(t,s)\|\beta
\end{aligned}
$$

を定め，$f_n\in B(n)$ とする．この f_n（$n=1,2,\cdots$）に関し，次の線形常微分方程式（Qfnb）:
$x_n'(t)=A(t,f_n(t))x_n(t)+\int_\tau^t C(t,s)f_n(s)ds$ （$t\in J_n$）
を考える．解 $x_n(t)=x_n(t;\tau,\xi)$ は一意的に存在するので，写像 $\mathcal{U}:B(n)\to C(J_n)$ を，$[\mathcal{U}(f_n)](t)=x_n(t)$（$t\in J_n$）によって定める．このとき，$X_n$ を線形斉次微分方程式 $x'(t)=A(t,f_n(t))x(t)$ の基本行列（$X_n(t)=I$, $0\le t\le\tau$）として，次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= X_n(t)X_n^{-1}(\tau)\xi \\
&+ \int_\tau^t X_n(t)X_n^{-1}(s)ds\int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu
\end{aligned}
$$

（$t\in J_n$）よって，$\|x_n(t)\|\le K\alpha+\beta K\lambda=K(\alpha+\beta\lambda)\le\beta$ である．また，$x_n(t)=\xi+\int_\tau^t A(s,f_n(s))x_n(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu$（$t\in J_n$）から，$t_1$, $t_2\in J_n$ として，$\|x_n(t_1)-x_n(t_2)\|\le K(n)(t_2-t_1)$．すなわち $x_n\in B(n)$ から，$\mathcal{U}(B(n))\subset B(n)$ である．集合 $B(n)\subset C(J_n)$ は，有界で閉凸で，Ascoli-Arzelà の定理から，$B(n)$（$1\le n$ は固定）はコンパクト集合である．

また，(II) と同様に $\|f-g\|_\infty\to 0$（n は固定し，$f,g\in$

$B(n)$）のとき，$\max_{t\in J_n} \|[\mathcal{U}(f)](t)-[\mathcal{U}(g)](t)\| \to 0$ から，写像 $\mathcal{U}: S(n) \to B(n)$ は連続である．

Schauder の不動点定理から，ある $\overline{x_n} \in B(n)$ は，$\mathcal{U}(\overline{x_n}) = \overline{x_n}$
$\Leftrightarrow \overline{x_n}(t) = \overline{x_{\overline{x_n}}}(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,\overline{x_n}(s))\overline{x_n}(s)ds + \int_\tau^t \int_\tau^u C(u,s)\overline{x_n}(s)dsdu$（$t \in J_n$）．

従って，問題 (4.3) は一意解 $\overline{x_n}(t) = \overline{x_n}(t;\tau,\xi)$（$t \in J_n$，$n = 1,2,\cdots$）が存在する．$n = 1,2,\cdots$ に対し，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ を次に定義する．

$$y_n(t) = \begin{cases} \overline{x_n}(t) & (t \in J_n) \\ \overline{x_n}(n) & (t \geq \tau + n) \end{cases}$$

このとき，$y_n(\tau) = \xi$，$\|y_n(t)\| \leq \varepsilon$（$t \geq \tau$）である．$t_1 \leq t_2$ のとき，
$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \leq K(n)|t_2 - t_1|$ （t_1，$t_2 \in J_n$）．Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ は，$[\tau,\infty)$ の任意の有界閉区間上でコンパクト集合より，部分列 $\{y_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{y_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，J の任意の有界閉集合で収束し，極限 $\lim_{p\to\infty} y_{n(p)} = x_0 \in \{y_n\}$ が存在し，$x_0 \in C[\tau,\infty)$ は，問題 (4.3) の解であることが示される．

よって，$\forall\alpha > 0, \exists\beta(>\alpha) : \forall\tau \geq 0, \forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$
（$\|\xi\| < \alpha$），$\|x(t)\| \leq \beta$（$t \geq \tau$）より，問題 (4.3) は [UB] である．

(IV) 任意の $\tau \geq 0$ と任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ に対し，問題 (4.3) の一意解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ を固定し，$\|x\|_\infty \leq p$ とする．条件 (2)，(3) から行列 Y_x（$Y_x(t) = I$，$0 \leq t \leq \tau$）を，線形系 $y'(t) = A(t,x(t))y(t)$ の基本行列とすると，例 4.1 と同様にして，

$\|Y_x(t)\| \leq M(c)e^{-t/K}$（$M(c) = \frac{\|I\|K}{c}$，$c > 0$ は固定される）．

$\|Y_x^{-1}(\tau)\| \leq \|I\|e^{\int_0^\tau \sup_{\|x\|\leq p} \|A(s,x)\|ds}$
（$= M_1(\tau)$ とおく）を得る．問題 (4.3) の解は次の通り．

$$\begin{aligned} x(t) &= Y_x(t)Y_x^{-1}(\tau)\xi \\ &+ \int_\tau^t Y_x(t)Y_x^{-1}(s)\int_\tau^u C(u,s)x(s)dsdu \end{aligned}$$

（$t \geq \tau$）．問題 (4.3) は [UB] より，任意の $\alpha > 0$ とある正数 $\beta > \alpha$ に対し，$\|\xi\| < \alpha$ のとき，解 $x(t)$ は $\|x(t)\| < \beta$（$t \geq \tau$）．よって，$\|x(t)\| \leq \|Y_x(t)\|\|Y_x^{-1}(\tau)\|\alpha + \int_\tau^t \|Y_x(t)\|\|Y_x^{-1}(s)\| \int_\tau^u \|C(u,s)\|\|x(s)\|dsdu$
$\leq M(c)e^{-t/K}M_1(\tau)\alpha + M(c)e^{-t/K}\int_0^t M_1(s)\lambda\beta ds \to 0$（$t \to \infty$）から，ゼロ解は [GA] である．◇

次の例では，準線形系の初期値問題 (4.3) のゼロ解に関し，[US]，[UB]，極限 $x(\infty)$ の存在を与えている．

例 4.3 準線形系初期値問題 (4.3) では，解は存在すれば一意的とする．集合 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で連続な行列 $A: m \times m$ と連続関数 $F: \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ に関し，次の条件 (1) - (4) を仮定する．

