資産選択行動における非合理的側面

植　田　宏　文

第 1 節　はじめに

植田（2006，a）では，資産選択や金融機関の貸出行動に代表される金融的要因と実物経済の関連に注目して定性的な分析を行い，そこでは金融的要因によって実物経済が大幅に変動し，経済全体が不安定になることを明らかにした。この金融の不安定性が発生している場合，株価も過度に変動する。現実に 1985 年以後，わが国の株価は乱高下を繰り返し，非常に不安定な動きをしている。株価の変動は，資産選択行動に依存し，危険資産に対するリスク・プレミアムの変化等と密接な関係がある。したがって，株価自体の不安定な動きを分析する際には，ミクロ的な資産選択行動の厳密な理論分析を行うことが必要不可欠である。とりわけ植田（2006，a）では，家計の資産選択行動において，危険資産と安全資産の各収益率の変化に対する代替効果と相対的危険回避度の変化が，実物経済の動向に対して重要な役割を果たしていることを論じた。

本論では，資産選択行動と株価（あるいは証券収益率）の決定について焦点をあてて分析を行う。資産選択行動の結果であるリスク・プレミアムの変動が，株価に影響を及ぼす。したがって，株価の変動をみることによって，資産選択行動の変化の一面を分析することができるからである。

株価の決定理論は，Tobin，Markowitz の 2 パラメータ・アプローチ以後，飛躍的に展開した。なかでも代表的なものとして，Sharpe（1964），Lintner（1965）によって定式化された資本資産価格形成モデル（CAPM；Capital Asset Pricing Model），その後，Ross（1976）によって展開された裁定価格理論（APT；Arbitrage Pricing Theory）があげられる。本論では，まずこの二つの理論を取りあげ比較検討を行い，各々の理論の特徴と問題点を明確にする。次に株価のボラティリティについて分析し，それが経済のファンダメンタルズから説明できるか否かを検討するモデルを分析する。さらに株価の時系列モデルについての実証分析を展開することによって，資産選択行動の特徴を明らかにす

る。

本論の構成は以下の通りである。第2節では，CAPM と APT について説明する。APT は，効用関数を特定せずに導出される点に特徴がある。第3節では，株価のボラティティ・テストについて説明する。これは分散制約テストともよばれているが，株価がファンダメンタルズを忠実に反映しているかを分析するものである。続く第4節では，ARCH（Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity）モデルを用いて株価は，大きな変化の後には大きな変化が続く独特な特徴を有していることを検証する。第5節では，まとめと今後の課題について述べる。

第2節　資産価格モデル

1．CAPM（Capital Asset Pricing Model）

すべての投資家が，期待収益率とリスクを考慮して最適なポートフォリオ行動をとると仮定する。このとき人々の最適化行動が集計された市場において，証券の価格はどのように決定されるかを明らかにしたのが Sharpe（1964）の示した資本資産価格形成モデルである。Tobin（1958）は，個別投資家の行動を分析し，安全資産と危険資産の最適保有割合の決定を導出した。Sharpe（1964）は，この理論を発展させ，全ての投資家が分散投資を行い合理的な投資行動をするならば，市場ではいかなる均衡が成立するのかを明らかにした。この理論では，市場でリスクとして認知されるのは，分散投資によって消去することのできないリスクすなわちシステマティック・リスクのみである。これは，市場ポートフォリオ（日経平均や TOPIX 等）との連動性としてとらえられ，各証券の期待収益率は，β（市場ポートフォリオに対する反応度）という単一ファクターのみで表される。CAPM は，その後，数多くの実証分析が行われ，いわゆる β 革命とよばれる現象を引き起こした。本節では，CAPM を動学モデルから導出した Blanchard and Fischer（1989）に基づいて考察する。

消費者は，次の将来の消費の流列から得られる期待効用を最大化するように行動する。

$$E\left[\sum_{t=0}^{T-1}(1+\theta)^{-1}U(C_t)\mid t\right] \tag{1}$$

θ は，時間選好率を示している。異時点間における消費の制約式は，以下の通りである。

$$A_{t+1}=(A_t+Y_t-C_t)\{(1+r_{ft})w_t+(1+r_t)(1-w_t)\} \tag{2}$$

A は資産額，Y は所得，C は消費，r_f は安全資産の収益率，r は危険資産の収益率，w は金融資産投資に占める安全資産への投資比率である。多期間にわたる動学制御モ

デルの解法の第一のステップとして（1）式より次の value function を与える。

$$V_t(A_t)=Max\ E\left[\sum_{s=t}^{T-1}(1+\theta)^{-(s-t)}U(C_s)\mid t\right] \tag{3}$$

（3）式を forward に展開させることによって次の recursive equation を得ることができる。通常，これは Bellman equation とよばれている。

$$V_t(A_t)=Max\ E\left[U(C_t)+(1+\theta)^{-1}E\{V_{t+1}(A_{t+1})\mid t\}\right] \tag{4}$$

（2）式の制約の下で，（4）式の消費と安全資産への投資比率に関する一階条件は以下のようになる。

$$U'(C_t)=E\left[(1+\theta)^{-1}\{(1+r_{ft})w_t+(1+r_t)(1-w_t)\}V'_{t+1}(A_{t+1})\right] \tag{5}$$

$$E\left[V'_{t+1}(A_{t+1})(r_{ft}-r_t)\mid t\right]=0 \tag{6}$$

ここで，まず $V'_t(A_t)$ と $U'(C_t)$ の間の関係を示す。（4）式を（2）式の制約下で A_t について微分すれば，

$$V'(A_t)=E\left[(1+\theta)^{-1}\{(1+r_{ft})w_t+(1+r_t)(1-w_t)\}V'_{t+1}(A_{t+1})\right]=U'(C_t) \tag{7}$$

となる。（7）式から，最適経路上では金融資産の限界価値は，消費の限界効用と等しくなければならないことが確認できる。この関係式より（5）～（6）式は，以下のように書き換えられる。

$$U'(C_t)=E\left[(1+\theta)^{-1}\{(1+r_{ft})w_t+(1+r_t)(1-w_t)\}U'(C_{t+1})\right] \tag{8}$$

$$\left[U'(C_{t+1})(1+r_{ft})\mid t\right]=E\left[U'(C_{t+1})(1+r_t)\mid t\right] \tag{9}$$

（9）式を（8）式に代入すれば，一階条件は以下のように2通りに表すことができる。

$$U'(C_t)=(1+\theta)^{-1}E\left[U'(C_{t+1})(1+r_t)\mid t\right] \tag{10}$$

$$U'(C_t)=(1+\theta)^{-1}(1+r_{ft})E\left[U'(C_{t+1})\mid t\right] \tag{11}$$

ここで，危険資産が n 種類ある場合，個別危険資産に関する一階条件は（10）式を用いることによって以下のように表すことができる。

$$U'(C_t)=(1+\theta)^{-1}E\left[U'(C_{t+1})(1+r_{it})\mid t\right],\ i=1,2,\ldots,n \tag{10$'$}$$

（10）式（および（10）′式）と（11）式は，Keynes–Ramsey Rule を示しており，今期の消費の限界効用は，金融資産への投資収益を組み合わせた次期の消費から得られる限界効用の期待値と等しくなる（i は個別証券を表している）。（11）式を（10）′に代入すれば，

$$0=E\left[U'(C_{t+1})(r_{it}-r_{ft})\right]=E\left[U'(C_{t+1})\right]E\left[r_{it}-r_{ft}\right]+Cov\{U'(C_{t+1}),\ r_{it}\} \tag{12}$$

を得る（information set の表現を以下では捨象する）。（12）式より，個別証券の期待収益率は，

$$E[r_{it}]=r_{ft}-\frac{Cov\{U'(C_{t+1}),\ r_{it}\}}{E\left[U'(C_{t+1})\right]} \tag{13}$$

となる。個別証券の期待収益率が，消費の限界効用に依存することが確認できる。ここ

で，$U'(C_{t+1})$ と収益率が次のように完全に負の相関関係が成立しているマーケット・ポートフォリオを取りあげる。

$$U'(C_{t+1}) = -\gamma r_{Mt} \tag{14}$$

このとき，すべての危険資産について次式が成立する。

$$Cov\{U'(C_{t+1}),\ r_{it}\} = -\gamma Cov(r_{Mt},\ r_{it}) \tag{14'}$$

次に，（13）式を資産 M について表すために r_i を r_M とし，さらに（14）式を代入すると，

$$E[r_{it}] = r_{ft} - \frac{Cov\{U'(C_{t+1}),\ r_{Mt}\}}{E[U'(C_{t+1})]} = r_{ft} + \frac{\gamma Var(r_{Mt})}{E[U'(C_{t+1})]} \tag{15}$$

