博士論文

可積分系と楕円・超楕円関数に対する古典代数解析的研究

同志社大学大学院 生命医科学研究科

医工学・医情報学専攻 医情報コース

非線形応用数理研究室

2012 年度 1002 番 松島正知

指導教員

大宮眞弓 教授

目 次

第1章　序論

1.1　はじめに

私達の身の周りは，自然現象，生命現象などさまざま数多くの現象にあふれている．それらの多くが，予想をすることが困難な非線形なものである．

それらの現象を解明，利用して人間の生活をより便利なものにしようとすることは，人間が誕生してから，絶え間なく行われてきた．しかし，今日まで，非線形現象を完全に理解することには至っておらず，人間の生活に利用されているものは，線形現象に近似が可能である非線形の現象の一部を切り取ったものでしかない．

私達の最も身近な生命現象であるヒトの身体一つ取っても，心臓の動き，血液の流れ，代謝，反射など何を挙げても非線形な現象ばかりである．したがって，線形近似による現象の認識には限界があり，更なる科学・医学の発展には，非線形な現象は非線形なものとして捉えることが必要である．そこで，非線形な現象を表している非線形微分方程式を線形近似することなく，非線形方程式のまま取り扱うために，非線形微分方程式の解析を行っている．

ここで，例として非線形の現象が線形近似されて，線形現象として高校の教科書でも取り上げられている単振り子の単振動について紹介する．

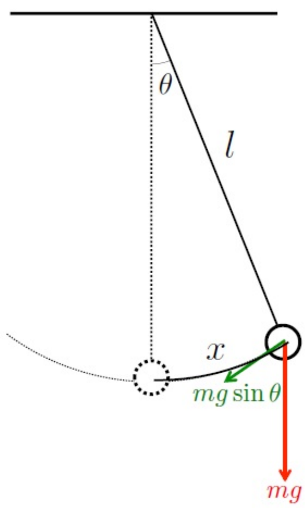

図 1.1: 単振り子 (微少振動)

高校の教科書では，単振り子について，図 1.1 のように糸の一端を固定して他端におもりを付けてつるし，鉛直面内で振らせるものであり，単振り子の振れ角が小さいときには，おもりの運動を単振動と見なすことができると記述されている．

図 1.1 は単振り子の微少振動の様子を表しており，糸の長さを l[m]，おもりの質量を m[kg]，糸と鉛直線とのなす角を θ[rad] とし，最下点の位置から円弧に沿った変位を x[m]（右向きを正とする)，重力加速度を g[m/s^2] とする．また，このとき，おもりの円弧方向に働く力を $mg\sin\theta$ とする．

x が正のとき，円弧方向に働く力 F[N] は，左向きなので，

$$F = -mg\sin\theta \tag{1.1}$$

で表せる．また，

$$x = \theta l$$

であることから，式 (1.1) は，

$$F = -mg\sin\frac{x}{l} \tag{1.2}$$

である．ここで，単振り子の振れ角 θ が十分小さいという条件から，近似式

$$\sin\theta \approx \theta \tag{1.3}$$

が成り立つことより，式 (1.2) は，近似的に

$$F = -\frac{mg}{l}x \tag{1.4}$$

で表せる．式 (1.4) は，mg/l が定数であることから，力の方向は変位と逆方向でその大きさは変位に比例することを表していることから，おもりが単振動をすることを示している．また，周期 T は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

であり，この式より，周期は，おもりの質量，振幅に関係なく，糸の長さと重力加速度のみで決まることがわかる．この事実は，Galileo Galilei により発見された振り子の等時性である．

式 (1.4) によって，単振り子の振れ角が小さい場合，おもりが単振動を行うことを示したが，これは，近似式 (1.3) を導入した結果であり，振れ角が大きい場合は，近似式は成り立たなくなり，単振り子の運動とは言うことはできない．そこで，近似を行うことなく，単振り子の運動方程式を解くことにする．