(1) 連続関数 $p: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が存在し，次式が成立．

$\|A(t,x)\| \leq p(t)$（$(t,x) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$）

(2) $P = \displaystyle\int_0^\infty p(s)ds < \infty$

(3) 関数 $q: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ を

$$q(t) = \int_0^t \|C(t,s)\|ds \quad (t \geq 0)$$

とおき，次式が成り立つ．

$$\int_0^\infty q(s)ds = Q < \infty$$

(4) $1 - Qe^P > 0$

このとき，次の結論 (I) - (III) を得る．

(I) 初期値問題 (4.3) の解は，一様有界（[UB]）．

(II) 問題 (4.3) の任意の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は，極限 $x(\infty)$ を有する．

(III) 問題 (4.3) のゼロ解 $x = \boldsymbol{0}$ は，一様安定（[US]）．

証明方針 (I) 任意の $\alpha > 0$ に対し，正数 $\beta > \alpha$ は $\frac{e^P\alpha}{1-Qe^P} < \beta$ を満たすとする．任意の $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ を固定し $J_n = \{t : \tau \leq t \leq \tau + n\}$（$n = 1,2,\cdots$），任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| \leq \alpha$）を固定する．

集合

$B(n) = \{f \in C(J_n) : f(\tau) = \xi, \|f(t)\| \leq \beta$
（$t \in J_n$）$, \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq K(n)|t_1 - t_2|(t_1, t_2 \in J_n)\}$
と，定数

$$\begin{aligned} K(n) &= \max_{t\in J_n} \max_{\|x\|\leq\beta} \|A(t,x)\|\beta \\ &+ \max_{t\geq s\geq 0,\ t\in J_n} \int_0^t \|C(t,s)\|ds\beta \end{aligned}$$

を定め，$f_n \in B(n)$ とする．この f_n（$n = 1,2,\cdots$）に関し，次の線形常微分方程式（Qf_n）：
$x_n'(t) = A(t,f_n(t))x_n(t) + \int_\tau^t C(t,s)f_n(s)ds$（$t \in J_n$）
を考える．解 $x_n(t) = x_n(t;\tau,\xi)$ は一意的に存在するので，写像 $\mathcal{U}: B(n) \to C(J_n)$ を，$[\mathcal{U}(f_n)](t) = x_n(t)$（$t \in J_n$）によって定める．このとき，$X_n$ を線形斉次微分方程式 $x'(t) = A(t,f_n(t))x(t)$ の基本行列（$X_n(0) = I$）として，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} x_n(t) = \xi &+ \textstyle\int_\tau^t A(s,f_n(s))x_n(s)ds \\ &+ \textstyle\int_\tau^t \int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu \quad (t \in J_n). \end{aligned}$$

よって，$t \in J_n$ のとき，

$$\|x_n(t)\| \leq \alpha + \textstyle\int_\tau^t p(s)\|x_n(s)\|ds + \beta Q.$$

Gronwall の不等式から，

$$\|x_n(t)\| \leq (\alpha + \beta Q)e^{\int_\tau^t p(s)ds} \leq (\alpha + \beta Q)e^P \leq \beta.$$

また，$x_n(t)$
$= \xi + \int_\tau^t A(s,f_n(s))x_n(s)ds + \int_\tau^t \int_\tau^s C(u,s)f_n(s)duds$
（$t \in J_n$）より，$0 \leq t_1 \leq t_2$ のとき，$\|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| \leq K(n)|t_1 - t_2|$．

集合 $\{x_n : f_n \in B(n)\}$ は，J_n 上で同程度連続となる．すなわち $x_n \in B(n)$ から，$\mathcal{U}(B(n)) \subset B(n)$ である．集合 $B(n) \subset C(J_n)$ は，有界で閉凸で，Ascoli-Arzelà の定理から，$B(n)$（$1 \leq n$ は固定）はコンパクト集合である．

また，$[\mathcal{U}(h)](t) = x_h(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,h(s))x_h(s)ds + \int_\tau^t \int_\tau^u C(u,s)h(s)dsdu$（$h = f,g \in B(n)$，$t \in J_n$）

として，$\|f-g\|_\infty \to 0$（n は固定，$f,g \in B(n)$）のとき，$\max_{t\in J_n} \|[\mathcal{U}(f)](t)-[\mathcal{U}(g)](t)\| \to 0$ から，写像 $\mathcal{U}: B(n) \to B(n)$ は連続である．

Schauder の不動点定理から，ある $\overline{x_n} \in B(n)$ は，$\mathcal{U}(\overline{x_n}) = \overline{x_n}$
$\Leftrightarrow \overline{x_n}(t) = \overline{x_{\overline{x}_n}}(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,\overline{x_n}(s))\overline{x_n}(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)\overline{x_n}(s)dsdu$（$t \in J_n$）．
従って，問題 (4.3) は一意解 $\overline{x_n}(t) = \overline{x_n}(t;\tau,\xi)$（$t \in J_n$，$n=1,2,\cdots$）が存在する．$n=1,2,\cdots$ に対し，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ を次に定義する．

$$y_n(t) = \begin{cases} \overline{x_n}(t) & (t \in J_n) \\ \overline{x_n}(n) & (t \ge \tau+n) \end{cases}.$$

このとき，$y_n(\tau)=\xi$，$\|y_n(t)\| \le \beta$（$t \ge \tau$）である．$\{y_n\}$ は，$[\tau,\infty)$ の任意のコンパクト集合上で同程度連続である．Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ はコンパクト集合より，部分列 $\{y_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{y_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，J の任意の有界閉集合で収束し，極限 $\lim_{p\to\infty} y_{n(p)} = x_0 \in \{y_n\}$ が存在し，$x_0 \in C[\tau,\infty)$ は，問題 (4.3) の解であることが示される．

よって，$\forall\alpha>0, \exists\beta(>\alpha) : \forall\tau \ge 0, \forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\alpha$）, $\|x(t)\| \le \beta(t \ge \tau)$ より，問題 (4.3) は [UB] である．