となる。（14）式と（15）式を（13）式に代入すれば，

$$\begin{aligned} E[r_{it}] &= r_{ft} + \left\{ \frac{Cov(r_{it}, r_{Mt})}{Var(r_{Mt})} \right\} \{E[r_{Mt}] - r_{ft}\} \\ &= r_{ft} + \beta\{E[r_{Mt}] - r_{ft}\}, \qquad \beta = \frac{Cov(r_{it}, r_{Mt})}{Var(r_{Mt})} \end{aligned}$$

となり，個別証券の均衡期待収益率を導出することができる。

これは，静学モデルでの均衡式とも等しくなり，効用関数や投資選好を特定化することなく β を回帰分析により求めることができる。この動学分析による CAPM は異時点間における消費をベースにして導出していることから，C-CAPM ともよばれている。

2．特徴と問題点

CAPM の特徴は，期待効用が収益率と分散にしたがう想定の下で，投資家の資産選択行動を市場の一般均衡理論へ展開し，各個別の証券収益率が β という単一ファクターのみによって説明することができるという点にある。これは，多銘柄の証券に分散投資する結果，企業に固有なリスクは相殺され，残るのはマーケット・ポートフォリオの収益率と共変動するリスクだけになるためである。

β で表される各個別証券のリスク・プレミアムは，マーケット・ポートフォリオとの相関係数が高いほど市場との共通の動きも高くなるので大きくなる。このようにリスク尺度としては，各個別証券固有のリスクではなく，マーケット・ポートフォリオとの共分散という一つのファクターで表されている。CAPM は，このことを投資家の最適化行動から理論的に導出したことにも特徴がある。CAPM は，その後，税金が存在する場合やインフレ下での価格決定モデルへと発展させられている[1]。

米国では，このモデルがシンプルであることから多くの実証研究が行われ，いわゆる

1　小嶋（1982）は，インフレの存在を考慮した場合，均衡式は次のようになることを導出している。

$$E(r_i) = r_f + Cov(r_i, r_p) + \frac{\{E(r_M) - r_f - Cov(r_M, r_p)\}\alpha}{\sigma_M^2 - Cov(r_i, r_p)}$$

なお，α は全資産価値に対する危険資産の割合を示している。

ベータ（β）革命とよばれる現象が生じた。しかし，石油ショック以後，CAPM による現実の証券価格に対する説明力が低下し，実証面で次のような批判を浴びるようになった。

第一に，実証分析において期待収益率を実現値に置き換えなければならないことである。第二に，危険資産は，株式だけでなく債券，不動産，美術品等があり，真のマーケット・ポートフォリオを現実に測定することができないのではないかということである。第三に，実際に複数のマクロ経済指標が証券価格に影響を与えている可能性が高く，一つのファクターだけでは不十分ではないかということである。このような批判に応えるような形で，次に展開される APT が注目されるようになった。

3．裁定価格理論（APT：Arbitrage Pricing Theory）

ここでは，CAPM に代わる価格決定理論を提示した Ross（1976）の裁定価格理論（APT）を取りあげる。APT は，市場ポートフォリオを唯一の説明変数とする CAPM に対して，その基本的な市場ポートフォリオ自体の計測が現実には不可能であるという Roll の理論的批判，および，各証券収益率が β 係数のみでは説明できず，他の重要な複数のマクロ経済指標の存在が説明力を向上させているという実証研究の指摘に応えるかたちで提唱された。APT の基本的な考え方は，各証券の期待収益率は CAPM のように株式市場全体の平均収益率によってではなく，市場において完全に裁定が行われることを前提した場合，幾つかの銘柄に共通する複数個の変動要因によって決定されるというものである。その意味で，現実的，直感的なモデルに経済学的な意味を与えた理論として特徴づけることができる。

APT の前提となる仮定は以下の通りである。

(a) 資本市場は完全競争市場である。

(b) 投資家は，合理的である。

(c) 各証券の投資収益率は，k 個の共通因子に次のようにしたがっている。

$$\tilde{Z}_i = a_i + b_{i1}\tilde{Y}_1 + b_{i2}\tilde{Y}_2 + \cdots + b_{ik}\tilde{Y}_k + \tilde{\varepsilon}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

Z_i：証券 i の収益率

Y_i：共通因子

b：共通因子に対する反応係数

(d) 通常，因子はマクロ経済指標である。

(e) $\tilde{Y}_i$ は，システマティックな変動要因であり，平均ゼロ，分散 1 に標準化されている。また，共通因子は互いに独立である。ε は，各資産の固有の変動要因を表すアンシステマティックな撹乱項であり，平均ゼロ，分散 σ_i^2 である。また，撹乱項と共通因子も独立している。したがって，以下の式が成立している。

$E(Y)=0,\ E(YY')=I,\ E(\tilde{\varepsilon}Y')=0$

$E(\varepsilon)=0,\ E(\varepsilon\varepsilon')=\Sigma$（対角行列）

以上より，

$E(\tilde{Z}_i)=a_i$

となり，a_i は期待収益率を示している。

また，APT では，各証券に固有なリスクが無視できるほど分散化した投資が可能となるように，十分多種類の証券が存在しているものと仮定している。APT は，CAPM と異なり効用関数の特定を行っていないという意味においてより一般的である。

A．共通因子 1 個，アンシステマティック・リスクなしのケース

APT のアイデアを理解するために，共通因子が 1 個で各証券に固有なリスクがない場合について説明する。この場合，証券 i の収益率は，

$$\tilde{Z}_i=a_i+b_{i1}\tilde{Y}_1 \tag{17}$$

と表される。いま，証券 i を ω，証券 j を（$1-\omega$）の割合に基づいて購入するポートフォリオを考える。このポートフォリオの収益率は，次のようになる。

$$\omega\tilde{Z}_i+(1-\omega)\tilde{Z}_j=\omega a_i+(1-\omega)a_j+\{\omega b_{i1}+(1-\omega)b_{j1}\}\tilde{Y}_1 \tag{18}$$

$\tilde{Y}_1$ は，システマティックなリスクであるが，このリスクを完全に相殺するようなポートフォリオを組めば，投資家にとっては，ポートフォリオからの収益率を確定させ，リスクをゼロにさせることができる。このとき，投資家は（18）式に示されている，$\tilde{Y}_1$ の係数がゼロとなるような以下の ω^* を選択する。

$$\omega^*=-\frac{b_{j1}}{b_{i1}-b_{j1}} \tag{19}$$

ここで，リスクが全くない安全資産の収益率を r_f とする。（19）式で決定される ω^* にしたがって得られるポートフォリオの収益率が，安全資産の収益率 r_f より高ければ，裁定がはたらき，この危険資産から構成されるポートフォリオへの需要が増加する。裁定が完全（裁定機会の不在）になれば，このポートフォリオの収益率は，r_f に等しくならなければならない。以上より，この場合次の式が成立する。

$$\omega\tilde{Z}_i+(1-\omega)\tilde{Z}_j=\omega^*a_i+(1-\omega^*)a_j=\frac{-b_{j1}a_i+b_{i1}a_j}{b_{i1}-b_{j1}}=r_f$$

上式を r_f について書き換えれば以下のようになる。

$$r_f=\frac{-b_{j1}a_i+b_{i1}a_j}{b_{i1}-b_{j1}}=\frac{a_i(b_{i1}-b_{j1})-b_{i1}(a_i-a_j)}{b_{i1}-b_{j1}}=a_i-\frac{a_i-a_j}{b_{i1}-b_{j1}}b_{i1}$$

ここで，$(a_i-a_j)/(b_{i1}-b_{j1})=\lambda_1$ とおけば，

$a_i=r_f+\lambda_1 b_{i1}$

となる。さらに仮定（e）で述べたように，a_i は $\tilde{Z}_i$ の期待値に等しいので次のように書

き換えることができる。

$$E(\tilde{Z}_i)=r_f+\lambda_1 b_{i1} \tag{20}$$

APT では，証券の収益率生成過程が（17）式で示される下では，各証券の期待収益率は（20）式で表されているように決定される。危険資産である各証券の期待収益率は，安全資産の収益率 r_f に右辺第2項で表されるリスク・プミミアム分を加えたものに等しくなる。リスク・プレミアムは，共通因子 Y に対する反応係数 b の関数となる。ただ，各証券収益率の理論値は，安全資産の収益率 r_f に一定のリスク・プレミアムを上乗せしたかたちになっているのは CAPM と同様である。

