カルドア型非線形投資関数と不規則な景気循環の発生について

森　田　雅　憲

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　非線形投資関数の導出
Ⅲ　マクロ動学モデル
Ⅳ　数値シミュレーション
Ⅴ　むすびにかえて

Ⅰ　は　じ　め　に

カルドアの非線形景気循環モデルは[1]，内生的な景気循環を説明するすぐれた理論として景気循環論のテキストの中で不動の位置を占めている。彼の基本的なアイデアは，ある程度の規則性をもつ現実の景気循環を，非線形の投資関数あるいは貯蓄関数によって生み出されるリミット・サイクルとして捉えるというものであった。つまり極限的に収束する一定振幅の規則的な循環として理解したのである。しかし現実の景気循環は，たしかにある程度の規則性をもっているものの，リミット・サイクルが描き出すものよりはるかに複雑で，かつ不規則な一面をもっている。従来，こうした不規則性は，モデルの外から働くショックやノイズによって説明されうるものと暗に想定されてきた。しかし，現在では経済変動理論の基本的な分析手法の一つになった非線形モデルの数値解析を適用すれば，カルドア・モデルをほとんど修正することなく不規則な景気循環を内生的に生み出す

1　Kaldor (10).

ことが可能になる。

従来，カルドア・モデルは基本的には2次元で定式化されていたため，連続時間を想定する限り，持続的景気循環はたかだかリミット・サイクルとして表すほかなかった。だが周知のように，離散時間を用いた写像タイプのモデルでは，二次元以下の次元でも極めて複雑な運動が発生しうる。この論文では，離散時間を用いてカルドア・モデルを修正し，主として数値シミュレーションを用いて不規則な経済変動の可能性を探る。

カルドア・モデルに見られるような非線形の投資関数や消費関数を用いて不規則な景気循環が発生することを示そうとした研究は，すでに数多くなされている[2]。しかし従来の研究に共通して見られる特徴は，不規則な景気循環を生み出すために不可欠である関数の非線形性についてはほとんど言及されず，多くの場合天下り的に仮定されてきたことである。しかしこうした方法では，採用された投資関数の背後にどのような投資行動があるのかが明確でなく，したがってシミュレーション結果の経済学的解釈の幅も狭められることになる。非線形性を生み出す何らかの「ミクロ的基礎付け」が望まれるところである。こうしたことから，本稿では関数に非線形性をもたらす原因についても検討を加える。

この論文の内容は大きく二つの部分からなる。前半は，S字形のマクロ的投資関数を不確実性下での経済主体の行動とその確率分布から導出する部分である。そこでの議論の特徴は，経済主体の行動を従来の利潤最大化あるいは効用最大化行動として定式化しなかったことである。それに代えてHeiner や進化論的認識論の議論を参考に代替的な行動モデルの構成を試みた[3]。この「ミクロ的基礎付け」によって，S字型の投資関数にカルドア

---

2 たとえば本稿の研究に比較的近いものとしては Lorenz(13), pp. 129-135 がある。その他にも Herrmann (9), Day=Shafer (4), Semmler (17), Sen (16) など数多くリストアップすることができる。

3 本稿と同様の行動モデルは，拙稿（18）でも異なった問題について展開されている。

とは異なる経済学的意味をもたせることができた。後半では，前半で導いた投資関数を用いてマクロ動学モデルを構成し，時間経路の特性を数値シミュレーションで分析している。そしてカオス的な運動の発生を示すとともに，パラメーターの変化に伴うシステムの反応を若干のケースについて検討した。

II 非線形投資関数の導出

カルドアの非線形投資関数は図1に描いたように，右上がりのS字形をとっている[4]。この理由としてカルドアは次のような根拠をあげている。経済活動水準がきわめて低調なとき，つまり国民所得がごく低い水準にあるときには大きな遊休設備が存在し，経済活動が少々高まったぐらいでは投資は誘発されない。また逆に経済活動水準が非常に高い場合には，建設費用の増加・資金借り入れのコストの上昇によって，企業の投資意欲がそが

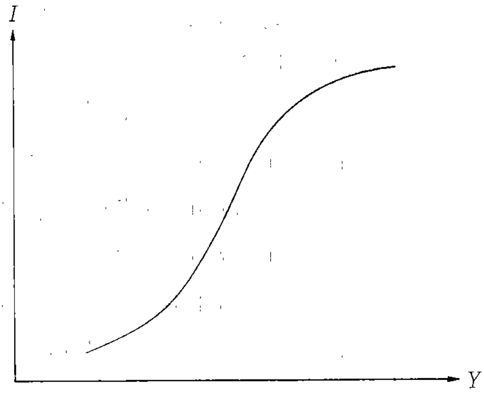

図1

4 Kaldor (10) では，横軸は雇用量で表された経済活動水準となっているが，ここでは慣例にしたがいそれを国民所得で表すことにする。

れ投資の足を引っ張る。こうした理由によって投資関数は国民所得の変化に対してＳ字形の反応を示す，と。

しかしこのような理由付けには若干の問題がある。第1に，所得水準が低いという事実だけから遊休設備があると結論づけることはできない。資本設備の補塡投資が低調で生産能力も同時に低い水準に落ち込んでいる場合，低い所得水準と少ない遊休設備は両立しうる。同様の推論を，反対の局面にあてはめれば，高所得水準であってもやはり大きな遊休設備の出現することがありうる。第2に，所得水準が高いときには資金のボトルネックに遭遇するということだが，これがもし単にマネー・サプライの不足のことを指すのであれば，やはり検討すべき問題をはらんでいる。というのはカルドア自身は貨幣供給内生説の主唱者であり，その主張によれば所得水準の拡大自体がマネー・サプライの水準を引き上げるからである[5]。実際，所得水準が高くなるほど企業業績は好調だと考えられるから，通常，銀行信用はより供与されやすくなるはずである。したがって，信用創造が弾力的に行われる経済についていえば，高い所得水準そのものが信用のボトルネックの原因となると主張することはできない。もちろんこうした信用創造に拡張限度を考えることは可能である。しかし中央銀行が lender of last resort としてアコモデイティヴな貨幣供給を続ける経済ではベース・マネー自体が内生的に変化するので，この場合には信用の拡張限度のようなものを外生的に与えることには無理があろう[6]。第3に，建設費用の上昇という根拠も，需給ギャップを産出量で調整するという固定価格モデルにはなじまないように思われる。さらに建設関連産業自体の活発な供給活動によって国民所得が高水準をとっているなら，建設費用が高騰すると