(II) 解 $x(t)=x(t;\tau,\xi)$（$\|\xi\|<\alpha$，$\|x(t)\|<\beta$）の極限 $x(\infty)$ の存在を示す．$t_2 \ge t_1 \ge \tau$ とする．
$\|x(t_2)-x(t_1)\|$
$\le \int_{t_1}^{t_2}\|A(s,x(s))\|\|x(s)\|ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_\tau^u\|C(u,s)\|\|x(s)\|duds$
$\le \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds\beta + \int_{t_1}^{t_2} q(s)ds\beta \to 0$ （$t_1 \to \infty$）より，$\lim_{t\to\infty} x(t)$ は存在する．

(III) (I) と同様．任意の $\varepsilon>0$ に対し，正数 $\delta \le \varepsilon$ は $\frac{e^P\delta}{1-Qe^P} \le \varepsilon$ を満たすとする．任意の $\tau \in \boldsymbol{R}_+$ を固定し $J_n = \{t : \tau \le t \le \tau+n\}$ （$n=1,2,\cdots$），任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\delta$）を固定し，集合
$S(n) = \{f \in C(J_n) : f(\tau)=\xi, \|f(t)\| \le \varepsilon$
$(t \in J_n), \|f(t_1)-f(t_2)\| \le k(n)|t_1-t_2|$ $(t_1,t_2 \in J_n)$ $\}$
と定数

$$\begin{aligned} k(n) &= \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\le\varepsilon} \|A(t,x)\|\varepsilon \\ &+ \max_{t\ge s\ge 0,\, t\in J_n} \int_0^t \|C(t,s)\|ds\varepsilon \end{aligned}$$

を定め，$f_n \in S(n)$ とする．この f_n（$n=1,2,\cdots$）に関し，次の線形常微分方程式 (Qf_n)：
$x_n'(t) = A(t,f_n(t))x_n(t) + \int_\tau^t C(t,s)f_n(s)ds$（$t \in J_n$）
を考える．解 $x_n(t) = x_n(t;\tau,\xi)$ は一意的に存在するので，写像 $\mathcal{U}: S(n) \to C(J_n)$ を，$[\mathcal{U}(f_n)](t) = x_n(t)$（$t \in J_n$）によって定める．このとき，$X_n$ を線形斉次微分方程式 $x'(t) = A(t,f_n(t))x(t)$ の基本行列（$X_n(\tau)=I$）として，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} x_n(t) = \xi &+ \int_\tau^t A(s,f_n(s))x_n(s)ds \\ &+ \int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)f_n(s)dsdu \quad (t \in J_n) \end{aligned}$$

よって，$t \in J_n$ のとき，$\|x_n(t)\| \le \delta + \int_\tau^t p(s)\|x_n(s)\|ds + \varepsilon Q$ から，Gronwall の不等式から，$\|x_n(t)\| \le (\delta+\varepsilon Q)e^{\int_\tau^t p(s)ds} \le (\delta+\varepsilon Q)e^P \le \varepsilon$.
また，$\|x_n(t_1)-x_n(t_2)\| \le k(n)|t_1-t_2|$（$t_1,t_2 \in J_n$）から，集合 $\{x_n \in C(J_n) : f_n \in S(n)\}$ は，区間 J_n 上で同程度連続である．すなわち $x_n \in S(n)$ から，$\mathcal{U}(S(n)) \subset S(n)$ である．集合 $S(n) \subset C(J_n)$ は，有界で閉凸で，Ascoli-Arzelà の定理から，$S(n)$（$1 \le n$ は固定）はコンパクト集合である．

また，$h=f,g \in S(n)$ につき，

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}(h)](t) = x_h(t) = \xi &+ \int_\tau^t A(s,h(s))x_h(s)ds \\ &+ \int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)h(s)dsdu \quad (t \in J_n) \end{aligned}$$

より $\|f-g\|_\infty \to 0$（n は固定，$f,g \in S(n)$）のとき，$\max_{t\in J_n} \|[\mathcal{U}(f)](t)-[\mathcal{U}(g)](t)\| \to 0$ から，写像 $\mathcal{U}: S(n) \to S(n)$ は連続である．

Schauder の不動点定理から，ある $\overline{x_n} \in S(n)$ は，$\mathcal{U}(\overline{x_n}) = \overline{x_n}$
$\Leftrightarrow \overline{x_n}(t) = \overline{x_{\overline{x}_n}}(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,\overline{x_n}(s))\overline{x_{\overline{x}_n}}(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u C(u,s)\overline{x_n}(s)dsdu$（$t \in J_n$）．
従って，問題 (4.3) は一意解 $\overline{x_n}(t) = \overline{x_n}(t;\tau,\xi)$（$t \in J_n$，$n=1,2,\cdots$）が存在する．$n=1,2,\cdots$ に対し，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ を次に定義する．

$$y_n(t) = \begin{cases} \overline{x_n}(t) & (t \in J_n) \\ \overline{x_n}(n) & (t \ge \tau+n) \end{cases}.$$

このとき，$y_n(\tau)=\xi$，$\|y_n(t)\| \le \varepsilon$（$t \ge \tau$）である．また，区間 $[\tau,\infty)$ の任意のコンパクト集合上で $\{y_n\}$ は同程度連続である．Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{y_n \in C[\tau,\infty)\}$ は，区間 $[\tau,\infty)$ の任意のコンパクト集合上でコンパクト集合より，部分列 $\{y_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{y_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，J の任意の有界閉集合で収束し，極限 $\lim_{p\to\infty} y_{n(p)} = x_0 \in \{y_n\}$ が存在し，$x_0 \in C[\tau,\infty)$ は，問題 (4.3) の解であることが示される．よって，$\forall\varepsilon>0, 0<\exists\delta(<\varepsilon) : \forall\tau \ge 0, \forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\|<\delta$）, $\|x(t)\| \le \varepsilon(t \ge \tau)$ より，問題 (4.3) は [US] である．◊