B．共通因子1個，アンシステマティック・リスクが存在するケース

次に，証券固有のアンシステマティック・リスクが存在するケースについて説明する。この場合，各証券の収益率は次のように表される。

$$\tilde{Z}_i=a_i+b_{i1}\tilde{Y}_1+\tilde{\varepsilon}_i \tag{21}$$

$$E(\tilde{\varepsilon}_i)=0,\ E(\tilde{Y}_1\tilde{\varepsilon}_i)=0,\ E(\tilde{\varepsilon}_i\tilde{\varepsilon}_j)=0,\ (i\neq j)$$

証券 i の購入比率を ω_i とすると，このポートフォリオから得られる収益率 $\tilde{X}$ は次のようになる。

$$\tilde{X}=\Sigma\omega_i\tilde{Z}_i=\Sigma\omega_i a_i+\Sigma\omega_i b_{i1}\tilde{Y}_1+\Sigma\omega_i\tilde{\varepsilon}_i=a+b\tilde{Y}_1+\tilde{\eta} \tag{22}$$

但し，$a=\Sigma\omega_i a_i,\ b=\Sigma\omega_i b_{i1},\ \tilde{\eta}=\Sigma\omega_i\tilde{\varepsilon}_i$ としている。（22）式の分散は，

$$Var(\tilde{X})=b^2\sigma^2_{Y_1}+\sigma^2_\eta$$

となる。$\sigma^2_\eta=\Sigma\omega_i^2\sigma^2_{\varepsilon_i}$ より，資産数 n が十分に大きい場合，

$$\lim_{n\to\infty}=\sigma^2_\eta=0$$

となる[2]。したがって，

$$plim\ \tilde{X}=a+b\tilde{Y}_i \tag{23}$$

が成立する。十分に分散化されたポートフォリオは，固有リスクが消滅し，先の（17）式の固有リスクがないケースと全く同じになる。したがって，各証券の期待収益率は，アンシステマティック・リスクの存在を考慮しても，（20）式と同様に導出することができる。

2　Chebyschev の不等式により，

$$prob\{|\tilde{\eta}|>\theta\}<\frac{E(\Sigma\omega_i^2\tilde{\varepsilon}_i^2)}{\theta^2}$$

が成立している。仮に，

$$|\omega_i|<\frac{\tilde{X}}{n}$$

を満たす $\tilde{X}$ が存在すれば，上式は，

$$prob\{|\tilde{\eta}|>\theta\}<\frac{\tilde{X}^2\tilde{\varepsilon}_i^2}{n\theta^2}$$

となる。このとき，n が増加すれば上式の右辺はゼロに収束する。

C. 共通因子が複数個のケース

最後に共通因子が複数個（2 個）の場合について検討する。この場合，各証券固有のリスクが存在しないとき，証券 i の収益率は次のように表される。

$$\tilde{Z}_i = a_i + b_{i1}\tilde{Y}_1 + b_{i2}\tilde{Y}_2 \tag{24}$$

ここで，3 種類の証券から構成されるポートフォリオを考える（各証券の購入比率をとする）。このポートフォリオから得られる収益率は，

$$\tilde{X}_i = \Sigma\omega_i\tilde{Z}_i = \Sigma\omega_i a_i + \Sigma\omega_i b_{i1}\tilde{Y}_1 + \Sigma\omega_i b_{i2}\tilde{Y}_2 \tag{25}$$

となる（$i=1, 2, 3$）。ここで，システマティック・リスクが完全に相殺されるようなポートフォリオを組むには，

$$\Sigma\omega_i b_{i1} = 0,\ \Sigma\omega_i b_{i2} = 0 \tag{26}$$

が成立しなければならない。裁定が完全にはたらけば，このポートフォリオから得られる収益率は，安全資産の収益率 r_f と等しくなる。したがって，$\Sigma\omega_{iai} = r_f$ が成立する。また，$\Sigma\omega = 1$ であるため（25）式を，

$$\Sigma\omega_i(a_i - r_f) = 0 \tag{27}$$

と書き換えることができる。

（26）式と（27）式を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_1 - r_f & a_2 - r_f & a_3 - r_f \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立一次方程式体系で ω_i がゼロ以外の解をもつためには，行列の各行は互いに従属関係になっていなければならない。すなわち，

$$a_i - r_f = \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

の関係を満たす λ_1, λ_2 が存在する。$a_i = E(\tilde{Z}_i)$ より上式は，

$$E(\tilde{Z}_i) = r + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

と書き換えることができる。各証券の収益率は，安全資産の収益率に，共通因子の反応係数を考慮したリスク・プレミアム分を加えたものに等しくなる。共通因子が k 個の場合も，同じように導出することができる。

一般的に，共通因子が k 個の場合の APT は，次のように表される。

$$\tilde{Z}_i = a_i + b_{i1}\tilde{Y}_1 + b_{i2}\tilde{Y}_2 + \cdots + b_{ik}\tilde{Y}_k + \tilde{\varepsilon}_i$$

以上より，裁定取引が完全に機能すれば各証券の期待収益率は，

$$E(\tilde{Z}_i) = a_i = r + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots + \lambda_k b_{ik} \tag{28}$$

と表される。

4．APT の特徴と問題点

APT の特徴を CAPM と比較した上で，考察すると次のようにまとめることができる。

第一に，CAPM のように市場ポートフォリオという単一のファクターのみに依存するのではなく（single-factor model），より多くの共通したファクターを説明因としている（multi-factor model）。

第二に，均衡状態においては，裁定利益の獲得は不可能という経済学的論理を利用して，期待収益率とリスクの間の線形関係を導いた均衡モデルである。証券収益率生成過程の多因子線形性と裁定機会不在の複合仮説が成り立てば，証券の期待収益率は安全資産と共通リスク要素に対するリスク・プレミアムの和で表される。

第三に，CAPM では市場ポートフォリオがきわめて重要な役割をはたしていたのに対して，APT は市場ポートフォリオにそのような役割を求めていない。

第四に，CAPM では投資家がリスク回避的という仮定をつけているが，APT では特に投資家の効用関数に仮定をつけていない。

第五に，CAPM と APT は，理論的には必ずしも矛盾するものではない側面がある。APT で共通因子を一つとした場合，証券の期待収益率は，安全資産の収益率に共通因子の反応係数を考慮したリスク・プレミアムを上乗せするという single-factor model になるからである。

問題点としては，次のような点があげられる。証券の収益率にシステマティックな影響を与える共通因子が何であるかを理論的に判明させることができないことである。Ross（1976）は，マクロ経済指標である，インフレ率，鉱工業生産指数，短期・長期金利等をあげているが，推測の域を出ておらず確定できない。また，共通因子数が幾つあるのかも確定することはできない。これらの問題については，実証研究に委ねられることになる。

第3節　株価のボラティリティ

本節では，具体的に株価がどれほどファンダメンタルズを忠実に反映しているのかを検討する。このような分析は，Shiller（1981）等の研究における「ボラティリティ・テスト」に端を発し，資産価格の理論・実証の分野で大きな進展がみられた。これは資産価格が基礎的な諸要因（ファンダメンタルズ）によって決定されているか否かを調べるものである。株価は，合理的に予想された将来の配当流列の現在割引価値として決定されるといわれている（配当割引モデル）。この最も基礎的なモデルは，①完全な裁定，②投資家の危険中立的行動，③合理的期待形成，④合理的バブルが存在しないこと，⑤

税・取引コストがない，⑥割引率一定，という結合仮定から導出される。

Shiller（1981）は，株価と配当とのこの密接な関係から，配当の変動の度合が株価の変動の度合の上限（upper bound）を決めることに着目して検定を行った。これは分散制約のテスト（variance bounds test）ともよばれている。この手法では現実の株価の分散が合理的期待に基づく株価の分散の理論的上限値を上回っているか否かを調べ，仮に上回っていれば過度に volatile な状態にあると判断する。彼の米国における実証結果では，現実の株価の分散は理論値を大幅に上回っていた。このことは，資産価格の変動がファンダメンタルズやそれについての合理的な予想の変動だけでは説明できないということを意味している。あるいは上記 6 点の結合仮説のうち，少なくとも 1 点は成立していないことになる。この後に，株価のみならず債券，為替レート，金利の期間構造へも一連のテストが適用され同様の結果が出ている。