まずエネルギーの保存則より議論を始める．エネルギー保存則とは，運動エネルギーと位置エネルギーの和は，摩擦によって消費されるエネルギーを無視する場合，一定である法則である．

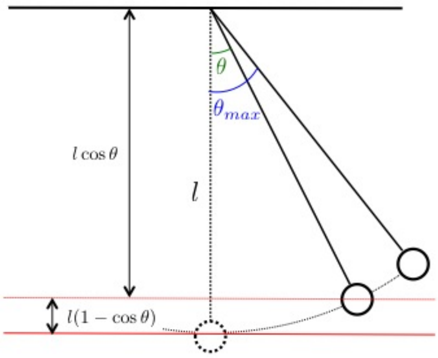

図 1.2: 単振り子

図 1.2 のような場合を考える．まず，振り子の持つ位置エネルギーを，最下点の位置を 0 とする．振れ角 θ の時のおもりの位置エネルギーは，

$$mgl(1-\cos\theta)$$

であり，また，運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

となる．したがって，振れ角 θ の時の力学的エネルギーは

$$mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{1.5}$$

である．

振れ角が最大である θ_{max} のとき，位置エネルギーは，

$$mgl(1-\cos\theta_{max})$$

であり，運動エネルギーは，0 である．したがって，振れ角 θ_{max} の時の力学的エネルギーは

$$mgl(1-\cos\theta_{max}) \tag{1.6}$$

である．したがって，力学的エネルギー保存則より (1.5) と (1.6) から

$$mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=mgl(1-\cos\theta_{max})$$

が成り立つ．この式を $\dfrac{d\theta}{dt}$ について解くと

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g(\cos\theta-\cos\theta_{max})}{l}}$$

が得られる．この式は，θ に関する非線形微分方程式である．しかし変数分離系であるので，解くことができる．

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}} d\theta = \pm \int \sqrt{\frac{2g}{l}} dt \tag{1.7}$$

式 (1.7) の左辺は楕円積分と言われ，初等関数を使って，具体的に解くことは不可能である．しかし，解に楕円関数が含まれていることはわかる．楕円関数については，1.3 節において，詳しく述べる．

たいていの非線形の微分方程式において，一般解の構成が困難であることはよく知られている．しかし，単振り子の方程式のように，解く過程において，変数分離系になることから，解が構成できる可能性のある特殊なものが存在する．そのような特殊なものは，可積分系といい，数多くの研究がされてきた．可積分系を代表する方程式として，KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{1.8}$$

がある．実は，この KdV 方程式でも，単振り子の運動方程式と同じように厳密な解の導出途中で変数分離系となり，同じく楕円積分が表れる．このことは，大宮 [1, 100〜103 頁] に，詳しく記載されている．

これより，可積分系と楕円関数は密接に関係しているように考えられる．また，楕円関数を解析することは，非線形微分方程式を近似することなく取り扱うための重要な要素である．そこで，本論文では，高次定常 KdV 方程式に対する古典代数解析的研究とそれを応用した楕円関数や超楕円関数に対する新たな解析方法を報告する．

高次定常 KdV 方程式は，無限自由度の力学系とみなされる KdV 方程式 (1.8)，あるいは，それの高階化とみなされる高次 KdV 方程式等の非線形波動方程式の相空間を特徴付ける高次の非線形常微分方程式の無限系列である．それらの最初の 2 つは，

$$\frac{d^3 u}{dx^3} - 6u\frac{du}{dx} + 4c_1\frac{du}{dx} = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{d^5 u}{dx^5} - 10u\frac{d^3 u}{dx^3} - 20\frac{du}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} + 30u^2\frac{du}{dx} + 4\left\{c_2\left(\frac{d^3 u}{dx^3} - 6u\frac{du}{dx}\right) - 4c_1\frac{du}{dx}\right\} = 0 \tag{1.10}$$