次の例では，非線形の摂動項を有する準線形系初期値問題の漸近挙動性を述べる．

$$x'(t) = A(t,x(t))x(t) + \int_\tau^t F(t,s,x(t))ds,\ x(\tau)=\xi \quad (4.4)$$

集合 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で行列 $A : m \times m$ は連続，関数 $F(t,s,x) : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$（$t \ge s$）は連続とし，$t \ge s \ge \tau \ge 0$，$x(t) \in \boldsymbol{R}^m$ とする．

例 4.4 準線形系問題 (4.4) に関し，解は存在すれば一意的とする．連続な行列 $A(t,x) : m \times m$ と連続関数 $F(t,s,x)$（$t \ge s$）はそれぞれ，x に関し Lipschitz 連続であるとする．次の条件 (1) - (5) を仮定する．記号 T は転置を意味する．$\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルム．

(1) 定数 $\sigma_1 \ge 0$，$r>0$ が存在し，$x^TA(t,x)x \le 0$（$t \ge \sigma_1$，$x \in B_r = \{\|x\|<r\}$）とする．このとき，

$A_1(t,x)=\frac{A(t,x)+A(t,x)^T}{2}$ として，次の条件が成り立つ．

$x^TA_1(t,x)x\le 0$（$t\ge\sigma_1$，$x\in B_r$）

(2) 連続関数 $q:\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}_+$ と定数 $Q\ge 0$ が存在し，任意の $k\in[0,r]$ につき，次式が成り立つ．

$$\int_0^t \sup_{\|x\|\le k}\|F(t,s,x)\|ds\le q(t)k\ (0\le s\le t),$$

かつ $\int_0^\infty q(u)du\le Q$

(3) (2) の k について，関数 $p_k(t):[0,\sigma_1]\to\boldsymbol{R}_+$（$0\le k<r$）は

$$p_k(t)=\max\{\|A(t,x)\|:\|x\|\le k\},$$
$$P_1=\int_0^{\sigma_1}p_k(s)ds$$

とし，次式が成り立つ．

$$2P_1+2Q<1$$

(4) 正数 $\sigma_2\ge\sigma_1$ が存在し，任意の微小な $\varepsilon>0$ に対し，次式が成り立つ．

$$q(t)\le\inf_{\|x\|\le\varepsilon}\frac{\|A(t,x)\|\log(\|x\|+1)}{\varepsilon}\ (t\ge\sigma_2)$$

(5) 定数 $\alpha>0$ と $\beta\in\boldsymbol{R}$ が存在し，任意の $k\in[0,r]$ に関し，次式が成り立つ．

$$\int_\tau^t\inf_{\|x\|\le k}\|A(s,x)\|ds\ge\alpha(t-\tau)+\beta\ (t\ge\tau)$$

このとき，問題 (4.4) のゼロ解 $x=\mathbf{0}$ は，一様漸近安定（[UAS]）である．

証明 まず，ゼロ解の [US] を示す．任意の微小な正数 $\varepsilon<r$ に対し，正数 $\delta<\varepsilon$ は，次の 2 式を満たすとする．

$$\frac{Q+\sqrt{Q^2+(1-2P_1)(\delta/\varepsilon)^2}}{1-2P_1}<1,\ Q+\sqrt{Q^2+(\delta/\varepsilon)^2}<1$$

任意の $\tau\ge 0$ とする．整数 $n>\tau$ に対し，区間 $J_n=[0,n]$，集合

$$S(n)=\{f\in C(J_n):f(\tau)=\xi,\|f(t)\|\le\varepsilon(t\in J_n),$$
$$\|f(t_1)-f(t_2)\|\le k(n)|t_1-t_2|\ (t_1,t_2\in J_n),$$
$$f(t)=f(\tau)\ (t\in[0,\tau])\}$$

と，定数

$$k(n)=\max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\le\varepsilon}\|A(t,x)\|\varepsilon+\int_0^n q(s)ds\varepsilon$$

を定める．整数 $n>\tau$ を固定し，$f\in C(J_n)$ とし，次の線形系問題 (Qf)：

$x'(t)=A(t,f(t))x(t)+\int_\tau^t F(t,s,f(s))ds,\ x(\tau)=\xi$

を考え，その一意解 x_f が存在する．以後 $x=x_f$ とおく．内積

$$(x(t),x'(t))=x(t)^Tx'(t)$$
$$=x(t)^T\{A(t,f(t))x(t)+\int_\tau^t F(t,s,f(s))ds\}$$
$$=x(t)^TA(t,f(t))x(t)+x(t)^T\int_\tau^t F(t,s,f(s))ds$$

である．よって，$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2=(x',x)+(x,x')$ $=(Ax+\int_\tau^t Fds)^Tx+x^T(Ax+\int_\tau^t Fds)=2x^TA_1x+2x^T\int_\tau^t Fds$ を得る．区間 $[\tau,t]$ で積分し，

$$\|x(t)\|^2-\|\xi\|^2$$
$$=2\int_\tau^t x(s)^TA_1(s,f(s))x(s)ds$$
$$+2\int_\tau^t x(u)^T\int_\tau^u F(u,s,f(s))dsdu$$
$$=2\int_\tau^{\sigma_1}x(s)^TA_1(s,f(s))x(s)ds$$
$$+2\int_{\sigma_1}^t x(s)^TA_1(s,f(s))x(s)ds$$
$$+2\int_\tau^t x(u)^T\int_\tau^u F(u,s,f(s))dsdu.$$

次の場合に分ける．

(i) $\tau\le\sigma_1$，(ii) $\tau\ge\sigma_1$．

場合 (i) のとき，$\|x(t)\|^2$

$$\le\|\xi\|^2\quad+2\int_\tau^{\sigma_1}\|x(s)^T\|\|A_1(s,f(s))\|\|x(s)\|ds$$
$$+2\int_\tau^t\|x(u)^T\|\int_\tau^u\|F(u,s,f(s))\|dsdu$$
$$\le\|\xi\|^2+2\int_0^{\sigma_1}\|x(s)\|^2p_\varepsilon(s)ds+2\int_0^t\|x(u)\|q(u)\varepsilon du.$$