しかし，その後 Flavin（1983），Marsh and Merton（1987）によって，Shiller の volatility テストには技術的な問題点があることが指摘された。その一つは，株価の定常性（stationarity）についてである。仮に，株価や配当の時系列が非定常（non-stationarity）ならば，現実の分散と理論値の上限の大小関係は全く逆になる可能性が高くなり，簡単に excess volatile とは判断できなくなる。これに対して Mankiw,Romer and Shapiro（1985）は非定常の場合でも適用できる新しいテストを提示した。もう一つは，リスク・プレミアムの可変性である。Summers and Porteba（1984），Mehra and Prescott（1985），Weil（1989）は，消費に基づく資産市場価格形成モデル（C-CAPM）から，リスク・プレミアムの理論的上限値を導出し検定を行っている。

本節では，Shiller（1981）のテストを代表として，上述の非定常性やリスク・プレミアムの可変性を考慮に入れたテストを含めた計五つの分散制約テストを示し，各々の特徴を明らかにして比較検討を行う。

1．Shiller モデル

現実の株価にバブル的な要素が含まれているか否かは，株価がファンダメンタルズ要因による変動以上に大幅に変動しているかを調べることによって判断することができる。株価等の資産価格の変動要因に関する代表的な実証分析として Shiller（1981）があげられる。本節ではこれを第一のテストとして，その骨子を簡単に解説する。

株価のファンダメンタルズ価格は，危険資産である株式と安全資産との間の裁定関係から導出される。本節では投資家はリスクに対して中立であると仮定する。したがって，危険資産に対してのリスク・プレミアムはゼロであり，次の裁定式が成立する。

$$r_t=\frac{\{E\,(P_{t+1}\,|\,I_t)-P_t\}+D_t}{P_t} \tag{29}$$

ここで，P_t：t 時点の現実の株価，D_t：t 時点での配当，r_t：安全金融資産の収益率（＝割引率）である。なお，E は期待値を表す。

（29）式からも明らかなように，将来株価については合理的な期待形成を行い，取引費用や税は存在していない。（29）式を繰り返し forward に解き合理的バブルが存在しない場合，次のように株価は将来配当の現在割引価値に等しくなるように決定される[3]。

$$P_t=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}E\,(D_{t+k}\mid I_t) \qquad (30)$$

ただし，$\theta=1/(1+r)$ としている。（30）式の配当割引モデルから導出される株価がファンダメンタルズ価格である。

次に，$P_t{}^*$を現在および将来の実際の配当の大きさから計算された割引現在価値と定義する。これを本論では，Shiller（1981）と同様に事後的な合理的価格（expost rational price）とよび，次のように表す。

$$P_t{}^*=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}D_{t+k} \qquad (31)$$

（30）式の右辺は将来配当の予想値であるが，（31）式は事後的な配当の実現値で置き換えられている。（30）式と（31）式から，現実の株価 P_t は，効率的市場における $P_t{}^*$ の最適な予想値であることから，両者は，

$$E\,(P_t{}^*\mid I_t)=P_t$$

$$P_t{}^*=P_t+u_t \qquad (32)$$

となる関係にある。u_t は将来配当に関する予想誤差であり，

$$u_t=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}\{D_{t+k}-E\,(D_{t+k}\mid I_t)\}$$

となる。ここで投資家の予想形成が合理的であるため，投資家は各時点で手に入れることのできる情報を最大限利用して将来予測を行っている。したがって，予測誤差 u_t は t 時点に入手される情報とは統計的な相関はない。この点が，効率市場の仮定に対応している。P_t は，t 時点には観察可能であるため（32）式より次が成立する。

$$Var\,(P_t{}^*)=Var\,(P_t)+Var\,(u_t)$$

また，

3　一般に，株価は将来株価と配当に依存し，$P_t=\alpha E\,(P_{t+1}\mid I_t)+\theta D_t$，と表わされる。これより，

$$P_t=\alpha^n E\,(P_{t+n}\mid I_t)+\theta\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i E\,(D_{t+i}\mid I_t)$$

となる（$0<\alpha<1$，但し，本論の場合，α と θ は等しい）。n の値が無限大のとき以下の式が得られる。

$$P_t=\lim_{n\to\infty}\alpha^n E\,(P_{t+n}\mid I_t)+\theta\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i E\,(D_{t+i}\mid I_t)$$

$\lim_{n\to\infty}\alpha^n E\,(P_{t+n}\mid I_t)\neq 0$ ならば，P_t の解は発散し合理的バブルが生じることになる。しかし，$\lim_{n\to\infty}\alpha^n E\,(P_{t+n}\mid I_t)=0$ という横断性の条件が満たされていれば（30）式が成立する。将来，債券は償還されるので横断性の条件は満たされ，理論的に合理的バブルは発生しない。詳しくは，Blanchard and Fischer（1989）を参照せよ。なお，本節の（1）～（3）の分散制約テストの紹介は植田（2004）においても説明しているが，以後のテストと比較するため一部修正し再度取りあげている。

$Cov\,(P_t, u_t)=0$

より，以下の式が成立する（但し，Var は分散，σ は標準偏差を示す）。

$$Var\,(P_t^*)>Var\,(P_t)$$

$$\sigma\,(P_t^*)>\sigma\,(P_t) \tag{33}$$

すなわち，事後的な合理的価格の分散は，現実の株価の分散より大きい。Shiller（1981）は，（33）式の不等式が実際に成立しているかどうかを調べた。彼は，米国の株価，債券価格について実証分析を行ったが，過去一世紀程度のデータから（33）式は成立しないことを見いだし学界に多くの波紋をなげかけた。なぜなら，この結果は（30）式のような株価決定モデル自体が間違っているのか，あるいは上述した六つの結合仮説のうち，少なくとも一つが満たされていないことを意味するからである。Hoshi（1986）は，Shiller のテストを日本に適用し検証したところ，株価の変動は米国ほどではないが理論値を上回っていることを示している。

2．Innovation Operator と株価

先のケースでは，株価の絶対水準の分散に注目して分散制約テストを行ったが，次に Innovation Operator を用いて株価の変化分の分散制約を求める。

Innovation Operator を δ_t とおくと，株価と配当について次のような式が成り立つ。

$$\delta_tP_t=E\,(P_t\mid I_t)-E\,(P_t\mid I_{t-1})$$

$$\delta_tD_t=E\,(D_t\mid I_t)-E\,(D_t\mid I_{t-1})$$

但し，$E\,(P_t\mid I_t)=P_t$, $E\,(D_t\mid I_t)=D_t$，である。条件付き期待値が変化することは，新しい情報が入ったことを意味する。（30）式より，Information Set を一期前にずらせば，

$$E\,(P_t\mid I_{t-1})=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}E\,(D_{t+k}\mid I_{t-1}) \tag{34}$$

を得る。（30）式と（34）式より，次の式が成立する。

$$\delta_tP_t=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}\delta_tD_{t+k} \tag{35}$$

この（35）式は，あとの分散制約を導く重要な式となる。まず，ここで δ_tP_t が t 期に観察可能であることを示す。$P_{t-1}=\theta\,\{E\,(P_t\mid I_{t-1})+D_{t-1}\}$ より，

$$\delta_tP_t=E\,(P_t\mid I_t)-E\,(P_t\mid I_{t-1})=P_t-\frac{P_{t-1}}{\theta}+D_{t-1}=\Delta P_t+D_{t-1}-rP_{t-1} \tag{36}$$

が，求められる。但し，$\theta=1/(1+r)$，$\Delta P_t=P_t-P_{t-1}$ としている。（36）式より右辺はすべて t 期においては既知であるため，t 期に δ_tP_t を知ることができる。

しかし，（35）式の右辺を構成する δ_tD_{t+j} を実際 t 期に観察することはできない。だが，（35）式を用いて以下の方法で，δ_tP_t の分散の最大値を求めることができる。これが第二の分散制約である。