5　Kaldor (11).

6　貨幣供給が内生的かどうかをめぐっては周知のように長い論争の歴史がある。ここではこの問題自体を取り上げることが目的ではないので，論争の詳細には立ち入らない。

は必ずしも断定できない。こうした理由で，S字型の投資関数には何か別の根拠が必要となる。

以下では，カルドアとは異なった理由から，投資は国民所得に対してやはりS字形の反応を示すと考える。そのためにまず，主体の投資行動を定式化しておこう。

経済主体は，「不確実性」の中で意思決定を行っているが，その不確実性の多くは主体が解決すべき問題の複雑さにたいして，主体が具備している問題解決能力の低さに起因していると考えられる。[7] このギャップの存在自体を意識的・無意識的を問わず意思決定主体が何らかの形で知っているために，問題の完全な解決を求めず他の代替的な方法に頼ることがしばしばおこる。それは，多くの問題の場合，完全な解でなくてもとりあえずは「なんとかなる」からである。投資の意思決定に直面している企業の場合，どの分野にどの程度そしていつ投資をすれば最も投資収益が高くなるか，という問題を完全に解こうと思えば，莫大な時間や費用をかけなければならず，また仮にかけたとしても完全な解を得られるかどうかは事前にはわからない。というのは，この問題は論理的に完全な解答を拒否する性質のものであるからである。企業は将来の経済状態についての期待のもとに現在の意思決定を下さなければならないが，将来の状態自体は今なそうとしている自らの意思決定に影響される，という循環論法的な構造があるからである。加えて，そのような問題に無数の企業が同時に直面しており，彼らは互いに他者がどのような行動をとるかも予想しなければならない。すなわち，ゲーム論的な状況にもおかれているのである。

投資行動に伴う不確実性の主要な源泉はここにあるのであって，将来の出来事が確率的にしか知り得ないことのみが重要なわけではない。したが

---

7 Heiner (7) はこの能力 competence と問題の困難さ difficulty の開きを C-D ギャップと呼んだ。またこのギャップに起因する不確実性を Dosi=Egidi (5) は procedural uncertainty と命名している。

って，通常は，ある一定の費用と時間内で得られたオプションの中から，何らかの基準に照らして一つの行動を選びとっていると考えてよいだろう。[8] そのような選択が許されるのは，収益率が最大でなくても，そうした行為が平均して損失を生まなければ，とりあえずは企業として存続できるからである。以下ではこうした意思決定のありようを簡単なモデルで定式化する。

いまある投資行為Aの選択に繰り返し直面している主体を考えよう。この主体はそれ以外の投資行為は行っていないものとする。投資行為Aが収益を生むかどうかは，将来時点での経済環境に依存していると考える。将来に発生しうる状態はn種類あり，そのうち1から$h(1<h<n)$までの状態が発生すると主体は利得を上げることができるとする。また$h+1$からnまでの状態が発生すると損失が発生すると考える。いま将来の状態をS_i,$(i=1,2\cdots n)$と表そう。そして$P(S_i \mid A)$でこの主体が行為Aを選択したときに状態S_iが発生する確率，g_iを状態S_iが発生したときの利得，l_iを同じく損失とする。このとき投資行為Aを可能な選択肢のひとつとして保持している主体が存続しているとすれば，その主体については少なくとも次の条件が成立していると考えられる。[9]

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{h} g_i P(S_i \mid A) - \sum_{i=h+1}^{n} l_i P(S_i \mid A) > 0$$

というのは，もしこの条件が事後的に満たされていなければ，主体は平均して損失を生み出しているので，この投資行為を行動の選択肢として保持しておく意味がないからである。つまり上の条件はこの投資行動を意思決

8　通常の条件付き最大化問題は，その問題自体を解く費用は考慮されていない。しかし，最大化問題を解く際に，問題自体を解くいわばメタ費用を考慮した場合と，そのような費用を考慮しない場合とでは結果は異なってくるだろう。

9　ここで，利得や損失は必ずしも効用や利潤で測られているとは限らない。主体の存続に有利に働くものが利得，不利に働くものが損失とされている。しかし実際には貨幣利潤がマイナスになれば企業は倒産せざるをえないので，利得や損失は貨幣利潤の正負で定義されると考えて良いだろう。

定の選択肢の中に入れておくことが有利かどうかの分岐点を示している。この不等式を事後的損益分岐条件と呼んでおこう。

ここで事後的損益を評価する際に用いた確率が $P(S_i)$ ではなく，$P(S_i \mid A)$ となっていることは，投資収益が投資行為の選択と切り離して考えられないことを意味している。主体は人為・自然を問わず環境から情報を受け取りそれを処理して行為の選択を行っているので，主体が投資財の購入をオプションとして保有している場合とそうでない場合とでは経済状態は違っていると考えられる。したがって，経済状態が異なるのであれば，同じ投資財であってもその収益力は異なると考えるのが自然であろう。

たとえばある企業が新たに工場を建設する計画を立てたとする。おそらくその背景には，現在の順調な製品出荷や将来に明るい展望をもてる経済情勢が控えているであろう。逆にそのような計画を投資行為の選択肢としてまったく保有しないときには，経済情勢は厳しいものと考えられる。投資環境がこのように異なっているのであれば，同じ立地・技術・規模の工場を建てたとしても，とうぜんその工場の収益力は異なってくるはずである。条件付き確率を用いるのはこのことを明示するためである。

さて，以下ではこの投資財市場の潜在的需要者として存在しているすべての主体は環境に適合していると想定する。ここでいう環境適合とは，言い換えれば，過去の経験からの学習が十分行われ，その結果おしなべてみれば＜いつ投資し，いつ投資すべきでないか＞を各主体が十分知っているという意味である。どの主体も平均して損失を生み出すような投資行為を行動の選択肢としてもはや保有していない状態である。つまり考察の対象となるどの主体も，(1)式を満たさないような行為は行動の選択肢としてもっていないと仮定するのである。

ここで次のような表記を導入しておこう。

$$P(R \mid A) = \sum_{i=1}^{h} P(S_i \mid A)$$

$$P(W \mid A) = \sum_{i=h+1}^{n} P(S_i \mid A)$$

$$g = \sum_{i=1}^{h} g_i \frac{P(S_i \mid A)}{P(R \mid A)}$$

$$l = \sum_{i=h+1}^{n} l_i \frac{P(S_i \mid A)}{P(W \mid A)}$$

こうした表記によって(1)式は次のように書き換えられる。

(2) $gP(R \mid A) - lP(W \mid A) > 0$

ベイズの定理を用いて事後確率を事前確率に変換すると，

(3) $P(x \mid A) = \dfrac{P(A \mid x)P(x)}{P(A \mid R)P(R) + P(A \mid W)P(W)}$，$(x = R, W)$

となる。ついで(3)式を(2)式に代入すると，次式を得る。[10]

(4) $\dfrac{r}{w} > \dfrac{l}{g} \cdot \dfrac{1-\pi}{\pi}$

ただし $r = P(A \mid R)$，$w = P(A \mid W)$，$\pi = P(R)$ および $1-\pi = P(W)$ である。(4)式で与えられた条件は，Heiner が信頼性条件と呼んだものと同じである。[11] 彼に倣ってここでも(4)式左辺を信頼率，右辺を許容限界と呼ぶことにする。

さて，情報処理能力は主体が異なれば異なっていると考えるのが自然だろう。そして情報処理能力の高い主体であればあるほど，正しい行動を選びとる確率が誤った行動をとる確率より高くなる傾向があると考えると，信頼率の高さが主体の情報処理能力の高さを反映していると考えることができる。したがって，正しい行動を選びとる確率が高くても，誤った行動を選びとる確率が同様に高ければ，情報処理能力が高いとは考えない。

