ローン担保証券市場と金融政策

丸　茂　俊　彦

はじめに

今回の金融危機の原因の1つは，2000年以降のFRBによる金融緩和政策が資産価格バブルを生み出し，金融資産の中でもとりわけサブプライム・ローンに代表される高リスクのローン債権を裏付けとして発行されたローン担保証券の市場価格のバブルが起きたことである[1]。

2000年代のFRBによる金融政策は，FFレートの誘導目標をITバブル崩壊直後の2000年の6％台半ばのピークの水準から2003年には1％にまで引き下げた金融緩和期，2004年半ばから引き上げに転じ2006年から2007年にかけて5％台を維持した金融引き締め期，そして2007年夏の金融危機発生以降の引き下げに転じ最終的にゼロ金利まで引き下げた超金融緩和期の3つの段階に分けることができる。Gorton（2010）によると，2000年以降の米国における証券発行額の推移を見ると，2000年から2003年までの金融緩和期の間，モーゲージ関連証券は6844億ドルから3兆711億ドルへと＋448.7％，資産担保証券は3370億ドルから6002億ドルと＋178.1％と大幅に増加した一方で，2004年から2007年にかけての金融引き締め期の直後にはこれらの証券化関連の証券発行額が大幅に減少した[2]。とりわけ，金融危機が始まった2007年度から2008年度

1　Brunnermeier（2009）によると，サブプライム・ローンを含む20種類の資産担保証券を参照するクレジット・デフォルト・スワップ（CDS）を元に算出されるABX指数は2007年1月を100とすると，リーマン・ショックが起きる直前の2008年夏以降2009年にかけてAA以下のすべての格付け（A, BBBなど）のABX指数は10以下まで下落した。

2　Gorton（2010）のp.39の表2.5を参照。

にかけての減少幅は，モーゲージ関連証券が2兆503億ドルから1兆3441億ドルへと－34.4％，資産担保証券は9016億ドルから1631億ドルへと－81.9％である。これらの数字からも明らかなように，金利水準などの金融政策運営が，ローン担保証券の市場価格や発行量に大きな影響を及ぼしたといえる。

本稿の目的は，ローン担保証券の原資産であるローン債権の真の清算価値に関して投資家と銀行との間に情報の非対称性が存在する時に，低金利などの金融緩和政策が，証券化されるローン担保証券の質や，ローン担保証券市場の市場均衡価格と市場均衡数量に及ぼす影響について，ミクロ的基礎付けのある理論モデルを用いた分析を行うことにある。

本稿と先行研究との関係は以下の通りである。ローン担保証券市場において市場価格が急落するメカニズムを理論的に分析した研究には，「レバレッジの巻き戻し」との関係では Adrian and Shin（2010），「流動性」との関係では Brunnermeier and Pedersen（2008），投資家心理と「資産の投げ売り」との関係では Diamond and Rajan（2009），信用緩和政策と「資産の投げ売り」との関係では Shleifer and Vishny（2010）など数多くの研究がある[3]。

丸茂（2008 b）では，資産担保証券市場において原資産の真の清算価値を知っている投資家（情報トレーダー）と，真の清算価値を知らない投資家（非情報トレーダー）の2種類の投資家が存在するケースについて，資産担保証券市場の均衡を導出している[4]。丸茂（2008 b）と本稿のモデルの違いは，第1に，丸茂（2008 b）では情報を持たない投資家は市場価格のみを用いてローン担保証券の原資産であるローン債権の真の価値を予測していたのに対して，本稿のモデルでは，情報を持たない投資家が市場価格だけでなくノイズのある私的シグナルを観察して，ローン債権の真の清算価値に関する予測をベイズ的に推測する設定になっている。第2に，丸茂（2008 b）ではローン担保証券の供給量は一定で外生的に固定されていたのに対して，本稿のモデルでは銀行の資産選択を明示的にモデル化し，ローン担保証券の供給量を内生的に導いている。第3に，丸茂（2008 b）では真の清算価値を知らない投資家の数が増加することがローン担保証券の市場均衡における価格や数量に与える影響について分析しているのに対して，本稿のモデルは金利水準や法定準備率などの金融政策の変更がローン担保証券市場の均衡に及ぼす影響について考察している。