最初に t 期の配当を次のように書き換える。

$$D_t = E(D_t \mid I_{-\infty}) + \sum_{K=0}^{\infty} \delta_{t-k} D_t$$

Innovation には自己相関関係はないので，上式の分散は，

$$Var(D_t) = \sum_{K=0}^{\infty} Var(\delta_{t-k} D_t) \tag{37}$$

となる[4]。配当の系列は，定常なので，（37）式は時間に依存しない。したがって次のように簡単化することができる。

$$Var(D) = \sum_{K=0}^{\infty} \sigma_k^2 \tag{38}$$

$$\sigma_k^2 = Var(\delta_0 D_k) = Var(\delta_{t-k} D_t) = Var(\delta_t D_{t+k})$$

（38）式が成り立つとき δP の分散は，

$$Var(\delta P) = (\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{k+1} \sigma_k)^2 \tag{39}$$

となる。ここで配当の分散を所与としたときの δP の分散の上限を求めることができる。（38）式の制約の下で（39）式を最大にするため，ラグランジュ方程式£を設定する。λ はラグランジュ乗数とする。

$$£ = (\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{k+1} \sigma_k)^2 + \lambda \{Var(D) - \sum_{K=0}^{\infty} \sigma_k^2\}$$

一階条件は，

$$2(\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{k+1} \sigma_k)\, \theta_j^{+1} - 2\lambda \sigma_j = 0 \tag{40}$$

であり，容易に二階条件も満たされていることがわかる。

（40）式より，

$$\frac{(\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{k+1} \sigma_k)\, \theta^{j+1}}{\sigma_j} = \lambda = \frac{(\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{k+1} \sigma_k)\, \theta^{j+2}}{\sigma_{j+1}} \tag{41}$$

を得る。（41）式を整理すれば，

$$\sigma_{j+1} = \theta \sigma_j = \theta^{j+1} \sigma^0$$

$$\sigma_{j+1}^2 = \theta^2 \sigma_j^2 = \theta^{(j+1)2} \sigma_0^2 \tag{42}$$

となる。この関係式から，次の不等式を導出することができる[5]。

4　$E(\delta_t D_{t+k} \mid I_{t-1}) = E\ \{E(D_{t+k} | I_t) - E(D_{t+k} | I_{t-1}) | I_{t-1}\}$

$$= E(D_{t+k} | I_{t-1}) - E(D_{t+k} | I_{t-1}) = 0$$

　このことは，$\delta_t D_{t+k}$ が $t-1$ 期のいかなる情報からも独立であることを意味している。

5　（42）式より（38）式は，次のように書き換えられる。

$$Var(D) = \frac{\sigma_0^2}{1-\theta^2}$$

上式より（39）式を整理すれば，

$$Var(\delta P) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} \theta^{2k+1} \sigma_0\right)^2 = \left\{\frac{\sigma_0 \theta}{(1-\theta)^2}\right\}^2 = \frac{\theta^2}{1-\theta^2} Var(D)$$

となる。但し，$\theta = 1/(1+r)$ である。さらに，

$$\frac{\theta^2}{1-\theta^2} = \frac{1}{(1+r)^2 - 1} \equiv \frac{1}{r_1}$$

とすれば，　↗

$$\sigma(\delta P) \leqq \frac{\sigma_D}{\sqrt{r_1}} \tag{43}$$

$$r_1=(1+r)^2-1 \quad \left(但し, \frac{1-\theta}{\theta}\right)$$

左辺は，（36）式から実際に観察可能な δP の分散であり，右辺は理論的な δP の分散の最大値である。株価 δP の標準偏差の最大値は，配当分散の増加関数，割引率 r の減少関数として表される。株価の変動は，配当の標準偏差と割引率によって規定される上限が存在することがわかる。

3．株価・配当の定常性

先の二つのテストでは，現実の株価の系列が非定常的なランダム・ウォーク過程である可能性が高いことを考慮していない。現実の株価の系列が非定常であれば，変数の分散は時間とともに限りなく拡大する。したがって，もし株価の系列が非定常ならば（33）式の大小関係は逆になる可能性がある。したがって（33）式が満たされないからといって，簡単に株価はファンダメンタルズから上方に乖離していると判断することはできない。

（29）式の裁定式から予測誤差は，

$$u_t=P_{t+1}-P_t+D_t-r_tP_t=P_{t+1}+D_t-(1+r_t)P_t \tag{44}$$

となる。$Cov(P_t, u_t)=0$ より，（44）式は以下のように書き換えられる。

$$Cov(P_{t+1}, P_t)+Cov(D_t, P_t)-(1+r_r)Var(P_t)=0 \tag{45}$$

トレンドを除去した株価の系列が定常過程にあれば，

$$Var(P_{t+1})=Var(P_t)$$

が成立する。したがって，

$$Var(P_{t+1}-P_t)=2\,Var(P_t)-2\,Cov(P_{t+1}, P_t) \tag{46}$$

となる。（46）式を（45）式に代入して $Cov(P_{t+1}, P_t)$ を消去すれば，

$$r_tVar(P_t)-Cov(D_t, P_t)+\frac{1}{2}Var(dP_t)=0 \tag{47}$$

を得る。また相関係数の定義から上式を，

$$COR(D_t, P_t)=\frac{Cov(D_t, P_t)}{\{Var(D_t)Var(P_t)\}^{1/2}}$$

と書き換えることができる。上式（但し，COR は相関係数である）を（47）式に代入してを $COV(D_t, P_t)$ 消去すれば，

$$r_t\sigma_P^2-COR(D_t, P_t)\sigma_D\sigma_P+\frac{1}{2}\sigma_{dP}^2=0$$

↘ $Var(\delta P)=\dfrac{Var(D)}{r_1}$

となり，δP の分散の最大値が右辺によって決定される。

となる。ここで，$Var(P_t)$ は σ_P^2 と表される。この二次方程式を解けば，

$$\sigma_p=\frac{COR(D_t, P_t)\sigma_D \pm \{COR(D_t, P_t)^2\sigma_D^2-2r\sigma_{dP}^2\}^{1/2}}{2r_t}$$

となる。この解が正の根をもつためには，分子の第2項が正でなければならない。したがって，

$$COR(D_t, P_t)^2\sigma_D^2-2r\sigma_{dP}^2 \geq 0 \tag{48}$$

を得る。相関係数は1以下であるため，（48）式は

$$\sigma_{dP}<\frac{\sigma_D}{(2r_t)^{1/2}} \tag{49}$$

と書き換えられる。トレンドを除去した株価の標準偏差は，配当の標準偏差と割引率に依存し，その上限が存在している。これが3番目の分散（標準偏差）制約である。Shiller（1981）は，米国において（49）式の検証を行ったが，トレンドを除去した株価の標準偏差は上限の4倍を超えていた。この結果も，株価決定の諸仮定の一つが満たされていないか，あるいはトレンドを除去した株価が定常過程になっていないかを意味する。

4．Naive な期待と株価

上記のケースでは実証分析の際に，トレンドを除去した株価が定常過程にあることに強く頼っていなければならない。実際に，それが非定常であれば（49）式の大小関係は逆になる傾向をもっているためである。このような問題点に対して，Mankiw, Romer and Shapiro（1985）は，株価の系列が定常でない場合の分散制約を示した。

現実株価と，事後的な合理的価格は各々，

$$P_t=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}E(D_{t+k}\mid I_t)$$

$$P_t^*=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}D_{t+k}$$

であったが，これにナイーブな期待（naive forecast）に基づく株価（P_t^0）決定式を次のようにつけ加えた。

$$P_t^0=\sum_{K=0}^{\infty}\theta^{k+1}F(D_{t+k}\mid I_t)$$

$F(D_{t+k}\mid I_t)$ は，D_{t+k} の t 時点における naive な期待であり，合理的とは限らない予想である。naive な予想形成は合理的に予想を行う者には手に入る情報であるとする。まず，

$$P_t^*-P_t^0=(P_t^*-P_t)+(P_t-P_t^0) \tag{50}$$

と書き換えられる。（32）式より，$P_t^*-P_t^0=u_t$ であり，t 期に利用できる情報とは無相関である。一方，P_t と P_t^0 は t 期には既知である。したがって，

$$E_t[(P_t^*-P_t)(P_t-P_t^0)]=0 \tag{51}$$

が成立する。さらに，（50）式の右辺の二つの項は定常系列であるため，左辺も定常過

程である。(50）式と（51）式から，

$$E_t[(P_t^*-P_t^0)^2]=E_t[(P_t^*-P_t^0)^2]+E_t[(P_t-P_t^0)]^2$$

が導出され，次の分散制約を得る。

$$E_t[(P_t^*-P_t^0)^2] \geq E_t[(P_t^*-P_t)^2] \tag{52}$$

$$E_t[(P_t^*-P_t^0)^2] \geq E_t[(P_t-P_t^0)^2] \tag{53}$$

（52）式と（53）式が，ここでの分散制約を示している。(51）式から分かるように，このテストは P_t^0 を導入することによって変数が非定常な場合でも適用可能なテストを工夫したものとして位置づけることができる。