ここで，$M(n)=\max_{t\in J_n}\|x(t)\|=M$ とおくと，

$\|x(t)\|^2\le\delta^2+2M^2\int_0^{\sigma_1}p_\varepsilon(s)ds+2MQ\varepsilon$ より，

$$M^2\le\delta^2+2M^2\int_0^{\sigma_1}p_\varepsilon(s)ds+2MQ\varepsilon$$

$\Leftrightarrow M^2(1-2P_1)-2MQ\varepsilon-\delta^2\le 0.$

$M>0$ より，

$M\le\frac{Q\varepsilon+\sqrt{Q^2\varepsilon^2+(1-2P_1)\delta^2}}{1-2P_1}=\varepsilon\frac{Q+\sqrt{Q^2+(1-2P_1)(\delta/\varepsilon)^2}}{1-2P_1}$

$<\varepsilon$ を得る．ゆえに，$\|x(t)\|\le M\le\varepsilon$（$t\in J_n$）．

場合 (ii) のとき，条件 (1) から $\|x(t)\|^2\le\|\xi\|^2+2MQ\varepsilon$．よって $M^2\le\delta^2+2MQ\varepsilon$．$M>0$ より，

$M\le Q\varepsilon+\sqrt{Q^2\varepsilon^2+\delta^2}=\varepsilon(Q+\sqrt{Q^2+(\delta/\varepsilon)^2})\le\varepsilon$ で，$\|x(t)\|\le\varepsilon$（$t\in J_n$）を得る．

また，$0\le t_1\le t_2\le n$ のとき，

$$\|x(t_1)-x(t_2)\|$$
$$\le\int_{t_1}^{t_2}\|A(s,f(s))\|\|x(s)\|ds$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^u\sup_{\|x\|\le\varepsilon}\|F(u,s,f(s))\|dsdu\le k(n)|t_1-t_2|.$$

線形系問題 (Qf) の一意解 x_f から，写像 $\mathcal{U}:S(n)\to C(J_n)$ を，$f_n\in S(n)$ に対し，$[\mathcal{U}(f_n)](t)=x_{f_n}(t)$（$t\in J_n$）によって定める．集合 $\mathcal{U}(S(n))$ は，一様有界で，区間 J_n 上で同程度連続，$f_n(\tau)=\xi$ である．$x_{f_n}(t)=\xi$（$t\in[0,\tau]$）とおけば，$x_{f_n}\in S(n)$ より，$\mathcal{U}(S(n))\subset S(n)$ である．集合 $S(n)\subset C(J_n)$ は，有界で閉凸で，Ascoli-Arzelà の定理から，$S(n)$（$\tau\le n$ は固定）はコンパクト集合である．

また，$[\mathcal{U}(f_n)](t)=x_{f_n}(t)$

$=\xi+\int_\tau^t A(s,f_n(s))x_{f_n}(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,f_n(s))dsdu$（$t\in J_n$）より $g_n\in S(n)$ に関し，$\|f_n-g_n\|_\infty\to 0$（n は固定）のとき，$\max_{t\in J_n}\|[\mathcal{U}(f_n)](t)-[\mathcal{U}(g_n)](t)\|\to 0$ から，写像 $\mathcal{U}:S(n)\to S(n)$ は連続である．

Schauder の不動点定理から，ある $x_n\in S(n)$ は，$\mathcal{U}(x_n)=x_n$

$\Leftrightarrow x_n(t)=x_{x_n}(t)=\xi+\int_\tau^t A(s,x_n(s))x_{x_n}(s)ds+\int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,x_n(s))dsdu$（$t\in J_n$）．

従って，問題 (4.4) は一意解 $x_n(t)=x_n(t;\tau,\xi)$（$t\in J_n$，$n\ge\tau$）が存在する．$n\ge\tau$ に対し，点列 $\{y_n\in C[\tau,\infty)\}$ を次に定義する．

$$y_n(t)=\begin{cases}x_n(t) & (t\in J_n)\\ x_n(n) & (t\ge n)\end{cases}$$

このとき，$y_n(\tau)=\xi$，$\|y_n(t)\|\le\varepsilon$（$t\ge\tau$）である．また，区間 $[\tau,\infty)$ の任意のコンパクト集合上で $\{y_n\}$ は同程度連続である．Ascoli-Arzelà の定理から，点列 $\{y_n\in C[\tau,\infty)\}$ は，区間 $[\tau,\infty)$ の任意のコンパクト集

合上でコンパクト集合より，部分列 $\{y_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{y_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，$[\tau, \infty)$ の任意の有界閉集合で収束し，極限 $\lim_{p\to\infty} y_{n(p)} = x_0 \in \{y_n\}$ が存在し，$x_0 \in C[\tau, \infty)$ は，問題 (4.4) の解であることが示される．

よって，$\forall\varepsilon > 0, 0 < \exists\delta(< \varepsilon) : \forall\tau \geq 0, \forall\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| < \delta$），$\|x(t)\| \leq \varepsilon(t \geq \tau)$ より，問題 (4.4) は [US] である．

次に，ゼロ解の [UA] を示す．[US] から，微小な $0 < \varepsilon < r$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ が存在し，解 $x(t) = x(t; \tau, \xi)$（$\tau \geq 0$，$\|\xi\| < \delta$）は，条件 (4) から，$\|x(t)\| \leq \varepsilon$（$t \geq \tau$）のとき，次式が成り立つ．

$$\varepsilon q(t) \leq \|A(t, x(t))\| \log(\|x(t)\| + 1) \quad (t \geq \sigma_2)$$

次の補助関数を用いる．

$$V(t, x) = e^{-\int_0^t \|A(s,x)\|ds} \log(\|x\| + 1)$$

このとき，$\|x\| \leq \varepsilon < 1$ から，

$e^{-\int_0^\infty \|A(s,x)\|ds} \log(\|x\| + 1) \leq V(t, x) \leq \log(\|x\| + 1)$ $\leq \|x\|$ より，$b = \int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(s, x)\|ds$ とおくと，次式を得る．

$$e^{-b} \log(\|x\| + 1) \leq V(t, x) \leq \|x\|.$$

$B(t) = \int_0^t \|A(s, x(s))\|ds$ とおき $V(t, x(t))$ を微分して，

$$V'(t, x(t)) = -\|A(t, x(t))\|e^{-B(t)} \log(\|x(t)\| + 1) + e^{-B(t)} \frac{\sum_{i=1}^m x_i(t)x_i'(t)}{\|x(t)\|+1}$$