3　ローン担保証券市場価格のバブルや急落のメカニズムを分析した研究に関する展望論文としては，Krishnamurthy（2009），Gromb and Vayanos（2010）および He, Khang and Krishnamurthy（2010）が参考になる。

4　丸茂（2008 a）では，証券の真のファンダメンタル価値を知らず，市場価格を用いて証券の真のファンダメンタル価値をベイズ的に推測するトレーダーの存在が，証券市場の効率性に及ぼす影響をモデルで分析している。

本稿の構成は以下の通りである。Ⅰでモデルの設定を説明する。Ⅱで投資家と銀行の最適化問題を解いてローン担保証券市場の総需要と総供給を求めた後に，第1期におけるローン担保証券市場の市場均衡を導出する。Ⅲで第0期における銀行の資産選択問題を解き，Ⅳでモデル全体の均衡を記述する。Ⅴでモデルの与件である金利と法定準備率という2つの金融政策手段の変化が，証券化されるローン担保証券の質や，ローン担保証券市場の均衡における価格と数量に与える影響について比較静学分析を行う。最後に結論を述べる。

Ⅰ　モ　デ　ル

第0期，第1期および第2期からなる3期間モデルを考える。このモデルには，銀行のローン債権を証券化したローン担保証券が取引される1つの市場が存在する。プレーヤーは，1行の銀行と，ローン担保証券を購入する I 人（$i=1, \cdots, I$）の同質的な投資家（以下，トレーダーと呼ぶ）である。

まず銀行について説明する。第0期に，銀行は，預金 D で調達した資金を用いて準備金 R とローン債権 L を保有している。第0期に，法定準備率 β は $0<\beta<1/2$ であると仮定し，銀行は超過準備金を持たず，銀行の自己資本は0で，銀行は預金収集コスト $C(D)=D^2/2$ を負担すると仮定する。さらに，銀行は顧客情報を持つためにローン債権プールの真の清算価値 v を知っていると仮定する。第1期に，銀行はローン債権の一部を流動化するかどうかを決める。ただし，ローン債権は連続的に分割可能であると仮定する。第1期に，流動化された部分のローン債権を裏付けとしてローン担保証券が発行され，トレーダーに対して販売される。ただし，流動化されなかったローン債権は銀行により第2期まで保有される。銀行は，第1期のローン担保証券売却代金を利子率0の超過準備金で第2期まで保有すると仮定する。

次にトレーダーについて説明する。各トレーダーは，絶対的危険回避度（ρ で表す）一定の指数関数（CARA-Gaussian）型の効用関数を持つと仮定する。第0期に，各トレーダーは e_0^i 単位の初期資産を保有し，第1期にローン担保証券 x^i 単位と無リスク債券 b^i 単位を購入する。無リスク債券の利子率 r は一定で，無リスク債券は完全弾力的に供給されると仮定する。

第0期に，各トレーダーは銀行のローン債権プールの真の清算価値 v を知らず，ローン債権プールの真の価値 v に関して同じ事前的信念を持つと仮定する。ローン債権プールの清算価値に関する各トレーダーの予想値は，確率変数 $\tilde{v}\in[-\infty, +\infty]$ で表わされる。$\tilde{v}$ は，平均 $\bar{v}$，分散 σ_v^2 の正規分布に従い，この分布はトレーダー毎に独立かつ同一になると仮定する。第1期に，各トレーダーはローン債権プールの真の価値 v

に関してノイズ ε^i のある私的シグナル S^i を受け取る。ノイズ ε^i は，確率変数 $\tilde{\varepsilon}^i \in [-\infty, +\infty]$ で表され，平均0，分散 σ_ε^2 の正規分布に従い，トレーダー毎に独立かつ同一の分布に従うと仮定する。各トレーダーは，私的シグナルとローン担保証券の市場価格 P を観察した後，ローン債権プールの真の価値に関する事前的信念を事後的信念に更新して，ローン担保証券の購入量 X を選択する。

最後に，第2期にローン債権の清算価値が実現し，銀行とトレーダーの利得が配分される。

Ⅱ　第1期におけるローン担保証券市場の均衡

本節では，1でトレーダー，2で銀行のそれぞれについて最適化問題を解くことで，ローン担保証券市場の総需要関数と総供給関数を導出する。次に，3でローン担保証券市場の均衡を導出する。