5．リスク・プレミアムの可変性

前節までの株価決定式では，投資家はリスク中立的な行動をとると仮定されていた。しかし，危険回避的な行動をとるならば，(29）式の裁定式において株式には，r にリスク・プレミアム分を上乗せした収益率を要求するはずである。仮に，利子率（割引率）が一定であってもリスク・プレミアムが大きく変動すれば，株価が大幅に変動する可能性が生じる。リスク・プレミアムは消費の決定と深く関わりがある。なぜなら，人々が金融資産を保有するのは，購買力を将来に移転して将来の消費を増大させるためである。異時点間の消費の最適条件より，危険資産に要求される割引率は，現在と将来の消費の限界代替率の予想値で決まる。以上の考えに基づいて，消費と資産収益との相関で決定されるリスク・プレミアムを導出する。これは，Mehra and Prescott（1985）に基づき，前節で説明した消費に基づく資産市場価格形成モデル（C-CAPM）から求められる。

個人は予算制約の下で，消費から得られる期待効用の無限期間に渡る現在割引価値が最大になるように行動するものとする。

$$MAX \quad E\{\sum_{t=0}^{\infty}(1+d)^{-t}U(C_t)\}$$

$$s.t.\ A_{t+1}=(1+r_t)(A_t-C_t) \tag{54}$$

A は金融資産残高，C は消費，d は主観的割引率を示す。この一階条件は異時点間における資源配分の「Keynes–Ramsey Rule」とよばれている次の Euler 方程式に対応している。

$$E\left[\frac{U'(C_{t+1})(1+d)}{U'(C_t)}(1+r_t)\right]=1$$

左辺の分数は，異時点間の消費の限界代替率 MRS である。したがって，金融資産が安全資産の場合は，

$$E[\{MRS_t\}(1+r_{ft})]=1$$

となる。r_{ft} は安全資産の利子率である。他方，金融資産が危険資産の場合には，

$$E[\{MRS_t\}(1+r_t)]=1 \tag{55}$$

と表すことができる。この（46）式より，

$$E[\{MRS_t\}(1+r_t)]=E[\{MRS_t\}E(1+r_t)]+COV(MRS_t,\ 1+r_t)$$
$$=\frac{E(1+r_t)}{E(1+r_{ft})}+COR(MRS_t,\ 1+r_t)\sigma_{MRS}\sigma_{1+r_t}=1$$

を得る。さらに変形すると，

$$\frac{E(1+r_t)}{E(1+r_{ft})}-1=-COR(MRS_t,\ 1+r_t)\sigma_{MRS}\sigma_{1+r_t} \tag{56}$$

となる。この式からリスク・プレミアムの上限を求めることができる。つまり相関係数の COR 絶対値の上限は１であることを考慮すると（56）式は，

$$r_t-r_{ft}=-(1+r_{ft})COR(MRS,\ 1+r_t)\sigma_{MRS}\sigma_{1+r_t}\leq(1+r_{ft})\sigma_{MRS}\sigma_{1+r_t} \tag{57}$$

と書き換えられる。ここで，上式の右辺における限界代替率を特定するために，次の相対的危険回避度一定の効用関数を仮定する。

$$U(C_t)=\frac{C_t^{1-a}-1}{1-a} \tag{58}$$

a は，相対的危険回避度を表す。このとき限界代替率は，

$$MRS_t=\left(\frac{C_{t+1}}{\mathrm{C}_t}\right)^{-a}\frac{1}{1+d} \tag{59}$$

となる。（59）式を（57）式に代入すれば，

$$r_t-r_{ft}\leq\frac{1+r_{ft}}{1+d}\sigma_{\{(C_{t+1}/C_t)^{-a}\}}\sigma_{1+r_t} \tag{60}$$

を得ることができる。リスク・プレミアムの上限は，安全資産の収益率・主観的割引率・消費増加率・相対的危険回避度・株式収益率の標準偏差に依存していることがわかる。

消費 CAPM 理論に基づき，株式等の危険資産の投資収益率と国債等の安全資産の投資収益率の格差（すなわち，リスク・プレミアム）は，相対的危険回避度および危険資産の収益率と消費の共分散に比例する。まず相対的危険回避度が大きいほど，家計は消費水準の変動を避けようとし，そのため消費水準を一定にする確実性等価を得るため，危険資産への投資を減少させるのでリスク・プレミアムは拡大する。次に，消費と高い相関をもつ危険資産は，家計の消費水準を大きく変動させる要因となるため，危険回避的な投資家は危険資産への投資を控えるためリスク・プレミアムは上昇する。

Mehra and Prescott（1985）は，米国において株式等の危険資産の収益率が安全資産の収益率を大きく上回り，その開きは消費者行動理論では説明がつかないほど大きいというリスク・プレミアム・パズルが生じていることを示した。Kocherlachota（1996）は，彼らの主張を再検討し，リスク・プレミアム・パズルが約 6% あることを確認した。Jagannathan, et al（2001）は，70 年代以降リスク・プレミアムは減少し，99 年にはマイナ

スの値になっていることを示している[6]。多くの研究でリスク・プレミアム・パズルの存在が検証されており，家計の資産選択行動において合理性が満たされていない可能性を確認することができる。

第4節　株価の時系列分析

第2節と第3節では，投資家の合理的な行動を前提として分析をすすめたが，既存の実証研究から投資家は必ずしも合理的に投資しているとは限らないことが示された。この背景には，誤差項の分散が一定であるとする標準線形回帰モデルの前提条件が成立していない可能性があることを示している。この場合，株価は大きい変化の後には大きな変化が続き，小さい変化の後には小さい変化が続くという金融時系列データの独特な特徴を有することになる。一度生じたショックが以後も残って株価に影響を与えていることを意味する。

Engle（1982）は，このような現象を説明するために，誤差項の条件付分散が時と共に変動する ARCH モデルを考案した。これは，条件付自己回帰型不均一分散モデルともよばれている。

線形回帰モデルの誤差項が ARCH プロセスにしたがうモデルは，一般的に次のように表すことができる。

$$Y_t = \beta X_t + u_t \tag{61}$$

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} \tag{62}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2 \tag{63}$$

ここで，Y_t は t 期の被説明変数，X_t は t 期の説明変数であり外生変数や AR モデルのようにラグ付変数を含む（$\alpha_0>0$, $\alpha_i \geq 0$（$i=1, 2, . . . , p$)。は説明変数の係数，u_t は誤差項である。さらに ε_t は i, i, d（independently and identically distributed）であり，$E(\varepsilon_t)=0$, $E(\varepsilon_t^2)=1$ が成り立っているとする。このとき u_t の条件付き分布は平均0，分散の正規 h_t 分布にしたがう。

$$u_t \mid I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

また，Y_t の条件付分布も次のように表すことができる。

$$Y_t \mid I_{t-1} \sim N(\beta X, h_t)$$

ε が正規分布にしたがうとき，u_t の確率密度関数 $f(u_t \mid I_{t-1})$ は，

$$(2\pi h_t)^{-1/2} \exp\{-(2h_t)^{-1} Y_t^2\}$$

6　これに対して，Attanasio, et al.（2002）は，イギリスのパネルデータを用いて，株式保有世帯に限定してみれば，彼らの消費水準と危険資産収益率の共分散は高いため，株式におけるリスク・プレミアム・パズルはある程度解消できるとしている。

である。u_t と u_{t-i} に対する確率密度関数の積から尤度関数は，

$$l=\frac{1}{T}\Sigma\left(-\frac{1}{2}\ln h_t-\frac{1}{2}u_t^2/h_t\right) \tag{64}$$

となり，パラメータの α と β に関して最大化される。但し，T はサンプル数である。誤差項が ARCH モデルにしたがっているか否かの検定はラグランジュ（LM）乗数検定によって容易に行える。具体的には，（63）式の決定係数を R^2 とすると，TR^2 がカイ二乗分布に従うことがわかっているので，