から

$V'(t, x(t)) = e^{-B(t)}\{-\|A(t, x(t))\| \log(\|x(t)\| + 1) + \frac{x^T(Ax+\int_\tau^t Fds)}{\|x(t)\|+1}\}$

$\leq e^{-B(t)}\{-\|A\| \log(\|x(t)\| + 1) + \int_0^t \|F\|ds\}$（条件 (1) より）

$\leq e^{-B(t)}\{-\|A(t, x(t))\| \log(\|x(t)\| + 1) + q(t)\varepsilon\} \leq 0$（$t \geq \sigma_2$）．よって，$V(t, x(t))$ は $t \geq T_2$ で単調減少．また $V(t, x(t)) \geq 0$ より，極限

$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t)) = e^{-\int_0^\infty \|A(s,x(s))\|ds} \log(\|x(\infty)\| + 1)$ ≥ 0 が存在する．$\log(\|x(t)\| + 1) \leq \log(2\varepsilon + 1)$ と条件 (5) から，$0 \leq \lim_{t\to\infty} V(t, x(t)) \leq \lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t(\alpha s+\beta)ds} \log(2\varepsilon + 1) = 0$，すなわち，$\tau \geq 0$ につき一様に $\|x(\infty)\| = 0$ より，ゼロ解は [UA] である．以上から，ゼロ解は [UAS] である．♢

文献 [Sa1] では，ゼロ解が一様漸近安定である線形系

$$x'(t) = B(t)x(t) \tag{4.5}$$

に，ある意味で近い準線形系常微分方程式の初期値問題

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + F(t, x(t))ds, \ x(\tau) = \xi$$

のゼロ解に関する一様漸近安定性定理を与えている．$\tau \in \boldsymbol{R}_+$，$\xi \in \boldsymbol{R}^m$ とする．

次の準線形積分微分方程式を考え，線形系 (4.5) にある意味で近いとする．

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + \int_\tau^t F(t, s, x(s))ds, \ x(\tau) = \xi \tag{4.6}$$

行列 $B : m \times m, A : m \times m$ と関数 F はそれぞれ，$\boldsymbol{R}_+$，$\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^m$ 上で連続とする．

例 4.5 次の条件 (1) - (4) を仮定する．

(1) 線形系 (4.5) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は一様漸近安定（[UAS]）である．

(2) ある $\delta > 0$ が存在し，任意の $r > 0$ に関し，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq r} \|A(s, x) - B(s)\|ds < \delta$$

(3) 定数 $K > 0$ は補題 4.6 の述べられる．定数 $C > 0$ が存在し，次の条件 (3a) - (3c) が成り立つ．

(3a) $F(t, s, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ とする．連続関数 $q : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ は，

$$\int_0^t \|F(t, s, x)\|ds \leq q(t, x) \quad (t \geq s \geq 0,\ x \in \boldsymbol{R}^m)$$

を満たし，次式が成り立つ．

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq r} q(s, x)ds < C$$

(3b) 次式が成り立つ．

$$\liminf_{r\to+0} \frac{1}{r} \int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq r} q(s, x)ds < C$$

(3c) $CKe^{K\delta} < 1$

(4) 問題 (4.6) の解は存在すれば，一意的と仮定する．

このとき，準線形系 (4.6) のゼロ解 $x = \mathbf{0}$ は，大域的一様漸近安定（[GUAS]）である．

補題 4.6[11)p.140]，補題 4.7 は，例 4.5 を証明するのに重要な役割を果たす．

補題 4.6 例 4.5 条件 (1) より線形系 (4.5) に関し，ある定数 $K > 0$ と $c > 0$ が存在し，その基本行列を X_B（$X_B(0) = I$）とすると，次式が成り立つ．

$$\|X_B(t)X_B^{-1}(s)\| \leq Ke^{-c(t-s)} \quad (t \geq s \geq 0)$$

補題 4.7 例 4.5 条件 (1) - (2) を仮定する．任意の $r \geq 0$ と任意の $f \in C(\boldsymbol{R}_+)$（$\|f\|_\infty \leq r$）につき，線形方程式

$$x'(t) = A(t, f(t))x(t) \tag{4.7}$$

の基本行列を X_f（$X_f(0) = I$）とすると，次式が成立．

$$\|X_f(t)X_f^{-1}(\tau)\| \leq Ke^{K\delta-c(t-\tau)} \quad (t \geq \tau \geq 0)$$

正定数 K, c は，補題 4.6 と等しい．

例 4.5 の証明 例 4.5 の前提条件の下で，準線形系問題 (4.6) の解に関し，一様有界性（[UB]）を示す．任意の $\alpha > 0$ に対し，

$$\beta > \alpha\frac{1+Ke^{K\delta}}{1-KCe^{k\delta}} > \alpha\frac{Ke^{K\delta}}{1-KCe^{k\delta}},$$

かつ，条件 (3a) より $\beta > 0$ は次式を満たすとする．

$\int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq\beta} q(s,x)ds \leq \beta C$

任意$\tau \geq 0$，任意の$\|\xi\| \leq \alpha$, 任意の$n \geq \tau$，$J_n = [0,n]$を固定し，次の定数$K(n)$と関数集合$B(n)$を定める．

$$K(n) = \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\leq\beta} \|A(t,x)\|\beta + \int_0^n \max_{\|x\|\leq\beta} q(s,x)ds,$$

$B(n) = \{f \in C(J_n) : f$ は条件(i) - (iv) を満たす $\}$.