1. ローン担保証券需要

以下では，Grossman（1976）による合理的期待均衡モデルを用いてローン担保証券の個別需要を導出する[5]。第1期に，各トレーダーは，次の（1）式で表わされるように，ローン担保証券の真の価値 v に関してノイズ ε^i のある私的シグナル S^i を受け取る。

$$S^i = v + \varepsilon^i \tag{1}$$

ただし，次の（2）式で示されるように，ローン担保証券の市場均衡価格は $\bar{S}$ に関して線形関数であると仮定する。

$$P = \alpha_0 + \alpha_S \bar{S} \tag{2}$$

ここで，$\bar{S}$ はすべてのトレーダーが受け取る私的シグナル S^i（$i = 1, \cdots, I$）の平均値を意味し，次の（3）式で表される。

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{I} S^i / I \tag{3}$$

5　Grossman（1976）による合理的期待均衡モデルは，Brunnermeier（2001）の第3章の説明を参考にしている。

$\bar{S}$ はすべての私的シグナル S^i に（$i=1,\cdots,I$）対する十分統計量であるため，価格 P はストロング・フォーム情報効率的である点に注意する。

各トレーダーは，（1）式の私的シグナル S^i と（2）式の価格 P を観察した後に，ローン担保証券の真の価値 v の平均および分散に関する事前的信念を事後的信念に更新する。結合定理を用いると，ローン担保証券の真の価値 v に関する平均と分散の事後的信念は，次の（4）式と（5）式で表される。

$$E[v\,|\,S^i,\,P]=E[v\,|\,\bar{S}]=\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S} \tag{4}$$

$$Var[v\,|\,S^i,\,P]=Var|v\,|\,\bar{S}|=\lambda\sigma_v^2 \tag{5}$$

ただし，

$$\lambda\equiv\frac{\sigma_\varepsilon^2}{I\,\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2} \tag{6}$$

である。

次に，ローン担保証券に関する各トレーダーの個別需要を導出する。第２期における第 i トレーダーの最終的な富の水準は，次の（7）式で表される。

$$W^i=vx^i+b^i(1+r)=vx^i+(e_0^i-Px^i)(1+r) \tag{7}$$

ローン担保証券に関する第 i トレーダーの個別需要関数 x^i は，次の最大化問題の解である。

$$\begin{aligned}&\max_{\{x_i\}}E[W^i\,|\,S^i,\,P]-\frac{1}{2}\rho\,(x^i)^2Var[W^i\,|\,S^i,\,P]\\&\quad=E[v\,|\,\bar{S}]x^i+(e_0^i-Px^i)(1+r)-\frac{1}{2}\rho\,(x^i)^2Var[v\,|\,\bar{S}]\end{aligned} \tag{8}$$

この最大化問題を解くと，ローン担保証券に関する最適な個別需要 x^{i*}は次の（9）式になる。

$$x^{i*}(P)=\frac{E[v\,|\,\bar{S}]-P(1+r)}{\rho\,Var[v\,|\,\bar{S}]}=\frac{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-P(1+r)}{\rho\lambda\sigma_v^2} \tag{9}$$

全部で I 人の同質的なトレーダーが存在するので，ローン担保証券の総需要関数 X^D は次の（10）式で表される。

$$X^{D}(P)=\frac{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-P(1+r)}{\rho\lambda\sigma_{v}^{2}}I \tag{10}$$

ここで，ローン担保証券の総需要 X^D は，価格 P に関して減少関数である点に注意する。

2. ローン担保証券供給

第 0 期における銀行のバランスシート制約は，次の（11）式で表される。

$$R+L=D \tag{11}$$

法定準備率を β（$0<\beta<1/2$）とすれば，第 0 期に銀行は超過準備を持たないと仮定したことから，銀行の準備金は次の（12）式になり，

$$R=\beta D \tag{12}$$

銀行の貸出は次の（13）式になる。

$$L=(1-\beta)D \tag{13}$$

第 1 期に，銀行はローン債権 L の一部分 X（$\leqq L$）を流動化しローン担保証券を組成し，ローン担保証券市場において価格 P で売却する。ここで得られた売却代金 PX は，超過準備金として第 2 期が終わるまで銀行により保有される。ただし，仮定より準備金は無利子である。