時間を通じて繰り返し同じような意思決定を行っている主体は，学習効果が働いて時間とともにより高い信頼率で意思決定を行うようになるだろ

10 以下では簡単化のために g や l はパラメーターとして扱う。
11 Heiner (7), (8) など参照。

う。また新しい情報のインフローがあればそれも信頼率に影響を与えるだろう。こうした場合，ベイズの定理を経由して事後的損益分岐条件から導かれた(4)式で与えられる信頼率は，学習や新しい情報によって改訂された新しい事前の信頼率と異なるかも知れない。主体の行動を分析するためには，後者の信頼率を用いるべきであろうが，以下では単純化して(4)式の信頼率を用いることにする。環境が定常的で信頼率に影響を与えるような新奇な情報は生み出さず，しかも主体が環境に十分適合していると考える場合には，こうした想定は支持されるだろう。

正しい状態の発生確率は環境条件によって規定されるものであり，同じ意思決定に直面するすべての主体にとって共通だと考えよう。また利得や損失は主体が変われば異なった値をとるかも知れないが，これらも主体間で共通だと考えよう。こうすれば特定の主体がある意思決定問題に繰り返し遭遇することで損失を被らないためには，主体固有の信頼率が主体間で共通の許容限界を超えているかどうかにかかってくる。もし信頼性条件を満たしている主体であれば，平均して利得を生み出すことができるので，そうした行為を選択肢として残しておくことに意味がある。逆に信頼率を満たさなければ損失を被るので，そうした行為を選択肢として保持し続けることはないだろう。たとえば投資家が株式市場で繰り返し取引に参加しているのは，株式を売買するという行為が平均して利得を生み出しているからだ。そうでない主体は損失を平均して被るので，株式を売買するという行為を行動のオプションから外し株式市場から撤退することになる。市場からの撤退を淘汰にたとえると，許容限界はその投資市場の淘汰圧の高さを示すものと解釈できるだろう。

この信頼性条件による行動モデルは，情報処理能力の低い主体は正しい状況がより高い発生確率で生じる行動を選択しなければ，淘汰に生き残れないことを意味する。これは Riedl や Wuketits らが精力的に展開して

いる進化論的認識論が示唆する行動モデルに通底するものである。[12] 進化論的認識論の基本的な知見によれば，単細胞生物のような情報処理能力の低い段階から，生命は蓋然性 probability の高さだけをたよりに進化してきた。個体と種の学習を通じて生命が獲得してきた認識の形態は，完全合理性を追求する方法ではなく，環境の蓋然性の高さにまず第1に依拠するものである。主体がとりうるある行動がさしあたって当該生命体に損失を与えるものでなければ，そしてそのような行動をとるべき状況の発生する蓋然性が十分高ければ，そのような行動に特化することで情報処理能力の低い生命であってもとりあえず淘汰に生き残れるというのである。

主体均衡論は完全な演繹的合理性，あるいは行動の論理的必然性を追求する主体をモデルとしている。しかしそれとは対照的に，進化の過程で生命体が学習してきた主体内での情報処理の方法は帰納的発見法であり，また論理的必然性が問題なのではなく蓋然性の高さを頼りとするスタイルである。進化論的認識論の主唱者の一人 Riedl は次のように述べている。「客観的であるためには蓋然性がどのくらい客観的でなければならないかとか，そもそも蓋然性がどのくらい客観的であり得るかと問う代わりに，発見法的な理性は，我々がすでに知っているように確実性の度合いを用いて処理を行うのである。それはなるほど，絶対的な確実性に限り無く近づくことはできるが，しかし，決してそれに到達することはできない。どんなに客観的で理性的な蓋然性であっても論理的強制力を持つ合理的推論のためには決して十分とは言えない。しかし自己定位を求める生物にとって必要な蓋然性推論のためには，ほとんどの場合これで充分に事足りるのである。」[13]

さてつぎに，この主体が投資行為 A を選択することが結果的に正しくな

12 進化論的認識論については Riedl（15）や拙稿（19）を参照されたい。
13 Riedl（15），訳書128ページ。

る状況が発生する確率πの決定要因について見よう。言い換えれば，どのような環境条件が投資収益に影響を及ぼしているか，という問題である。ここで，現在の活発な経済活動は現在なされている投資の将来時点での収益力にとってプラスに働く，と考えてよいだろう。経済活動を所得水準で示すと，現在の高い所得水準は人びとの期待がより楽観的になることを通じて，将来の支出をより容易なものにするよう作用するだろう。また活発な経済活動は，生産技術や通信網の拡充を通じて生産や市場取引にとって制約となる条件をゆるめる方向で作用するだろう。またケインズが強調する企業の期待や確信の状態にプラスの影響を与えることで，経済主体間での取引成約や信用供与にかかるコスト・時間なども軽減されるだろう。こうした理由で，現在の活発な経済活動は次期以降の投資収益に対し望ましい影響を与えると考えてよい。ここで，今期なされる投資は次期以降に稼働状態に入ると考えれば，以上のことより今期の投資の収益に関わるπは，現在の所得水準によって影響されると仮定してよいだろう。この関係を次の関数で定義しておく。[14]

(5) $\pi_t=\pi(Y_t)$, $\pi'>0$.

したがって信頼性条件は次のように表される。[15]

(6) $$\frac{r}{w}>\frac{l}{g}\,\frac{1-\pi(Y_t)}{\pi(Y_t)}$$

今期なされる投資の許容限界をT_tとすれば，

(7) $$T_t=\frac{l}{g}\,\frac{1-\pi(Y_t)}{\pi(Y_t)}$$

---

14 もちろん実際には資本設備の耐用年数は数期間にわたるから，投資の収益力は今期の経済活動だけではなく将来のそれからも影響を受けるだろうし，また過去の長い期間にわたる経済状況からの影響も受けているはずである。このような場合も分析できるが，多期間の分析になるため煩瑣になる。ここでは簡単化のために(5) 式のように仮定する。

15 期待利得や期待損失も現在の経済活動水準の影響を受けるだろう。しかし，もし現在のより高い所得水準が利得を引き上げ，損失を引き下げる方向で影響すると考えるなら，以下の議論は実質的な修正を受けない。

であり，それを所得について微分すると次のようになる。

(8) $\dfrac{dT_t}{dY_t}=-\dfrac{l}{g}\dfrac{\pi'}{\pi(Y_t)^2}$

したがって，今期の投資の許容限界 T_t は今期の国民所得の減少関数である。つまり，今期の経済活動が活発になればなるほど，今期の投資の将来時点での期待利得が期待損失を上回る確率が高くなるということである。それを簡略化して次式で与えておく。

(9) $T_t=T(Y_t)$, $T'<0.$

さて，実際にはそれぞれの主体は互いに程度の異なる情報処理能力の下で投資行動を行っていると考えられる。もし情報処理能力の高い主体であれば，その信頼率は高いと考えてよいだろう。彼らは平均的にみれば，いつ投資すべきか，またいつ投資すべきでないかを正しく判断できている。こうした主体であれば，所得水準が低く投資環境が必ずしもよくない場合でも，投資行為 A を行動の選択肢として保有しておくだろう。つまり投資財の売り手の側からみれば，そうした主体は投資財の潜在的な需要者となるのである。逆に情報処理能力の低い主体であれば，投資行為 A からは潜在的には利益を得にくいので，より高い所得水準が実現し正しい状態の発生確率がある程度以上高くならないかぎり，そうした投資行為を選択肢から外してしまうだろう。つまり，投資財の市場にとって潜在的な需要者とはならないのである。こうした主体間での情報処理能力は，主体数が十分多い場合には，全体として連続した単峰形の確率分布 $f(-)$ に従うと仮定しよう。さらに投資財の総需要量は，その投資財市場の潜在的需要者の規模に比例すると仮定する。[16]