(i) $f(\tau) = \xi$

(ii) $\|f(t)\| \leq \beta$（$t \in J_n$）

(iii) $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq K(n)|t_1 - t_2|$（$t_1, t_2 \in J_n$）

(iv) $f(t) = f(\tau)$（$t \in [0,\tau]$）

このとき，$B(n) \subset C(J_n)$ は一様有界で，同程度連続な閉凸集合で，Ascoli-Arzelà の定理よりコンパクトである．

関数$f \in B(n)$に対し，次の線形非斉次初期値問題を考える．

$$x'(t) = A(t,f(t))x(t) + \int_\tau^t F(t,s,f(s))ds,\ x(\tau) = \xi \quad (4.8)$$

線形系問題 (4.8) の一意解x_fは次式で与えられる．

$$x_f(t) = X_f(t)X_f^{-1}(\tau)\xi + \int_\tau^t X_f(t)\int_\tau^u X_f^{-1}(u)F(u,s,f(s))dsdu$$

条件から

$\|x_f(t)\| \leq Ke^{K\delta}\alpha + Ke^{K\delta}\int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq\beta} q(s,f(s))ds$
$\leq Ke^{K\delta}\alpha + Ke^{K\delta}\beta C \leq \beta$（$t \in J_n$）．

また，式 (4.9) の解x_fは，

$x_f(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,f(s))x_f(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,f(s))dsdu$

を満たすから，$\|x_f(t_1) - x_f(t_2)\| \leq K(n)|t_1 - t_2|$（$t_1, t_2 \in J_n$）．$x_f(t) = \xi$（$t \in [0,\tau]$）とすると，$x_f \in B(n)$（$f \in B(n)$）．ここで，次式の写像$\mathcal{U}$を定める．

$\mathcal{U} : B(n) \to B(n)$, $\mathcal{U}(f) = x_f$

例 4.3 の証明と同様にして，$\mathcal{U}$は$B(n)$上で連続であることが示される．Schauder の不動点定理から，少なくとも 1 つの不動点$x \in B(n)$（$x = \mathcal{U}(x)$），すなわち

$x(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,x(s))x(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,f(s))dsdu$

（$t \in J_n$）が成り立つ．

条件 (2) から，問題 (4.6) の解$x(t) = x(t;\tau,\xi)$（$t \in J_n$）は唯一的である．次の条件 (ア) - (ウ) を満たす解の点列$\{x_n \in C[\tau,\infty) : n \in \boldsymbol{N}\}$を定める．

(ア) $x_n \in B(n)$（$n \in \boldsymbol{N}$）

(イ) $x_n(t)$ は，$t \in J_n$ のとき問題 (4.6) の解

(ウ) $x_n(t) = x_n(n)$（$t \geq n$）

点列$\{x_n \in C[\tau,\infty) : n \in \boldsymbol{N}\}$は，$J = [\tau,\infty)$で一様有界で，かつ，$J$の任意の有界閉集合上で同程度連続であるから$\{x_n\}$は，$J$の任意のコンパクト集合上でコンパクトとなる．Ascoli-Arzelà の定理より，部分列$\{x_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$が存在し，その部分列は，$J$の任意の有界閉集合で収束し，その極限$x$は問題 (4.6) の一意解$x(t) = x(t;\tau,\xi)$である．その構成から，任意の$\alpha > 0$に対しある$\beta > \alpha$をとれば，任意の$\tau \geq 0$と任意の$\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| \leq \alpha$）の解$x(t) = x(t;\tau,\xi)$は，$\|x(t)\| \leq \beta$（$t \geq \tau$）を満たすから，問題 (4.6) の解は一様有界である．

問題 (4.6) のゼロ解の一様安定性を示す．任意の微小な$\eta > 0$に対し，正数$\eta_1 < \eta$を次の不等式を満たすように定める．

$\frac{Ke^{K\delta}\eta_1}{1-KCe^{K\delta}} < \eta$

任意の$\tau \geq 0$，任意の$\xi \in \boldsymbol{R}^m$（$\|\xi\| < \eta_1$），任意に自然数$n \geq \tau$を固定する．$J_n = [0,n]$であり，次の関数$k(n)$と関数集合$S(n)$を定める．

$$k(n) = \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\leq\eta} \|A(s,x)\|\eta + \max_{t\in J_n}\max_{\|x\|\leq\eta} q(t,x),$$

$S(n) = \{f \in C(J_n) : f$ は条件 (i) - (iv) を満たす $\}$.

(i) $f(\tau) = \xi$

(ii) $\|f(t)\| \leq \eta$（$t \in J_n$）

(iii) $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq k(n)|t_1 - t_2|$（$t_1, t_2 \in J_n$）

(iv) $f(t) = f(\tau)$（$t \in [0,\tau]$）

このとき，$S(n) \subset C(J_n)$ は有界で，同程度連続な閉凸集合で，Ascoli-Arzelà の定理よりコンパクトである．

関数$f \in S(n)$に対し，次の線形非斉次初期値問題を考える．

$$x'(t) = A(t,f(t))x(t) + \int_\tau^t F(t,s,f(s))ds,\ x(\tau) = \xi \quad (4.9)$$

問題 (4.9) の一意解x_fは次式で与えられる．

$$x_f(t) = X_f(t)X_f^{-1}(\tau)\xi + \int_\tau^t X_f(t)\int_s^t X_f^{-1}(u)F(u,s,f(s))duds$$

条件から

$\|x_f(t)\| \leq Ke^{K\delta}\eta_1 + Ke^{K\delta}\int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq\eta} q(s,f(s))ds$
$\leq Ke^{K\delta}\eta_1 + Ke^{K\delta}\eta C \leq \eta$（$t \in J_n$）．また，問題 (4.9) の解$x_f$は，

$$x_f(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,f(s))x_f(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,f(s))dsdu$$

より，$\|x_f(t_1) - x_f(t_2)\| \leq k(n)|t_1 - t_2|$（$t_1, t_2 \in J_n$）．ゆえに，$x_f \in S(n)$（$f \in S(n)$）．ここで，次式の写像$\mathcal{U}$を定める．

$\mathcal{U} : S(n) \to S(n)$, $\mathcal{U}(f) = x_f$

例 4.3 の証明と同様にして，$\mathcal{U}$は$S(n)$上で連続であることが示される．Schauder の不動点定理から，少なくとも 1 つの不動点$x \in S(n)$（$x = \mathcal{U}(x)$），すなわち

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t A(s,x(s))x(s)ds + \int_\tau^t\int_\tau^u F(u,s,x(s))dsdu$$

($t \in J_n$) が成り立つ.
条件 (2) から，問題 (4.6) の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ ($t \in J_n$) は唯一的である．次の条件 (ア) - (ウ) を満たす解の点列 $\{x_n \in C[\tau,\infty) : n \in \boldsymbol{N}\}$ を定める.