第 2 期に，貸出債券の収益率 v が実現し，銀行は預金者に対して元金と利息を払い戻す。ここで，預金利子率は無リスク債券の利子率と同じであると仮定する。

第 1 期における銀行の粗利潤は，次の（14）式で表される[6]。

$$\Pi=R+P(X)X+(1+v)(L-X)-(1+r)D \tag{14}$$

（14）式の第 1 項は法定準備金，第 2 項は第 1 期にローン債権を売却したことから得られる超過準備金，第 3 項は銀行が第 2 期まで保有したローン債権からの総収益，最後の

6　第 0 期には銀行の預金収集コスト $C(D)=D^2/2$ がかかるが，第 1 期に銀行がローン担保証券を流動化する際に預金収集コストは埋没費用となるため，（14）式には預金収集コストが入らない。本稿Ⅲで預金収集コストを考慮して最適預金量が決められる。

項は預金者に払い戻される預金の元本と利子の和である。

（12）式と（13）式を用いて（14）式を整理すると，次の（15）式が得られる。第1期に，銀行はローン担保証券の真の価値 v を知っており，第0期のバランスシート構造（つまり D）を所与として，（15）式で表される粗利潤を最大化する X を選択する[7]。ただし，（16）式で表されるように，ローン担保証券の発行額 X がローン債権残高 $L=(1-\beta)D$ 以下になる制約がある。

$$\max_{\{X\}} \Pi = \{P(X) - (1+v)\} X + \{v(1-\beta) - r\} D \tag{15}$$

$$s.t.\ X \leq (1-\beta) D \tag{16}$$

（16）式の制約条件が有効でない場合，利潤最大化のための必要条件は次の（17）式になる[8]。

$$P(X) + \frac{\partial P(X)}{\partial X} X = 1 + v \tag{17}$$

（17）式を X について解くと，ローン担保証券の総供給関数は次の（18）式で表される[9]。

$$X^S(P) = \frac{\{P - (1+v)\}(1+r)}{\lambda \rho \sigma_v^2} I \tag{18}$$

3. ローン担保証券市場の均衡

（10）式と（18）式より，ローン担保証券市場の均衡 $X^D = X^S$ は，次の（19）式で表せる[10]。

$$\frac{\lambda \bar{v} + (1-\lambda)\bar{S} - P(1+r)}{\lambda \rho \sigma_v^2} I = \frac{\{P - (1+v)\}(1+r)}{\lambda \rho \sigma_v^2} I \tag{19}$$

（19）式を整理すると，ローン担保債権市場の市場均衡価格 P^* は次の（20）式になる。

7　D は本稿Ⅲで導出する。

8　（16）式の制約条件が有効である場合については補論1を参照されたい。

9　（18）式の導出については補論2を参照されたい。

10　本稿のモデルではローン担保証券を組成するのは1銀行のみなので，ローン担保証券の独占的な供給者である銀行は，（右下がりの）ローン担保証券の需要曲線上から，自らの利潤を最大化する最適なローン担保証券供給量を選択していると解釈することもできる。

$$P^* = \frac{(1+v)(1+r)+\lambda\bar{v}}{2(1+r)} + \frac{1-\lambda}{2(1+r)}\bar{S} \tag{20}$$

合理的期待均衡を用いると，（2）式の α_0 と α_S は，$\alpha_0 = \{(1+r)(1+v)+\lambda\bar{v}\}/2(1+r)$，$\alpha_S = (1-\lambda)/2(1+r)$ となる。

市場均衡価格である（20）式を総需要関数である（10）式に代入すると，市場均衡におけるローン担保債権量 X^*は次の（21）式になる。

$$X^* = \frac{\{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-(1+r)(1+v)\}}{2\lambda\rho\sigma_v^2} I \tag{21}$$

ただし，ローン担保債権市場の市場均衡が存在するためには，次の（22）式で表されるように，ローン担保債券の真の価値 v がある臨界的な上限値 $\hat{v}$ 以下になる必要がある。[11]

$$v \leq \hat{v} \equiv \frac{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-(1+r)}{1+r} \tag{22}$$

Ⅲ　第 0 期における銀行の資産選択問題

銀行が預金を集めるための営業費用を $C(D) = D^2/2$ と特定化すると，銀行の純利潤 π は次の（23）式で表される。第 0 期に，銀行は，第 1 期のローン担保証券市場で成立するローン担保証券量 X^*と市場均衡価格 P^*を所与として，（23）式で表される最終的な純利潤 π を最大化する D を選択する。

$$\max_{\{X\}} \pi = \{P^*(X^*)-(1+v)\}X^* + \{v(1-\beta)-r\}D - \frac{D^2}{2} \tag{23}$$