16　利得や損失も主体間で異なると考えられるが，この点は信頼率の違いで吸収できるものと想定する。また各主体は，この経済の中にただ1種類しかない投資財を1単位だけ買うかどうかの意思決定を行っているものとする。こうした仮定が満たされない場合，単峰形の確率分布をア・プリオリに仮定することはできないだだろう。

上の議論から，今期の投資 I_t は次式のような今期の所得 Y_t の増加関数で表すことができるだろう。

$$(10)\quad I(Y_t)=v\int_{T_t}^{\infty}f(x)dx=v\Big[F(\infty)-F(T(Y_t))\Big]$$

ここで $F(-)$ は $f(-)$ の原始関数である。また v は市場への参加者の規模と彼らが投資財を実際に購入する平均確率を反映するスケーリング・ファクターであり，$v>0$ である。

$$(11)\quad \frac{dI_t}{dY_t}=-vf(T_t)T'>0$$

であり，再度微分すると，

$$(12)\quad \frac{d^2I_t}{dY_t^2}=-v\Big\{f'(T_t)T'^2+f(T_t)T''\Big\}$$

となる。ここで何らかの仮定をおくことなく T'' の符号を決定することはできない。所得増加が投資の収益性にプラスに働くことはある程度直観に適合しているし，また経験的にも確かめられるかも知れない。しかしそのプラスに働く程度が所得とともにどのように変化するかについては，経験的にも直観的にも言えることはほとんどないだろう。したがってここでは $|T''|$ は，次の条件を満たす程度に充分小さいものと仮定しておく。

$$(13)\quad sgn\left(\frac{d^2I_t}{dY_t^2}\right)=sgn(-f'(T_t))$$

上式を仮定すれば，(12)式右辺の符号は f' にのみ依存する。低い水準にある所得が増加すれば，高いレベルにある許容限界は減少する。そして許容限界が高い場合には，f' の符号は負である。というのは確率分布 $f(-)$ は単峰形をとると仮定しているからである。同じように類推すれば，所得水準がある一定以上高い場合には，f' は正の符号をもつことが分かる。すなわち，投資は，所得の変化に対して前出の図1に描かれたようなS字形の形状をとる。

Ⅲ マクロ動学モデル

前節では，投資が所得に対してＳ字形の反応を示すことを見た。カルドア形の投資関数にはそれに加えて，既存設備の投資抑制効果を表すために資本ストックが独立変数として組み込まれている[17]。また粗投資はゼロという下限をもっているから，こうした点を考慮して次のように投資関数を定義しておこう。

⒁ $I_t = Max[0, I(Y_t, K_t)]$，$I_Y > 0$，$I_K < 0$，$I_{YY} > 0$ for $Y < Y^*$ and $I_{YY} < 0$ for $Y > Y^*$

ただし，Y^* は⒂式右辺をゼロとおいて求められる所得水準であり，また K_t は期首で定義された資本ストック量である。次節でシミュレーションを行うときには，資本ストックの投資抑制効果は単純に線形が仮定される。

貯蓄については，通常の線形の貯蓄関数を仮定する。すなわち，

⒂ $S_t = sY_t + S_0$，$0 < s < 1$，$S_0 < 0$

である。ここで S_t は t 期の貯蓄量，s は限界貯蓄性向，S_0 は定数項である。自生的消費は通常正値だと仮定されるから S_0 は負値をとるものとする[18]。

カルドア・モデルでは，マクロ的需給ギャップつまり投資と貯蓄の開差

17 資本ストックがなぜ粗投資に対して抑制的に働くかの理由としては，資本ストックの増加が新しい投資機会を食いつぶすということ，あるいは資本の限界生産力の逓減による新投資の収益力の低下ということがあげられる。しかし実際には資本ストックが増加すればそれに応じて補塡投資も大きくなるから，この面では粗投資に対してプラスに作用すると考えられる。したがって，それらの合成効果が投資に対して抑制的か促進的かはア・プリオリには断定できない。こうした問題にもかかわらず，本稿ではカルドアと同じ仮定で議論を進めることにする。

18 通常のカルドア・モデルでは貯蓄関数にも非線形性が仮定されるが，この論文では投資関数の非線形性の影響に論点を絞っているので線形の貯蓄関数を仮定している。

にしたがって所得が増減すると想定されているので，所得の時間を通じての運動は次式で与えられるものとする。[19]

(16) $Y_{t+1}=\beta(I_t-S_t)+Y_t$

ここでβは，マクロ的な需給ギャップの調整速度であり，正値をとると仮定する。

資本ストックは，毎期$100b\%$で蒸散的減耗をすると想定する。このとき次期の期首に存在する資本ストック量は，$(1-b)K_t$ だけの残存設備にその期間中になされた新たな資本形成分を加えたものである。この資本形成が計画投資に一致するのか，あるいは貯蓄に一致するのかはア・プリオリに決めることはできない。それゆえ投資か貯蓄かあるいは両者の加重平均か，そのいずれを資本形成と見なすかについては論者によってまちまちであった。[20] この論文では以下の理由により，資本形成は投資または貯蓄の小さい方に対応すると仮定する。

企業にとっての資本設備とは，実際に投資支出によって購入された設備であり，単なる売れ残りとしてのストック増加はたとえそれが物性的には生産設備であっても，それを生産した企業の側から見れば製品在庫であって資本設備の増加とは考えないであろう。また投資が貯蓄を上回る場合，その超過分に見合う投資財の製品在庫ストックがあれば有効な資本形成は行われるだろうが，そうでない場合は投資の超過分は未充足の需要に終わってしまう。したがって実際に蓄積されている投資財の在庫量が資本形成に影響してくる。ところがこの論文では在庫の問題を捨象しているので，貯蓄の不足が在庫の取り崩しによってどれだけ補填されるかを考慮することはできない。そこで以下では，資本形成は当該期間中になされた投資と貯蓄のうち小さい方で与えられると想定する。以上より，資本ストックの

19 同様のモデルで投資・貯蓄の一致を前提にしたケースについては，Morita (14) を参照されたい。

20 この点についてはたとえば Chang＝Smyth (2) を参照のこと。

運動を次式で与えておこう。

(17) $K_{t+1}=Min[I_t, S_t]+(1-b)K_t$

以上でモデルは閉じ，(14)から(17)の4本の式で4つの未知数 I, S, Y, K の運動が決定される。[21]

Ⅳ 数値シミュレーション

ところで，前節で定式化した動学システムは非線形項を含む定差方程式であり，しかも非負条件などの制御を伴うので，関数形を具体に与えても動学経路を期間 t の関数として陽表的に解くことは困難である。そこで以下では数値シミュレーションによって，動学的な運動を解析することにする。はじめに投資関数に具体的な形状を与えておこう。以下では，操作が簡便なワイブル分布を確率密度関数として用いることにする。この分布およびその特性は次の諸式で与えられる。