である．これらの方程式は一見すると複雑で，そこに何らかの数学的構造は存在しない様に思えるが，それらの第一積分の構成や，それに対応する線形化作用素

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \tag{1.11}$$

のスペクトルを考察すると，その背景にある深い代数解析的事実の存在が明らかになる．それらは本論文の本編において詳しく説明する．

次に，本論文の概要であるが，用語，記号の説明などは，本編にまわすことを先に断っておく．

第 2 章では，KdV 方程式の線形化作用素である 1 次元 Schrödinger 作用素 $H(u)$ の準可換微分作用素 A_n の構成，及び，交換子 $[H(u),\ A_n]$ から得られる微分多項式 $Z_n(u)$ の構成を行う．また，交換子 $[H(u), A_n]$ が可換になる条件から，n 次定常 KdV 方程式を構成し，そのときのポテンシャル $u(x)$ を特徴づけるため，新たな概念である n 次代数幾何的ポテンシャルを導入して，導かれる基本関係式について言及する．

第 3 章では，基本関係式より，定義される M 関数をを導入する．この M 関数の拡張より，1 次元 Schrödinger 作用素の固有値に対する固有関数を具体的に構成する．

第 4 章では，M 関数の一般化を定義し，n 次定常 KdV 方程式の第一積分 $I_j(u)$ を構成する公式によって，完全な初等代数による手法で，包合的に求めることができることを示す．

第 5 章では，n 次定常 KdV 方程式の第一積分の公式 (7.2) から，楕円関数における $\wp$ 関数で定義された Weierstrass の標準形に相当する式を構成する．このとき，具体例として 1 次定常 KdV 方程式の第一積分を挙げる．また，1 次元 Schrödinger 方程式において変数変換を行い，3 つの確定特異点をもつ Fuchs 型の微分方程式を構成する．この方程式の 3 つの有限な確定特異点 e_1，e_2，e_3 における局所モノドロミーの考察を行い，1 次元 Schrödinger 方程式 (7.5) における $f(x)$ が周期的であり，さらに $u(x)$ が 2 重周期関数（＝楕円関数）であることを楕円関数論を用いない新たな方法によって証明する．

第 6 章では，mKdV(-) 方程式の線形化作用素である 2 成分作用素である 1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ を定義し，1 次元 Dirac 作用素の多成分準可換微分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ の構成，及び，交換子 $[P(v), \widetilde{A}_n(v)]$ から得られる微分多項式 $K_n(v)$ の導出方法の証明，考察を行う．第 7 章では，それぞれの研究結果のつながり，これからの研究課題について述べる．

1.2　歴史的背景（KdV 方程式）

KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

は，1965 年，Zabusky と Kruskal[2] による熱拡散の問題を解析する過程において姿を現し注目が集まった．しかし，この方程式自身は，脚光を浴び始める 60 年前の 1895 年に，オランダの物理学者 Korteweg と数学者 deVries[3] によって浅水重力波の方程式としてすでに提唱されており，発見者にちなんで Korteweg-deVries 方程式と呼ばれていた．

半世紀以上後に注目されることになったKdV方程式は，数値実験 [2] により，孤立した波どうしの衝突の前後でそれぞれの波の形状，速度が不変であり，粒子のような安定した状態で存在することが発見された．このことから，KdV方程式で記述される孤立波が粒子性をもつことより,「solitary wave（孤立波)」に粒子性を表す接尾語「on」をつけて，この波は「soliton（ソリトン)」と名付けられた．これが，現在では類を見ないほど爆発的に研究の拡がりを見せている，ソリトン理論の始まりである．

それらの研究を受け，1968年にMiuraによって，驚くべき変換 [4]

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \tag{1.12}$$

が，見つけられた．このとき，関数 $u = u(x,t)$ は KdV 方程式 (1.8) の解，関数 $v = v(x,t)$ は mKdV(-) 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{1.13}$$

の解である．この変換式の一般化を著者 [5] が行なっている．Miuraは式 (1.12) を，リッカチ方程式とみなした．リッカチ方程式の一般論は，リッカチ方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{1.14}$$