この最大化問題を解くと，最適預金量 D^*は次の（24）式になる。

$$D^* = v(1-\beta)-r \tag{24}$$

ただし，正の最適預金量 $D^*>0$ が存在するためには，ローン担保債権の真の価値 v がある臨界的な下限値 $\underline{v}$ よりも大きくなる必要がある。

$$v > \underline{v} \equiv \frac{r}{1-\beta} \tag{25}$$

11　（22）式の導出については補論 3 を参照されたい。

（13）式と（24）式より，最適貸出量 L^* は次の（26）式になる。

$$L^* = (1-\beta)\{v(1-\beta)-r\} \tag{26}$$

(20) 式，(21) 式および (24) 式より，法定準備金と超過準備金の和である総準備金 TR^* は次の（27）式になる。

$$\begin{aligned} TR^* &= \beta D^* + P^* X^* \\ &= \beta \left\{ v(1-\beta) - r \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{\lambda \bar{v} + (1-\lambda)\bar{S} + (1+r)(1+v)}{2(1+r)} \right\} \left\{ \frac{\lambda \bar{v} + (1-\lambda)\bar{S} - (1+r)(1+v)}{2\lambda\rho\sigma_v^2} \right\} I \end{aligned} \tag{27}$$

Ⅳ　モデルの均衡

（22）式と（25）式より，ローン担保債権の真の価値 v が次の条件（☆）を満たす範囲に存在する時，ローン債権の一部が証券化される市場均衡が存在する。

$$\underline{v} < v \leq \hat{v} \tag{☆}$$

また，ローン担保債権の清算価値に関する真の価値が，ある下限 $\underline{v}$ 以下（$-\infty < v \leqq \underline{v}$）ならば，すべてのローン債権が証券化される一方，ある上限 $\hat{v}$ よりも大きい（$\hat{v} < v$）ならば，ローン債権が証券化されない[12]。

以上の分析結果を命題 1 にまとめておく。

命題 1：モデルの均衡

ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v \in (\underline{v}, \hat{v}]$ に存在するならば，一部のローン債権が証券化される[13]。この時，モデルの均衡は以下の 5 本の式で表される[14]。

$$P^*(v, \bar{v}, \bar{S}, \sigma_v^2, \sigma_\varepsilon^2, I; r) = \frac{1+v}{2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 \bar{v} + I\sigma_v^2 \bar{S}}{2(1+r)(I\sigma_v^2 + \sigma_\varepsilon^2)} \tag{28}$$

12　補論 4 を参照。
13　ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v \in (\underline{v}, \hat{v}]$ に存在しない場合は補論 4 を参照されたい。
14　ただし，(6) 式を用いて（20）式，(21) 式および（27）式を整理すると，(28) 式，(29) 式および（30）式の 3 つの式が得られる。(31) 式と（32）式は，それぞれ本稿Ⅲの（24）式と（26）式と同じである。

$$X^*(v,\ \bar{v},\ \bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r)=\frac{\{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}-(1+r)(1+v)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)\}}{2\rho\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2}I \tag{29}$$

$$TR^*(v,\ \bar{v},\ \bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r,\ \beta)$$
$$=\beta\{v(1-\beta)-r\}+\frac{(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)I}{2(1+r)\rho\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2}\left[\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}}{I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2}\right)^2-(1+r)^2(1+v)^2\right] \tag{30}$$

$$D^*(v;\ r,\ \beta)=v(1-\beta)-r \tag{31}$$

$$L^*(v;\ r,\ \beta)=(1-\beta)\{v(1-\beta)-r\} \tag{32}$$

V　比較静学分析－金融政策の影響－

本節では，命題 1 で示したモデルの均衡を用いて，モデルの与件である金利 r と法定準備率 β の 2 つの金融政策手段の変化が，命題 2 で「証券化されるローン担保証券」の真の価値の範囲に与える影響，命題 3 でローン担保証券市場を均衡させる価格と数量に与える効果について，それぞれ比較静学分析を用いて考察する[15]。