(18) $f(x)=\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)}\quad x>0,\ \lambda>0,\ \theta>0$

(19) $F(x)=\int_0^x f(u)du=1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}$

(20) $\mu=\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$

(21) $\sigma^2=\theta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2\right\}$

ここで μ はこの分布の平均であり，σ^2 は分散である。また Γ 関数の定義は次のようである。

(22) $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$

以上の定義を見れば分かるように，分散は θ の増加関数になっている。

---

21 より実際的なモデルにしようと思えば，資本ストックの非負条件，完全雇用や設備稼働の上限などの制約要因を考慮すべきだろう。

また平均も θ の増加関数となっているので，θ が仮に大きくなれば平均も同時に大きくなる。[22]

シミュレーションに用いた具体的な投資関数は，したがって次のようである。

$$(23)\quad I_t = Max\left[0, v\left\{1-e^{-\left(\frac{Y_t}{\theta}\right)^{\lambda}}\right\}-gK_t\right]$$

ただし g は，既存の資本ストックの投資抑制効果の強さであり，簡単化のために線形を仮定している。投資関数への所得の組み込まれ方からわかるように，(23)式ではパラメーターの数を節約するために，分布を裏返して用いている。したがって，小さな θ はより大きな信頼率の平均を意味することに注意しなければならない。図2はこの投資関数の所得に依存する非線形部分だけを異なる三つの θ の値について図示したものである。[23] 許容限界は所得と逆相関しているので，低い所得には高い許容限界が対応してい

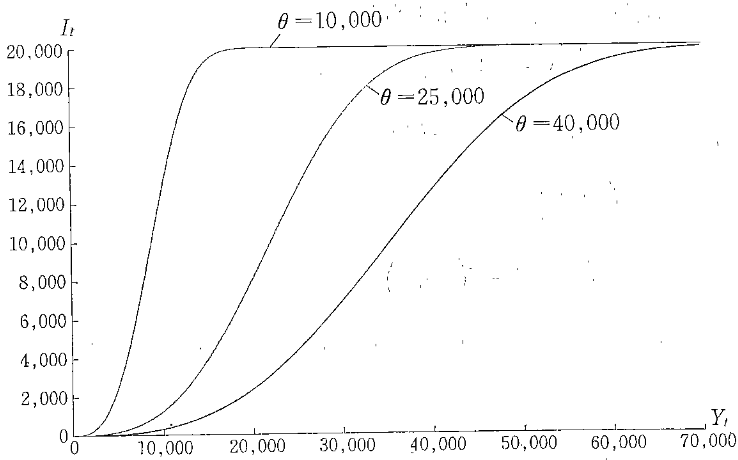

図2

22 この分布関数を用いることでS字型を得るのにわずかのパラメーター数ですんでいる。

23 その他のパラメーターの値は後出のベンチマーク・ケースと同じである。

る。そしてその高い許容限界をクリアする主体の数は少ないので，投資額は低くなっている。逆に所得水準が高ければ投資の許容限界は低く，より多くの主体が信頼性条件をクリアできるので，投資はより高い水準になっている。またθの上昇は投資を抑制する効果がある。

シミュレーションでは，いくつかのパラメーターについて非常に広いレンジで不規則な運動が観測された。以下ではいくつかの特徴的なケースについてシミュレーション結果を示しておく。

(CASE A) ベンチマーク・ケース

他のシミュレーション結果の比較基準とするために，次のようなパラメーターを設定して計算を実行した。

$\lambda=3$　$\theta=25000$　$v=20000$　$g=3.5$

$b=0.15$　$s=0.3$　$S_0=-5000$　$\beta=0.8$

$Y_0=20000$　$K_0=2000$

シミュレーションは適当な初期条件を与え，それを単純に反復計算させ

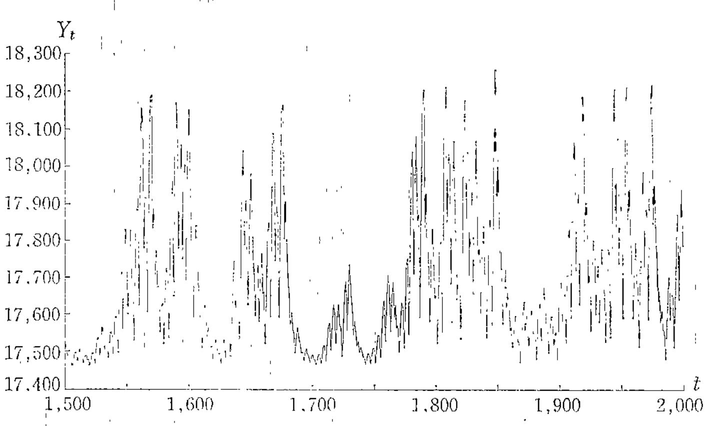

図3

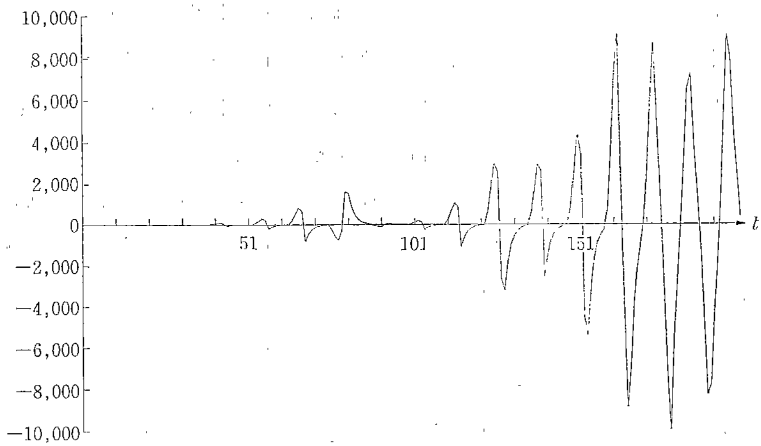

図4

る方法で行った。外からのノイズ成分をいっさい加えない deterministic なシミュレーションである。図3は，上のパラメーターの組み合わせで得られた所得の時系列である。ただし，初期条件からの過渡的な運動をできるだけ排除しシステムの終局的な運動に近づくために，はじめから1499ステップまでを予備的に計算し，その後の500ステップをプロットしている。比較的高い所得水準の期間が続いたかと思うと，逆に低い所得の期間がある程度連続する。そして高いピークもあれば，低いピークも見られるといったように，実際に観測される時系列データと見まがうような系列を生成している。[24]

初期条件のわずかな変化に対してこのシステムはどのような反応を示すだろうか。図4は，所得の初期値が20000と20001の二つの系列をシミュレートし，その開差をとったものである。ただし資本ストックには同一の初

24 粗投資ゼロの床を外し投資＝資本形成とした「外的」制御を伴わないモデルにこの同じパラメーターをセットすると，システムは単調な軌道を描いて発散する。粗投資ゼロという下限の存在によって投資関数の非線形性がより強くなることがシステムの発散をくい止めていると同時に，複雑な運動を生み出す要因ともなっている。