帰無仮説 $H_0: \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$

を検定することができる。また，ARCH モデルの推定は上述のように最尤法で行われる[7]。

本節では，月次の株式収益率（Y_t）が AR プロセスにしたがう場合について実証分析を行う。従って（61）式は，

$$Y_t=\beta_t Y_{t-1}+\beta_2 Y_{t-2}+\cdots+u_t \tag{65}$$

のように書き換えられる[8]。

データは，1980 年 1 月～2006 年 5 月までの日経平均 225（東京証券取引所）を対象とし，月次収益率を求めて，AR(1)－ARCH(1–3) のフレームワークで検証した。表 1 では，全期間における結果を示している。なお表の値は，α_t（$i=1, 2, 3$）の係数を示し，その下のカッコ内の値は t 値を示している。なお，*は 10%，**は 5%，***は 1% 有意水準を表している。表 1 の結果より，いずれのケースでも ARCH プロセスが存在していることが確認できる。とりわけ投資家は，過去 1，2 カ月の株価の変動（ショック）には比較的敏感に反応している。これは，新しい情報が発生すれば瞬時かつ正確に株価に反映されるという効率市場仮説を否定するものである。また，第 2 節と第 3 節で説明した投資家の非合理的な資産選択行動と整合性がある。株価変動に自己増殖的な特徴があることがわかり，同時にその背景にある投資家の期待形成に非合理性があることも推察される。

次に表 2 では，1986 年 1 月からバブル期間の 5 年間と，バブル崩壊期間も含む 10 年

7　ある時系列 Z_t が次のよう AR(1) プロセスにしたがっているとする。

$$Z_t=\rho Z_{t-1}+e_t$$

このとき Flavin（1983）によって，その時系列の標本分散は次のような下方バイアス b が生ずることが示されている。

$$b=1-\frac{E\{Var(\tilde{Z}_t)\}}{Var(Z_t)}=\frac{1+\rho}{(1-\rho)T}+\frac{2\rho(1-\rho T)}{(1-\rho T)^2T^2}$$

$Var(\tilde{Z}_t)$：Z_t の標本分散，$Var(Z_t)$：Z_t の母分散，T：サンプル数

8　ARCH モデルの拡張として代表的なものは，Bollerslev（1986）の提案した GARCH（generalized ARCH）が挙げられる。これは，ARCH の構造を次のように複雑化させたものである。

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i u_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{q}\gamma_i h_{t-j}$$

但し，$\gamma\geqq 0$ である。

表1　ARCH 分析

	全期間（1980年1月－2006年5月）		
	ARCH（1）	ARCH（2）	ARCH（3）
α_0	0.270 E–02 （1.658*）	0.209 E–02 （8.463***）	0.190 E–02 （7.941***）
α_1	0.157 （2.180**）	0.138 （2.059**）	0.137 （2.111**）
α_2		0.219 （2.120**）	0.192 （1.983**）
α_3			0.091 （1.390）
対数尤度	461.155	464.840	464.102

表2　バブルと株価

	86年1月－90年12月			86年1月－95年12月		
	ARCH（1）	ARCH（2）	ARCH（3）	ARCH（1）	ARCH（2）	ARCH（3）
α_0	0.201 E–02 （3.651**）	0.188 E–02 （3.028***）	0.943 E–02 （1.215）	0.398 E–02 （6.362***）	0.304 E–02 （4.428***）	0.248 E–02 （3.032***）
α_1	0.654 （1.888*）	0.546 （1.312）	0.355 （1.672*）	0.160 （1.381）	0.130 （1.345）	0.147 （1.506）
α_2		0.135 （0.371）	0.316 （0.976）		0.242 （1.159）	0.312 （1.313）
α_3			0.203 （1.345）			0.018 （0.223）
対数尤度	81.218	79.558	82.671	150.880	151.270	153.034

間に分けて検証した結果が表されている。バブル期間では，ARCH(3) を除いて，α_1 が有意であり，過去に株価が上昇したという事実だけで以後も株式市場に継続的に資金が流入し株価の上昇をもたらしていることがわかる。株価の月次収益率の誤差項に自己回帰型不均一分散があれば，株価はファンダメンタルズで説明できる以上に上昇することになり，第2節のボラティリティ・テストで現実の株価変動が理論的に導出される変動よりも大きかった原因を理解することができる。なおバブル崩壊後には，顕著な ARCH プロセスは生じていない。

次に表3では，1996年からの約10年間と2001年以降の約5年間に分けて検証した結果を示している（α_0 は非負であり，他の α はゼロと1の間に限るという制約がおかれている。もしパラメータが境界上の値となると，その標準偏差は他の推定値をその条件付きにするためにゼロとおかれる）。いずれも ARCH の定数項は有意だが，その他の係数については有意ではなく，誤差項に自己回帰型不均一分散は存在していない。このことから反対に，顕著な ARCH プロセスが現れた先のバブル期間は，投資家の資産選択行動に異常な現象が生じていた期間と特徴づけることができる。自己増殖的な株価の

表3　1990年代央以降のARCH分析

	96年1月－2006年5月			2001年1月－2006年5月		
	ARCH（1）	ARCH（2）	ARCH（3）	ARCH（1）	ARCH（2）	ARCH（3）
α_0	0.295 E–02 （4.835***）	0.269 E–02 （3.028***）	0.273 E–02 （3.993***）	0.249 E–02 （3.077***）	0.234 E–02 （2.263***）	0.239 E–02 （2.231***）
α_1	0.013 （0.082）	0.012 （0.817）	0.998 E–2 （0.061）	0.832 （0.331）	0.096 （0.388）	0.110 （0.410）
α_2		………	………		0.024 （0.090）	0.975 （0.035）
α_3			0.078 （0.445）			………
対数尤度	184.36	182.548	181.546	98.435	97.464	95.471

上昇は，株式市場への投資の増加を意味し，その背景には結果として，家計の資産選択行動において相対的危険回避度は減少している。その程度が大きくなるほど，株価およびマクロ経済活動は不安定となり，この実証結果は植田（2006, a）で展開された金融不安定性理論と整合性があるものとして位置づけることができる。

第5節　まとめ

本論では，まず第2節において代表的な二つの証券価格理論を取りあげ比較検討した。CAPMにおいて，効率性とは株式市場で全銘柄の需給が均衡している状態を示している。CAPMでは，市場に存在している全ての危険資産を含んだマーケット・ポートフォリオが，個別証券の期待収益率を導出する上で重要な役割を果たしている。仮に，マーケット・ポートフォリオが市場に存在しているすべての危険資産を含まないとすると，誰も保有していない幾つかの証券が存在することになる。なぜなら，投資家はすべて同質だからである。このような状態は均衡と矛盾する。有効（効率）フロンティアそのものが導出できず，すべての個別銘柄の期待収益率を求めることはできなくなる。[9]

9　日本では，総資産に占める住宅や土地等の不動産の比率が高く，また過去にみられたような不動産価格の変動を考慮すれば，不動産投資を危険資産とみなして資産選択行動を考えるべきという議論もある。松浦・白石（2004）では，日本の家計は各国と比較して，①持ち家比率が高い，②危険実物資産の資産に占めるシェアが高い，③危険金融資産の保有比率が低い，④危険金融資産の資産に対するシェアが低い傾向にあることを明らかにしている。したがって，家計の資産選択に金融資産のみならず実物資産も含めて分析すると，日本の家計は持ち家比率が高く，資産に占める土地・住宅の比重が高いことは危険実物資産を多く保有していることを意味する。この結果，株式等の危険金融資産と土地・住宅の危険実物資産をあわせた危険資産全体の保有資産に占める比率は米国の家計と大差ないとする実証結果もある（経済企画庁（1999））。しかし，松浦・白石によると，持ち家比率は，日本は70.2%，米国は66.3%とあまり変わらず，家計資産に占める住宅比率は突出していないことが示されている。
　一方，家計が借入制約や信用割当に直面する確率が高ければ，株式等の危険資産の保有を減少させて，将来の返済や消費に備えるべく短期の安全な流動資産をより多く保有する可能性がある。将来必↗

APT において効率性とは，もはや裁定の機会が存在しないことを意味している。しかし，いずれも効率性が満たされていれば，市場の平均以上の収益を得ることはできないという結論は同じである。しかし実証分析において，各理論とも年々説明力が低下傾向にあることを確認した。

次に第 3 節では，割引配当モデルを用いて現実の株価の変動を示す分散が，理論上導出される分散上限値内に収まっているかを検証することによって，株価のボラティリティが経済のファンダメンタルズに対して忠実に反応しているかを分析した。既存研究では株価は過度に変動していることが明らかにされた。これらの結果は，