命題 2.　政策変数（r, β）が証券化されるローン担保証券の真の価値 v の範囲に与える影響

ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v\in(\underline{v},\ \hat{v}]$ に存在するケースにおいて，金利 r が上がると，証券化されるローン担保証券の真の価値の下限 $\underline{v}$ が上昇し，上限 $\hat{v}$ が下落する。また，法定準備率 β が上がると，証券化されるローン担保証券の真の価値の下限 $\underline{v}$ のみが上昇する。

命題 3.　政策変数（$r,\ \beta$）がローン担保証券市場均衡における価格と数量に与える影響

ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v\in(\underline{v},\ \hat{v}]$ に存在するケースにおいて，金利 r が上がると，ローン担保証券市場において，市場均衡価格 P^*が下落し，市場均衡数量 X^*が減少する。また，法定準備率 β は，市場均衡価格と市場均衡数量に影響しない。

命題 2 は（22）式と（25）式を，命題 3 は（28）式と（29）式をそれぞれ r と β で微分することで明らかなので，証明は省略する。

15　補論 5 で，モデルの情報構造（真の清算価値と私的シグナルの平均と分散）や，投資家の特性（市場参加者数や危険に対する態度）など金融政策以外の要因が変化した場合の比較静学分析の結果を示している。

ま　と　め

本稿では，投資家と銀行との間にローン担保証券の原資産であるローン債権の真の清算価値に関して情報の非対称性が存在する時に，金融緩和政策が，証券化されるローン担保証券の質や，ローン担保証券市場の市場均衡価格と市場均衡数量に及ぼす影響について理論モデルを用いて分析した。主な結論は，以下のとおりである。

第1に，ローン担保債権の清算価値に関する真の価値がある範囲 $v \in (\underline{v}, \hat{v}]$ に存在するならば，一部のローン債権が証券化される。ただし，ローン担保債権の清算価値に関する真の価値が，ある下限 $\underline{v}$ 以下（$-\infty < v \leqq \underline{v}$）ならば，すべてのローン債権が証券化される一方，ある上限 $\hat{v}$ よりも大きい（$\hat{v} < v$）ならば，ローン債権が証券化されない。第2に，低金利や法定準備率の引き下げなどの金融緩和政策が行われると，証券化されるローン担保証券の真の価値がとりうる範囲が広がる。第3に，金融緩和政策がローン担保証券市場の均衡に及ぼす影響については，一部のローン債権が証券化される（$v \in (\underline{v}, \hat{v})$）場合，金利低下による金融緩和政策により，ローン担保証券市場において市場均衡価格 P^*が上昇し，市場均衡数量 X^*が増加する。

補論1（16）式の制約条件が有効である場合

（16）式が等号で成立するので，$X=(1-\beta)D$ を（15）式に代入して X について微分すると，利潤最大化の必要条件は（A 1）式になる。

$$P(X)+\frac{\partial P(X)}{\partial X}X=1+\frac{r}{1-\beta}\geq 1+v \tag{A 1}$$

（A 1）式の不等式を変形して，

$$v \leq \underline{v} \equiv \frac{r}{1-\beta} \tag{A 2}$$

が得られる。補論2の（B 1）式より，ローン担保証券の総需要関数 $P(X)$を（A 1）式に代入して整理すると，市場均衡価格と市場均衡数量は次の2つの式で表される。

$$P^*=\frac{1}{2(1+r)}\left\{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}+(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\} \tag{A 3}$$

$$X^*=\frac{\left\{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\}}{2\lambda\rho\sigma_v^2}I \tag{A 4}$$

補論 2（18）式の導出

（10）式を P について整理すると，

$$P(X)=\frac{\lambda}{1+r}\left(\bar{v}-\rho\sigma_v^2\frac{X}{I}\right)+\frac{1-\lambda}{1+r}\bar{S} \tag{B 1}$$

（B 1）式を X について微分すると，

$$\frac{\partial P}{\partial X}=-\frac{\lambda\rho\sigma_v^2}{(1+r)I}<0 \tag{B 2}$$

となる。（B 2）式を（17）式に代入すると，次の（B 3）式が得られる。

$$P=1+v+\frac{\lambda\rho\sigma_v^2}{(1+r)I}X \tag{B 3}$$

（B 3）式を X について解くと，（18）式が得られる。
ここで，次の（B 4）式で表されるように，利潤最大化のための十分条件が成立する。

$$2\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}X=2\frac{\partial P}{\partial X}<0 \tag{B 4}$$