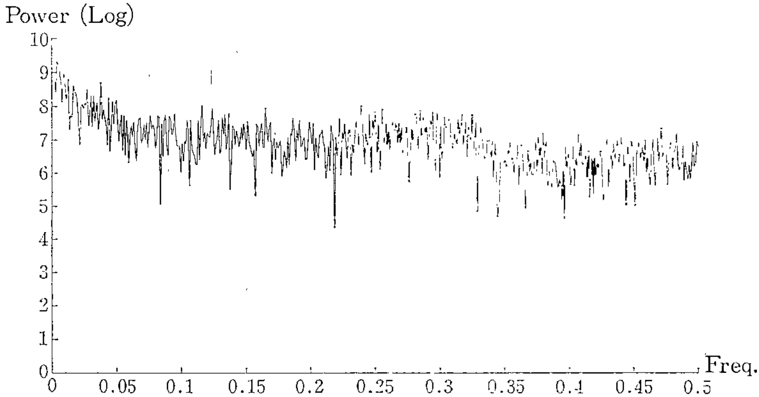

図5

期値を仮定している。二つの系列は，図で見る限り最初の50期ぐらいまでほぼ同じ軌道を推移するが，その後開差は急速に拡大し，やがてまったく異なった軌道を描くようになる。つまりシステムは初期条件のわずかな違いに対してきわめて鋭敏に反応することがわかる。

こうした変動に含まれる周期成分を検出するために，1001期から2024期のデータでパワー・スペクトルを描いてみた。[25] 図5がそれである。スペクトル分布から見られるように，比較的周期の長い成分が相対的に多く含まれてはいるものの，dominant な周期は見いだされず broad band nois におおわれている。初期条件の微細な変化に鋭敏なことや連続スペクトルから，この時系列はカオス的な運動になっているとひとまず判断できるだろう。

図6は横軸に所得，縦軸に資本ストックをとった相図である。1900期から1999期までの 100 期間の運動を描いている。この図から判読できるよう

25 フーリエ変換後の値の絶対値を対数変換しただけで，その他の加工は行っていない。また意味のないピークを除外するために端点でのデータは作図から省いている。

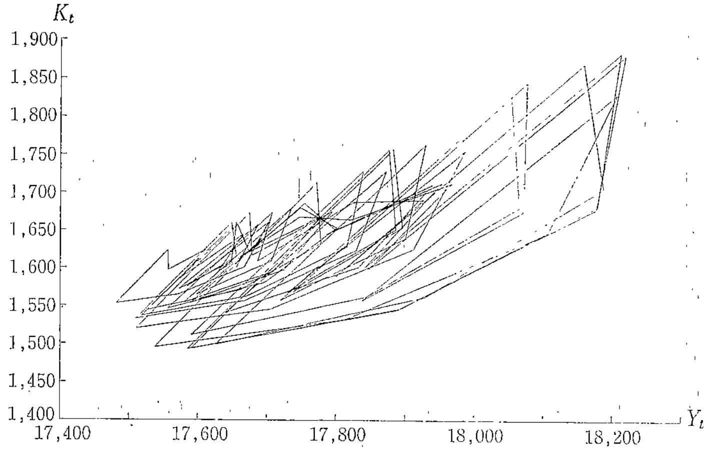

図6

に，所得と資本ストックは複雑ではあるが，それでもサイクル状の運動を示していることが読み取れるだろう。

（CASE B）θ の変化の効果

将来についての情報が乏しかったりその信頼度が低下するなどして不確実性の程度が高まると，どの主体にとっても正しい投資決定を行うことがより困難になるだろう。言い換えれば，諸主体の信頼率は一様に低下し信頼率の平均値は低下すると予想される。さらに投資環境が不確実になればなるほど，適切な投資決定を行うために必要となる情報処理の負荷量はより大きくなるだろう。その結果として，投資主体の情報処理能力の違いがより顕著になるならば，それは信頼率の分布の分散をより大きくする方向で作用するはずだ。こう考えれば，θ を変化させることで，不確実性が経済変動に与える影響を探ることができるのでないか。つまり θ が大きくなることを不確実性の拡大と解釈するのである（逆は逆)。

そこで θ の値を適当なグリッドで順次変化させ，その場合の所得の変動

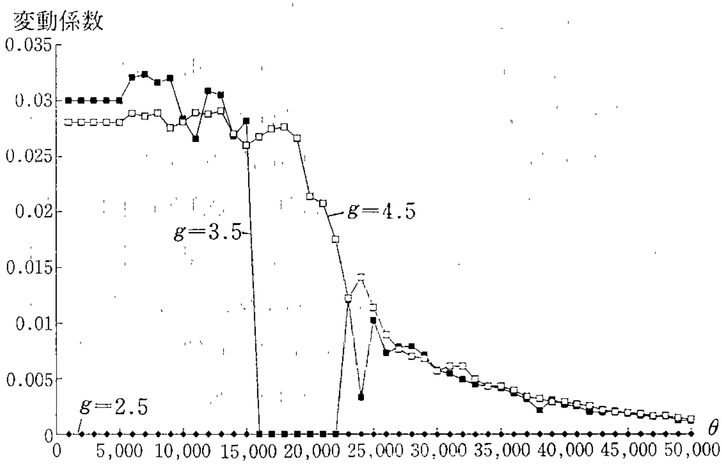

図7

を見てみた。資本ストックの投資抑制効果の強さについては，$g=2.5$, $g=3.5$, $g=4.5$ の３つのケースを想定した。$\theta=1000$から始め，グリッド値1000で $\theta=50000$まで計算した。所得変動は各θについて1900期から1999期までの100期間の所得の変動係数で表している。

結果は図７に示されている。資本ストックの抑制効果が小さい場合($g=2.5$) は，定常値へ収束するので，所得変動はほとんどみられない。$g=3.5$ のケースにおいてθが20000付近で変動がほとんどゼロになってしまうが，それ以外では $g=3.5$ でも $g=4.5$ でもともにθの上昇は所得変動を減少させる効果を持っているようである。逆に言えば，不確実性の程度が減少し，その結果信頼率の平均が上昇しかつその分散が縮小すると，所得変動は相対的に大きくなると予想される。この理由は，分散が広がることによって投資関数の非線形性が弱まり，より広い範囲で線形に近い反応を示すようになるからだと考えられる。[26]

26　図２を参照。

(CASE C) β の変化の効果

図8は，マクロ的需給ギャップの調整速度 β の変化の効果を見たものである。この場合もその他のパラメーターの値はベンチマーク・ケースと同じである。$\beta=0.1$ から $\beta=4.5$ まで，グリッド値0.1でシミュレーションを行い，上のケースと同様1900期から1999期までの所得の変動係数を縦軸にとっている。β が1.2を超えたあたりから急速に変動係数の上昇していく様子が図から観察される。もちろん β が0.6のときや，4.4のときのように特異なケースが出現することもあるが，この計算結果から見る限り，マクロ的な需給ギャップの調整が一定限度を超えて速くなると，経済変動が相対的に大きくなると結論づけてよいだろう。[27]