の解 $y(x)$ に対して，関数 $u(x)$ を

$$y(x) = -\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}\log u(x) \tag{1.15}$$

で定義すると，$u(x)$ は2階線形常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right)\frac{du}{dx} + a(x)c(x)u = 0 \tag{1.16}$$

の解であるというもので，これより，Miura変換を線形化できる．Miura変換に適用すると，まず，関数 $f(x,t)$ を

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\log f(x,t) \tag{1.17}$$

で定義する．すると，関数 $f(x,t)$ は線形方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - u(x,t)f(x,t) = 0 \tag{1.18}$$

を満たす．独立変数が x,t の2つあるが，時間変数は関係しないので，式 (1.18) は，常微分方程式である．式 (1.18) にスペクトルパラメータ λ を入れると，

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) + (u(x,t) - \lambda)f(x,t) = 0 \tag{1.19}$$

が得られる．これは，元の方程式である KdV 方程式がガリレイ変換不変であるからである．式 (1.19) は，量子力学における 1 次元定常 Schrödinger 方程式という代表的な方程式である．1 次元 Schrödinger 作用素とは，(1.11) で定義される常微分作用素であり，量子力学の代表的な Hamiltonian として知られる．量子力学において，Hamiltonian のスペクトルを具体的に決定できる例は多くない．具体的に決定できた例として Kato[6] がある．他方，Kay と Moses[7] は，散乱行列の反射係数が恒等的に消える様な一連のポテンシャルを具体的に構成するスキームを与えた．

このように，Miura は，KdV 方程式を Miura 変換の発見から，1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトルの問題に結びつけた．

ソリトン理論が，爆発的発展をしたのはよく知られていることであるが，そのきっかけは，Miura による Miura 変換 (Miura[4]) と，KdV 方程式の解と 1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトルを結びつけ，KdV 方程式の等スペクトル性 (Miura) の発見に端に発し，KdV 方程式の等スペクトル性から，ラックスがラックス表示と呼ばれる KdV 方程式の作用素表現を導いた (Lax[8]) ことが非常に大きい．

1.3 楕円関数

楕円関数の定義の仕方は，大きく分けて二つの流儀がある．1 つは，二重周期関数として級数を用いて定義するもので，Karl Weierstrass が提示したものである．もう 1 つは，楕円積分を用いるもので，Carl Jacobi が定義したものである．本論文では，前者を中心に話を進めていく．ちなみに，物理や工学の分野では，Jacobi の楕円関数が用いられることが多いが，楕円関数

$$\wp(x, L) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq 0}} \left(\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right), \quad L = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m,\ n \in \mathbf{Z}\} \tag{1.20}$$

に現れる明瞭な二重周期性は，楕円関数の本質を見事に表している．ここに，ω_1, ω_2 は複素平面 $\boldsymbol{C}$ の原点を通る同一の直線上にはない 2 つの複素数とする．

ここで，楕円関数の歴史について大まかに述べておく．

楕円積分は，Jacobi の楕円の周の長さについての考察と結びついている．また，Abel はその不完全楕円積分の逆関数より楕円関数を構成し，この楕円関数の二重周期性を発見した．

他方，Weierstrass は発想を変え，二重周期性を有する関数について考察し，彼が得意とする級数を用いて鮮やかに二重周期関数 $\wp$ 関数を構成してみせた．さらに，Weierstrass はこの級数より $\wp$ 関数の満たす標準的な微分方程式を構成した．それが Weierstrass の標準形

$$\wp'(x, L)^2 = 4\wp(x, L)^3 - g_2\wp(x, L) - g_3$$

である．ここに L は格子を表しており，係数である g_2, g_3 は，楕円曲線を決定づける定数である．この Weierstrass の標準形から，楕円関数は楕円曲線をパラメトラ