（証明終わり）

補論 3　（22）式の証明

（10）式，（18）式および（21）式より，市場均衡が成立するためには，以下の（C 1）式が成立する必要がある。

$$\frac{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}}{1+r}>P^*>1+v \tag{C 1}$$

（20）式を用いて（C 1）式の最初の不等号を書き換えると，（22）式が得られる。また，（20）式を書き換えると，

$$\begin{aligned}P^*&=\frac{(1+v)(1+r)+\lambda\bar{v}}{2(1+r)}+\frac{1-\lambda}{2(1+r)}\bar{S}=1+v+\frac{\lambda\bar{v}+(1-\lambda)\bar{S}-(1+v)(1+r)}{2(1+r)}\\&>1+v\end{aligned} \tag{C 2}$$

となることから，（C 1）式の 2 番目の不等号は自動的に成立する。（証明終わり）

補論4

ローン担保債権の真の価値がある範囲 $-\infty < v \leqq \underline{v}$ に存在するならば，すべてのローン債権が証券化され（端点解のケース），モデルの均衡は以下の5本の式で表される。

$$P^*(v,\ \bar{v},\bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ I;\ r,\ \beta)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)+\frac{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}}{2(1+r)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)} \qquad \text{(D 1)}$$

$$X^*(v,\ \bar{v},\bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r,\ \beta)=L^*(v,\ \bar{v},\bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r,\ \beta)$$
$$=\frac{\left\{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}-(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\}}{2\rho\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2}I \qquad \text{(D 2)}$$

$$D^*(v,\ \bar{v},\bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r,\ \beta)=\frac{\left\{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}-(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\}}{2\rho\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2(1-\beta)}I \qquad \text{(D 3)}$$

$$R^*(v,\ \bar{v},\bar{S},\ \sigma_v^2,\ \sigma_\varepsilon^2,\ \rho,\ I;\ r,\ \beta)=$$
$$\frac{I}{2\rho\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2}\left[\left\{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}-(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\}\frac{\beta}{1-\beta}+\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}}{2(1+r)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)}\right\}\left\{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+I\sigma_v^2\bar{S}-(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)(1+r)\left(1+\frac{r}{1-\beta}\right)\right\}\right] \qquad \text{(D 4)}$$

一方，ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v>\hat{v}$ に存在するならば，すべてのローン債権が証券化されない。

補論5　金融政策以外の比較静学分析

(1) トレーダーの情報構造がローン担保証券市場均衡における価格と数量に与える影響

ローン担保債権の真の価値がある範囲 $v\in(\underline{v},\hat{v}]$ に存在するケースにおいて，モデルの与件であるトレーダーの予測するローン担保債権の真の価値の平均値 $\bar{v}$，トレーダーが受け取る私的シグナルの平均値 $\bar{S}$ のいずれかが大きくなると，市場均衡価格は上昇し，市場均衡数量は増加する。また，ローン担保債権の真の価値 v が大きくなると，市場均衡価格は上昇するのに対して，市場均衡数量は減少する。

$$\frac{\partial P^*}{\partial v}>0,\quad \frac{\partial P^*}{\partial \bar{v}}>0,\quad \frac{\partial P^*}{\partial \bar{S}}>0,\quad \frac{\partial X^*}{\partial v}<0,\quad \frac{\partial X^*}{\partial \bar{v}}>0,\quad \frac{\partial X^*}{\partial \bar{S}}>0 \qquad \text{(E 1)}$$

私的シグナルの平均値が，証券の真の価値の平均値よりも大きい（$\bar{S}>\bar{v}$）ケースでは，清算価値の予測に関する分散 σ_v^2 が大きくなるか，私的シグナルのノイズ σ_ε^2 が小

さくなると，市場均衡価格 P^*が上昇する。

$\bar{S} \gtreqless \bar{v}$ ならば，

$$\frac{\partial P^*}{\partial \sigma_v^2} = \frac{I\sigma_\varepsilon^2}{2(1+r)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)^2}(\bar{S}-\bar{v}) \gtreqless 0,\quad \frac{\partial P^*}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{I\sigma_v^2}{2(1+r)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)^2}(\bar{v}-\bar{S}) \lesseqgtr 0 \tag{E 2}$$