図9はこのことを別の方法で調べたものである。この図は，分岐ダイヤグラムと同じ手法を用いて描かれている。[28] β の値を0.1から5まで約0.01

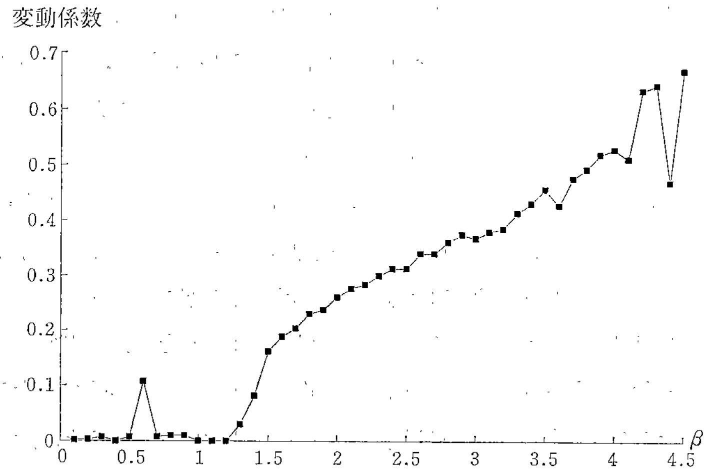

図8

27 この効果は連続的なモデルでも指摘されている。Chang=Smyth (2), Cugno=Montrucchio (3) など参照。

28 ただし作図方法が同じであるだけで，システムの分岐そのものを示す図ではない。というのは単一周回軌道であっても多数の所得水準をとりうるし，またそれが多重周回軌道に「分岐」していってもこの図の上ではそれと確認できないからである。

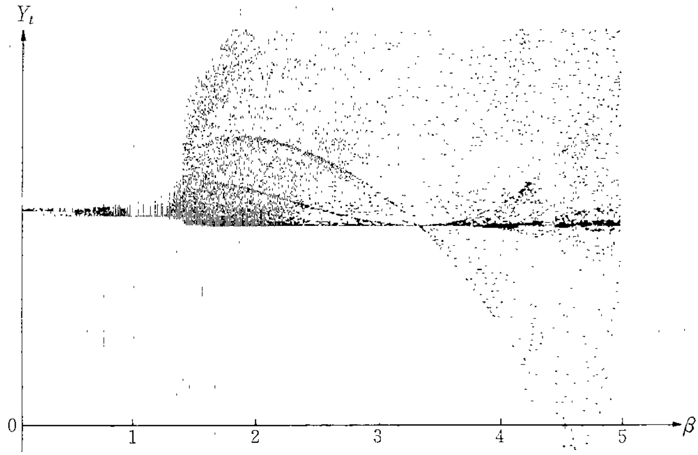

図 9

のステップで横軸方向に変化させ，そのときにとりうる所得の値を縦軸にとっている。ただし所得の過渡的な値を排除するために最初の500期間を予備的に計算して切り捨て，その後の100期間の所得をプロットしている。図 8 でも確認できるように，$\beta=1.3$あたりから急に所得の変動幅が拡大している。また，β の変化に対して気まぐれな反応が見い出されることも注目すべきである。たとえば β を0.1から1.2の付近まで徐々に引き上げていくと，最初ある程度の幅で所得変動が観測されたかと思うと，$\beta=0.4$あたりで突然グラフの分解能以下の小さな変動にまで収束し，再度以前と同じような変動幅をとり，そして1.0を超えたあたりから再び分解能以下の変動幅になる。したがって，この付近で β の変化が所得変動に及ぼす影響については確定的な結論はだせない。しかし大域的にみれば，β の上昇は所得変動幅を拡大すると言ってよいだろう。そのクリティカルなポイントが $\beta=1.3$付近にあるといえる。

ただ，所得変動が大きくなること自体は，必ずしも不規則性の拡大を意味しない。たとえば$\beta=1.5$ の場合の所得と資本ストックの相図を描いて

みると図10のようになる。図に示された軌道は，変動の幅は大きくなっているものの，図6と比べる限りでは規則的といってよい景気循環を出み出している。また図11はこのケースの1001期から2024期までのデータでパワー・スペクトルを描いたものだが，周波数0.08あたりに dominant な周期とそのエコーの存在が確認できる[29]。このことは，図10で軌道が相図面を1周するのにおよそ10〜15期間かかっていることに対応している。さらに完全な規則性をもつ循環さえ存在し得る。図9を見れば $\beta=4.4$ 付近で分岐ダイヤグラムであれば「窓」と呼ばれるようなスリットが出現している。これは，システムが単純な閉軌道上をいくつかの所得水準を順次とりながら周回していることを示している。このことはこのケースを図12のように相図で描いてみると容易に確認できる。

また図9の顕著な特徴として，$\beta=3.2$ 付近までは所得に固定的な下限が存在しているかのようであるが，それを超えて β が大きくなると所得の下限は持続的に低下していくことがうかがえる。この理由は次のようであ

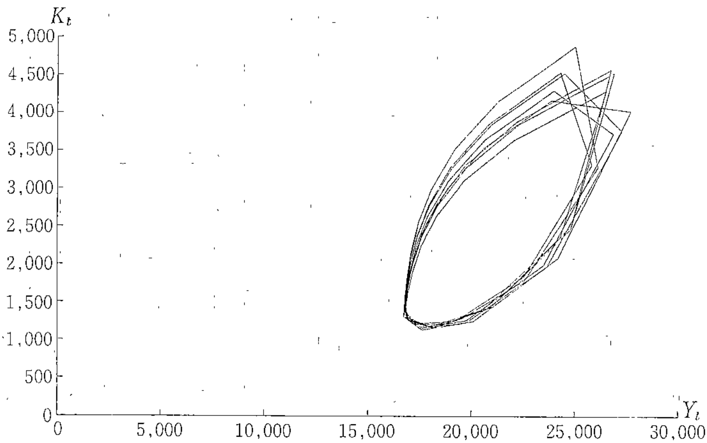

図10

29　処理は前のケースと同じ。

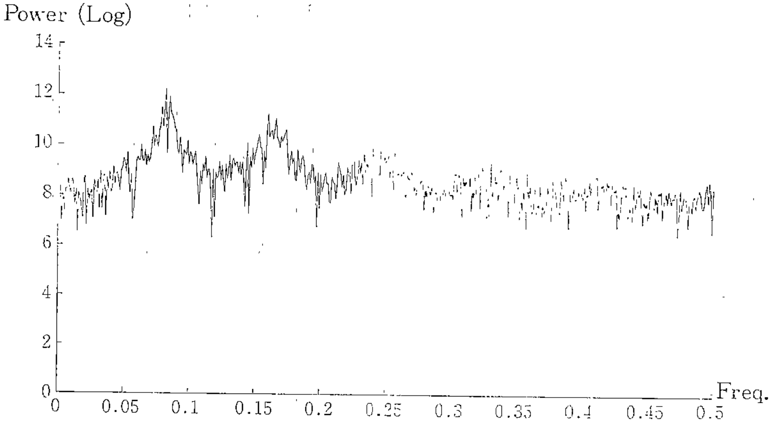

図11

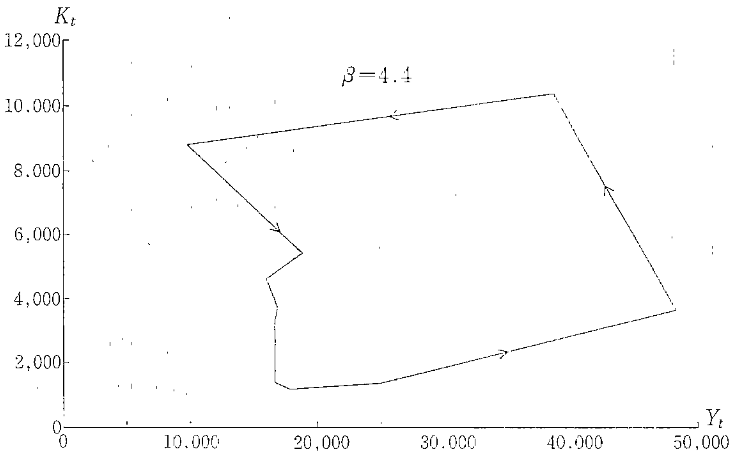

図12

ろう。市場の調整速度の上昇によって所得変動が一定の上限を超えて大きくなると，その結果一定水準以上の大きな貯蓄が実現する。一方，投資は伸び悩むので大きな負の需給ギャップが出現する。それが大きな β によって強く所得を引き下げる効果を生み出す。その大幅な所得減少の結果，貯蓄