①将来予想が合理的に形成されていない

②株価の決定式である配当割引モデルの仮説が誤っている

等，第 3 節で示した 6 点の結合仮定のうち少なくとも一つは成立していないことを示している。あるいは，過去の情報のショックに過度に反応し，株式収益率の誤差項に不均一分散が存在していることも考えられる。そこで第 4 節では，株価収益率の変動を時系列モデルの一つである ARCH モデルを用いて検討した。とりわけバブル期間において，株式収益率は過去 1，2 カ月前のショックに反応していることが示された。このことは，株式収益率に関して過去の予測誤差のショックが，後の株式収益率に影響を及ぼしていることを意味する。

上述のように株価がファンダメンタルズから大幅に乖離した要因としては，ARCH モデルの実証分析でみたように，過去のショックが将来期待を変化させて，その将来期待の変化が資産選択行動に影響を与えて株価を変動させ，さらに将来期待を変化させるという自己増殖的なプロセス等で生じていると考えることができる。

最後に，本論では十分に検討されていない課題をあげる。

配当割引モデルは，遠い将来までの配当水準を考慮に入れているため比較的長期的視野に立った投資家を想定している。現実に，投資家の中には近視眼的視野に基づいて期待形成を行っている者もいると思われる。このような期待形成は，株価が合理的価格から乖離して大幅な変動をもたらす可能性がある。期待期間を明示的に取り扱った理論・実証分析を行う必要がある。

さらに，金融政策や財政政策のアナウンスに過度に反応しがちであることがしばしば指摘されている。このような情報に対する反応の大きさについても検証されることが望まれる。また，本論ではリスク・プレミアムの可変性について論じているが，相対的危険回避度がどのような要因によって変化するのかを理論的に求める必要性がある。この

↘ 要な資金をある程度確実化させるためにも，価格変動リスクを伴う株式への投資を控えるほうが合理的である。Guiso, et al（1996）は，イタリアにおいて借入制約が危険金融資産の需要に負の影響を及ぼすことを実証分析から確認している。日本では，松浦・白石（2003）が同様の結果を得ている。

点は，金融政策の波及効果の有効性を論じるとき重要なポイントとなる。

最後に，本論では月次の株式収益率で検定推定を行ったが，日次あるいは週次データも用いて，より詳細に分析する必要がある。また複雑な不均一分散を仮定したGARCHモデル等の検定が望まれる。

＊本稿作成に当たり文部科学省科学研究費補助金基盤研究（C）「フィナンシャル・アクセラレーター仮説と金融不安定性に関する国際比較分析」（研究課題番号：17530252）の助成を受けた。記して，感謝の意を表したい。また本稿は，植田（2006, b）の第9章を修正加筆したものである。

参考文献

青山　護（1979）「リスクの評価について－わが国株式市場における実証研究－」『経済学研究』（東京大学），第22号，pp. 42–52.

植田和男，鈴木　勝，田村達郎（1986）「配当と株価－シラーテストの日本への応用－」『フィナンシャル・レビュー』（財務省財政金融研究所），第2号，pp. 58–67.

植田和男（1989）「わが国の株価水準について」『日本経済研究』（日本経済研究センター），No. 18, pp. 4–15.

植田宏文（2004）「金融資産価格とマクロ経済活動」『同志社商学』（同志社大学）第56巻第2/3/4号，pp. 186–209.

植田宏文（2006, a）「内生的貨幣供給と総需要」『同志社商学』（同志社大学）第57巻第5号，pp. 117–137.

植田宏文（2006, b）『金融不安定性の経済分析』晃洋書房.

経済企画庁（1999）『平成11年度年次経済報告』大蔵省印刷局.

佃　良彦（1990）「Taylorモデル・ARCHモデルによる株価変動分析」『金融・証券計量分析の基礎と応用』刈谷武昭編著（第6章所収），東洋経済新報社.

松浦克己，白石小百合（2003）「住宅・土地と金融危険資産の相互関係」2003年度日本経済学会報告論文.

松浦克己，白石小百合（2004）『資産選択と日本経済－家計の視点から－』東洋経済新報社

Arrow, K. J.（1970）*ESSAYS IN THE THEORY OF RISK BEARING,* North-Holland.

Blanchard, O. J. and S. Fischer（1989）*LECTURES ON MACRO ECONOMICS,* MIT Press.

Friend, I. and M. Blume（1973）"A New Look at the Capital Asset Pricing Model," *Journal of Finance,* Vol. 28, No. 1, pp. 19–33.

Engle, R. F.（1982）"Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation," *Economerica,* Vol. 50, No. 4, pp. 987–1008.

Fama, E.（1970）"Efficient Capital Markets ; A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance,* Vol. 25, No. 2, pp. 383–417.

Flavin, M.（1983）"Excess Volatility in the Financial Markets : Reassessment of the Empirical Evidence," *Journal of Political Economy,* Vol. 91, No. 6, pp. 929–956.

Guiso, L., T. Jappeli and D. Terlizzese（1996）"Income Risk, Borrowing Constraints and Portfolio Choice," *American Economic Review,* Vol. 86, No. 1, pp. 158–172.

Hoshi, T.（1986）"A Test of Stock Price Volatility : The Case of Japan,"『ファイナンス研究』（日本証券経済研究所），No. 5, pp. 1–21.

Jagannathan, R., E. McGrattan and A. Schrbina（2001）"The Declining U. S. Equity Premium," *NBER Working Paper Series,* No. 2392.

Kocherlachota, N.（1996）"The Equity Premium : It's Still a Puzzle," *Journal of Economic Literature,* Vol.

36, No. 1, pp. 42–71.

Lintner, J.（1965）“The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets,” *Review of Economics and Statistics,* Vol. 47, No. 1, pp. 13–37.

Mankiw, G., D. Romer and M. Shapiro, （1985）“An Unbiased Reexamination of Stock Market Volatility,” *Journal of Finance,* Vol. 40, No. 3, pp. 677–687.

Marcowitz, H.（1952）*PORTFOLIO INVESTMENT,* Macmillan.

Markowitz, H.（1959）*PORTFOLIO SELECTION : EFFICIENT DIVERSIFICATION OF INVESTMENT,* John Wiley and Sons.

Marsh, A. and R. Merton（1987）“Dividend Behavior for Aggregate Stock Market,” *Journal of Business,* Vol. 60, No. 1, pp. 1–40.

Mehra, R. and E. Prescott（1985）“The Equity Premium : A Puzzle,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 15, No. 2, pp. 145–162.

Modigliani, F. and M. Miller（1958）“The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment,” *American Economic Review,* Vol. 48, No. 3, pp. 261–297.

Modigliani, F. and M. Miller（1963）“Corporate Income Taxes and the Cost of Capital,” *American Economic Review,* Vol. 53, No. 3, pp. 433–443.

Roll, R.（1977）“A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests,” *Journal of Financial Economics,* Vol. 4, No. 1, pp. 126–176.

Roll, R. and S. Ross（1980）“An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory,” *Journal of Finance,* Vol. 35, No. 5, pp. 1073–1104.

Ross, S.（1976）“The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing,” *Journal of Economic Theory,* Vol. 13, No. 3, pp. 341–360.

Sharpe, W.（1964）“Capital Asset Prices ; A Theory of Market Equilibilium under Conditions of Risk,” *Journal of Finance,* Vol. 19, No. 3, pp. 425–442.

Sharpe, W.（1984）*INVESTMENT,* Prentice-Hall.

Shiller, R.（1981）“Do Stock Prices Move too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?” *American Economic Review,* Vol. 71, No. 3, pp. 421–436.

Shiller, R.（1982）“Consumption, Asset Markets and Macro Economic Fluctuation,” *Carnegie Rochester Conference on Public Policy,* Vol. 17, No. 1, pp. 203–238.

Shiller, R. and S. Grossman（1981）“The Determinants of the Variability of Stock Market Prices,” *American Economic Review,* Vol. 71, No. 1, pp. 222–227.

Shiller, R.（1991）*MARKET VOLATILITY,* Basil Blackwell.

Summers, L. and J. Porteba（1984）“The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations,” *NBER Working Paper Series,* No. 1462.

Tobin, J.（1958）“Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk,” *Review of Economic Studies,* Vol. 25, No. 2, pp. 65–86.

Weil, S.（1989）“The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 24, No. 3, pp. 401–421.