(ア) $x_n \in S(n)$ ($n \in \boldsymbol{N}$)

(イ) $x_n(t)$ は，$t \in J_n$ のとき問題 (4.6) の解

(ウ) $x_n(t) = x_n(n)$ ($t \geq n$)

点列 $\{x_n \in C[\tau,\infty) : n \in \boldsymbol{N}\}$ は，$J = [\tau,\infty)$ で一様有界で，かつ，J の任意の有界閉集合上で同程度連続であるから，$\{x_n\}$ は J の任意のコンパクト集合上でコンパクトとなる．Ascoli-Arzelà の定理より，部分列 $\{x_{n(p)} : p \in \boldsymbol{N}\} \subset \{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ が存在し，その部分列は，J の任意の有界閉集合で収束し，その極限 x は問題 (4.6) の一意解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ である．その構成から，任意の $\eta > 0$ に対しある $\eta_1 < \eta$ をとれば，任意の $\tau \geq 0$ と任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ ($\|\xi\| \leq \eta_1$) の解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は，$\|x(t)\| \leq \eta$ ($t \geq \tau$) を満たすから，問題 (4.6) の解は一様安定である.

ゼロ解の大域的一様吸収性を示す．[UB] より，任意の微小 $\varepsilon > 0$ に対し，十分小の正数

$$\eta = \eta(\varepsilon) < \varepsilon_1 < \varepsilon \quad (\varepsilon_1 \text{ は後述})$$

をとれば，任意の $\tau \geq 0$，任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ ($\|\xi\| < \eta$) に対し解は $\|x(t)\| < \varepsilon$ ($t \geq \tau$) である．準線形系 (4.6) $x'(t) = B(t)x + \{A(t,x) - B(t)\}x + \int_\tau^t F(t,s,x(s))ds$ の一意解 $x(t) = x(t;\tau,\xi)$ は，次式を満たす.

$$x(t) = X_B(t)X_B^{-1}(\tau)\xi + \int_\tau^t X_B(t)X_B^{-1}(s)\{A(s,x(s)) - B(s)\}x(s)ds + \int_\tau^t X_B(t)\int_s^t X_B^{-1}(s)F(u,s,x(s))duds.$$

よって，$\|x(t)\| \leq \|X_B(t)X_B^{-1}(\tau)\|\|\xi\| + \int_\tau^t \|X_B(t)X_B^{-1}(s)\|\|A(s,x(s)) - B(s)\|\|x(s)\|ds + \int_\tau^t \|X_B(t)X_B^{-1}(s)\|\int_s^t \|F(u,s,x(s))\|duds$．補題 4.6 と, 条件 (3) から，正数 $\varepsilon_1 < \varepsilon$ が存在して

$$0 < \frac{KC\varepsilon_1}{c} < \frac{\varepsilon}{2e^{K\delta}},\ \int_0^\infty \sup_{\|x\|\leq\varepsilon_1} q(s,x)ds < \varepsilon_1 C$$

が成り立つとしてよいから，十分大の $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ をとれば，$t \geq \tau + T_1$ のとき，$\|X_B(t)X_B^{-1}(\tau)\|\eta \leq \frac{\varepsilon}{2e^{K\delta}}$，かつ $\int_\tau^t\int_s^t \|X_B(t)X_B^{-1}(s)\|\|F(u,s,x(s))\|duds \leq K\int_\tau^t e^{-c(t-s)}\sup_{\|x\|\leq\varepsilon_1} q(s,x)ds \leq \frac{KC\varepsilon_1}{c} < \frac{\varepsilon}{2e^{k\delta}}$.
ゆえに，$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2e^{K\delta}} + K\int_\tau^t \|A(s,x(s)) - B(s)\|\|x(s)\|ds + \frac{\varepsilon}{2e^{K\delta}}$.
Gronwall の不等式から，
$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{e^{K\delta}}e^{\int_\tau^t K\|A(s,x(s))-B(s)\|ds} \leq \varepsilon$ ($t \geq \tau + T_1$).
従ってゼロ解は，[GUA]，よって [GUAS] である．◊

5. おわりに

本研究では，準線形積分微分方程式の初期値問題

$$x'(t) = A(t,x(t))x(t) + \int_\tau^t F(t,s,x(s))ds,\ x(\tau) = \xi$$

に関し，不動点定理やアスコリ・アルツェラの定理等を応用して，解の定性解析（一様安定性，一様有界性等）の結果を得ている.

参考文献

1) N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I*, (Wiley-Interscience Publ., New York, 1964), p.456.
2) A. G. Kartsatos, *Advanced Ordinary Differential Equations*, (Mariner Publ. Comp., Florida, 1980), pp. 22, 26, 70.
3) 河田敬義，三村征雄，現代数学序説 II（岩波書店，東京，1965)，p. 75.
4) 齋藤誠慈，数理モデル入門（裳華房，東京，2020）.
5) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 I -常微分方程式の境界値問題と準線形常微分方程式の安定性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[1]，pp. 34 - 40（2023）.
6) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 II -常微分方程式の漸近同値性-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[1]，pp.41- 49（2023）.
7) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の定性解析 III -準線形差分方程式と修正ニコルソン･ベイリーモデル-，同志社大学ハリス理化学研究報告，**64**[2]，pp. 49 - 56（2023）.
8) 齋藤誠慈，不動点定理による方程式の安定性解析（森北出版，東京，2023 年出版予定）,8 章.
9) D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, (Cambridge Univ. Press, London, 1974), p. 26.
10) T. A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, (Academic Press Inc., New York, 1985).
11) 山本稔，常微分方程式の安定性（実教出版，東京，1979)，pp. 30，140.