がマイナスになると，低い所得水準で需給ギャップが正になり，所得は逆に上昇する圧力を受ける。これに加えてマイナスの貯蓄によるストックの食いつぶしにより，資本ストックは大きく減少している。その結果少ない資本ストックとある程度以上の所得が組合わさると投資が促進され，過大な超過需要を反映して所得は急激に増加する。つまりそれ以前では粗投資ゼロの水準が下限であったが，マイナスの貯蓄の発生によってその下限が有効性を失うのである。[30]

V むすびにかえて

以上では，Heiner 流の意思決定モデルと経済主体の情報処理能力における単峰形の確率分布を仮定して非線形の投資関数を導き，ついで古典的なカルドア型マクロ動学モデルを構成して数値実験を行った。とりあえずの主要な結論は，不確実性の程度が高まると投資は抑制されまた所得変動を安定化させる効果をもっているということ，およびマクロ的な需給ギャップに対する所得の反応がある程度以上早くなると所得変動が拡大される傾向が生じ，しかも明確な景気循環を生み出しやすくなる，ということである。

だが，こうした方法によっては必ずしも最終的な結論を導けるとは限らない。カオス運動をデジタル計算で処理する際の周知の限界に加えて，次のような問題が含まれている。第1に，グリッド値についてのみ計算しているので，グリッドとグリッドの間の情報が全く欠落していることがあげ

30　4を超える大きな β の値では，所得は負になっているが，これは負の需給ギャップが β によって大きく拡大されているためであろう。そのため生産は行われず，大きな負の貯蓄によって資本ストックが蒸散的減耗以上に減少している状態と考えられる。実際上はこのようなケースは起こりえないと思われるが，そのままプロットした。また図のなかの密度の濃い部分は，その付近で集中して所得が実現していることを示している。

られる。第2に，変動係数を計算した範囲が必ずしも全体の変動を代表するようなサンプリングになっている保証がないということ。とくに系列が真にカオス的な場合，サンプル区間の前後でどのような系列が生み出されているかについては少なくとも計算結果からはなにも推定できない。第3に，無限ともいえるパラメーターの組み合わせのごく一部しかとりあげられていないという問題がある。したがって，異なった組み合わせの下では逆の結果がでてくることもないとは断言できない。根本的な解決とはならないが，これらの問題はシミュレーション・ケースを増やすことである程度回避できるだろう。現時点では，上の限られたシミュレーションから得られた結果はあくまで暫定的なものとせざるをえない。

この論文では，主体の情報処理能力の確率分布とマクロ的需給ギャップの調整速度の二つのパラメーターの変化の効果しかシミュレートしなかったが，資本ストックの投資抑制効果，貯蓄性向，資本減耗率など経済学的解釈が可能なその他のパラメーターを変化させたシミュレーションにも一定の意味があるだろう。また上の分析では捨象された完全雇用の天井や設備稼働の上限などがシステムの非線形性を強めることになるのか，あるいは不規則な変動を解消する要因として作用するのかといった問題も興味深い。だが，こうした点については別稿で論じたい。

* 付記　本研究は同志社大学学術奨励研究費の交付を受けている。

参 考 文 献

(1) Boldwin, M., Persistent Oscillations and Chaos in Dynamic Economic Models : Notes for a Survey, in P. W. Anderson et al. (eds.), *The Economy as an Evolving Complex System*, Addison-Wesley, 1988.

(2) Chang, W. W. and D. J. Smyth, The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model : Kaldor's 1940 Model Re-examined, *Review of Economic Studies*, 38, 1971.

(3) Cugno, F. and L. Montrucchio, Stability and Instability in a Two-Dimensional Dynamical System : A Mathematical Approach to Kaldor's Theory

of the Trade Cycle, in G. P. Szego (ed.), *New Quantitative Techniques for Economic Analysis*, Academic Press, 1982.

(4) Day, R. H. and W. Shafer, Keynesian Chaos, *Journal of Macroeconomics*, 7, 1985.

(5) Dosi, G. and M. Egidi, Substantive and Procedural Uncertainty, *Journal of Evolutionary Economics*, Vol. 1, No. 2, 1991.

(6) Gabisch, G. and H.-W. Lorenz, *Business Cycle Theory*, Springer-Verlag, 1987.

(7) Heiner, R., The Origin of Predictable Behavior, *American Economic Review*, Vol. 73, No. 4, 1983.

(8) ＿＿＿, Origin of Predictable Behavior : Further Modeling and Applications, *American Economic Review*, Vol. 75, No. 2, 1985.

(9) Herrmann, R., Stability and Chaos in a Kaldor-Type-Model, Diskussionsbeiträge, Universitat Göttingen, 1985.

(10) Kaldor, N., A Model of The Trade Cycle, *Economic Journal*, Vol. 50, No. 197, 1940.

(11) ＿＿＿, *The Scourge of Monetarism*, Oxford University Press, 1982.〔原正彦・高川清明共訳『マネタリズム　その罪過』日本経済評論社，1984年〕

(12) Lorenz, H.-W., Spiral-Type Attractors in Low-Dimensional Continuous-Time Business Cycle Models, Diskussionsbeiträge, Universitat Göttingen, 1988.

(13) ＿＿＿, *Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, 1989.

(14) Morita, M., A Nonlinear Investment Function and Chaotic Business Cycle : An Evolutionary Approach, mimeo , 1993.

(15) Riedl, R., *Biology of Knowledge* : *The Evolutionary Basis of Reason*, John Wiley and Sons, 1981.〔鈴木達也他訳『認識の生物学一理性の系統発生的基盤』思索社，1990年〕

(16) Sen, K., A Nonlinear Business Cycle Modle in Discrete Time, *Metroeconomica*, Vol. 43, No. 3, 1992.

(17) Semmler, W., On Microdynamics of a Nonlinear Macrocycle Modle, in W. Semmler (ed.) *Competition, Instability, and Nonlinear Cycles*, Springer-Velag, 1986.

(18) 森田雅憲「品質不確実性が消費者行動と価格形成におよぼす影響について」『社会科学』1991年。

(19) ＿＿＿，「R. リードル『認識の生物学一理性の系統的発生的基盤』をめぐって」『同志社商学』第43巻，第6号，1992年。