市場均衡数量 X^*に関する微分係数は次の（E 3）式になる。

$$\frac{\partial X^*}{\partial \sigma_v^2} = \frac{I}{2\rho\sigma_v^4}\{(1+v)(1+r)-\bar{v}\},\ \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{I^2}{2\rho\sigma_\varepsilon^4}\{(1+v)(1+r)-\bar{S}\} \tag{E 3}$$

したがって，場合分けにより，以下の（E 4）式と（E 5）式の関係が得られる。

$$(1+v)(1+r) \gtreqless \bar{v},\ \bar{S}\ \text{ならば，}\ \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_v^2} \gtreqless 0,\quad \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \gtreqless 0 \tag{E 4}$$

$$\bar{S} \gtreqless \bar{v}\ \text{かつ，}\ \underline{v} \lesseqgtr (1+v)(1+r) \lesseqgtr \bar{S}\ \text{ならば，}\ \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_v^2} \gtreqless 0\quad \frac{\partial X^*}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \lesseqgtr 0 \tag{E 5}$$

(2) トレーダーの特性がローン担保証券市場均衡における価格と数量に与える影響

トレーダーの危険回避度が上がると，市場均衡数量は減少するが市場均衡価格は変化しない。

$$\frac{\partial X^*}{\partial \rho} < 0,\quad \frac{\partial P^*}{\partial \rho} = 0 \tag{E 6}$$

トレーダーの数 I が増えると，

$$\bar{S} \gtreqless \bar{v}\ \text{ならば，}\ \frac{\partial P^*}{\partial I} = \frac{\sigma_v^2\sigma_\varepsilon^2}{2(1+r)(I\sigma_v^2+\sigma_\varepsilon^2)^2}(\bar{S}-\bar{v}) \gtreqless 0 \tag{E 7}$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2\bar{v}+2\sigma_v^2\bar{S}}{\sigma_\varepsilon^2+2\sigma_v^2} \gtreqless (1+r)(1+v)\ \text{ならば，}$$

$$\frac{\partial X^*}{\partial I} = \frac{1}{2\rho\sigma_v^2}\{\bar{v}-(1+r)(1+v)\} + \frac{I}{\rho\sigma_\varepsilon^2}\{\bar{S}-(1+r)(1+v)\} \gtreqless 0 \tag{E 8}$$

参考文献

Adrian, T. and H., S., Shin（2010）“Liquidity and Leverage,” *Journal of Financial Intermediation,* Vol.19, No.3, pp.418–437.

Brunnermeier, M., K.（2001）*Asset Pricing under Asymmetric Information－Bubbles, Crashes, Technical Analysis, and Herding－,* Oxford University Press.

Brunnermeier, M., K.（2009）“Deciphering the Liquidity and Credit Crunch 2007–08,” *Journal of Economic Perspectives,* Vol.23, No.1, pp.77–100.

Brunnermeier, M., K. and L., H., Pedersen（2008）“Market Liquidity and Funding Liquidity,” *Review of Financial Studies,* Vol.22, No.6, pp.2201–2238.

Diamond, D., W. and R., G., Rajan（2009）“Fear of Fire Sales and the Credit Freeze,” *NBER Working Paper,* No.14925.

Gorton, G., B.（2010）*Slapped by the Invisible Hand－The Panic of 2007－,* Oxford University Press.

Gromb, D. and Vayanos, D.（2010）“Limit of Arbitrage：The State of The Theory,” *NBER Working Paper,* No.15821.

Grossman, S., J.（1976）“On the Efficiency of Competitive Stock Markets where Traders have Diverse Information,” *Journal of Finance,* Vol.31, No.2, pp.573–585.

He, Z., Khang, I., G. and A., Krishnamurthy（2010）“Balance Sheet Adjustments in The 2008 Crisis,” *NBER Working Paper,* No.15919.

Krishnamurthy, A.（2009）“Amplification Mechanisms in Liquidity Crises,” *NBER Working Paper,* No.15040.

Shleifer, A. and R., W., Vishny（2010）“Asset Fire Sales and Credit Easing,” *NBER Working Paper,* No.15652.

丸茂俊彦（2008 a）「非合理的なトレーダーと証券市場の情報効率性」『社会科学』（同志社大学人文科学研究所），第 82 号，pp.41–58.

丸茂俊彦（2008 b）「資産担保証券市場と個人投資家」『同志社商学』（同志社大学商学会），第 60 巻第 3/4 号，pp.155–169.