イズする関数とみなされ，元々楕円関数が単振り子方程式等の力学の問題として捉えられていたのが，代数曲線の世界へと拡がり，現代数学の中心に位置するものとなった．ちなみに，Weierstrass の標準形を積分することで，楕円積分を求めることができる．楕円積分と呼ばれるものは，3 次，あるいは 4 次の多項式の平方根の積分で表されるもので，その積分結果は，初等関数では表すことができないことを知られている．

第2章　高次定常KdV方程式

2.1　はじめに

この章では，1 次元 Schrödinger 作用素の準可換微分作用素の構成と二つの作用素の交換子より得られる微分多項式について考察を行う．さらに，二つの作用素が可換になる条件についても言及する．

2.2　微分作用素

実数や複素数等のスカラーの場合を除いて，一般に“ 積 ”は非可換である．したがって，可換な積は極めて例外的なものだが，反面，可換になるような数学的対象は，多くの場合，豊かな数学的構造を有している事が知られている．

実際，最も身近な行列の場合にも，ある特定の行列と可換な行列全体はリー環の構造を有し興味深い例となっている．そこで本章では，微分作用素に着目し，ある特定の微分作用素 C に対して，

$$[A, C] = AC - CA = 0$$

となる微分作用素 A 全体の構造を明らかにすることを目的とする．微分作用素 C としては，非常に特殊ではあるが，微分作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \tag{2.1}$$

を考え，それと可換な微分作用素のクラスを明らかにすることを目的とする．この変数 x は複素変数であり，$u(x)$ は，無限遠点を含まない全有限複素平面で定義された有理型関数とする．

(2.1) で定義される微分作用素 $H(u)$ は，x が実変数の場合，$u(x)$ をポテンシャルに持つ 1 次元 Schrödinger 作用素と呼ばれる作用素である．この様な特殊な微分作用素を考える理由は，量子力学を始めとする数理物理学の様々な局面を始め，数理物理学の中心に位置する作用素だからである．通常，複素変数の微分作用素 (2.1) を Schrödinger 作用素とは呼ばないが，超幾何関数を始め，大半の特殊関数を定義する際に現れる微分作用素でもあるため，敢えて変数 x が複素変数の場合でも Schrödinger 作用素と呼ぶことにする．

作用素 $H(u)$ は，長い研究の歴史を有し、様々な観点から深く研究されているものである．そしてその研究手法は，多くの場合は解析的，特にスペクトルに関わる部分では，関数解析的である．本論文では，従来とは少し手法を変えて，初等的な古典代数解析的な方法で次の問題を考察する．

微分作用素

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^j \tag{2.2}$$

で $H(u)$ と可換となるものが存在するポテンシャル $u(x)$ を特徴づけよ．

これらの結果から，従来知られていた下記に代表される多くの作用素，あるいは常微分方程式のクラスを統一的な観点で見直すことが可能になる．

- 可解なあるクラスの Fuchs 型 2 階常微分方程式
- 無反射 Schrödinger 方程式
- Lamé 方程式

これらの微分方程式は，微分方程式全体の中で見ると，極めて特殊ではあるが，視点を変えるとある程度の普遍性を有している．これらの方程式の係数が，それぞれ有理ソリトン，双曲線ソリトン，楕円ソリトンに対応していることが分かる．即ち，ソリトン理論の世界から見ると，現時点で判っているほとんど全てのタイプのソリトンを含んでいる．したがって，これらの微分作用素のクラスをさらに押し広げることにより，ソリトン理論の世界をもっと広げられる可能性を示唆している．

この章の結果は，過去の先行研究として，Burchnall-Chaundy[9] がある．この論文は，現代数学の書き方でないため，読みにくい論文であるが，本章で述べる事柄は本質的に全て含まれている．

2.3 準可換微分作用素

可換微分作用素を考察する前に準備として，準可換作用素を考える．準可換作用素を考えることにより問題の見通しが良くなり，可換条件を微分方程式で表現することができる．

準可換の概念を定義する．

定義 1 (準可換微分作用素). n 階微分作用素 A が $H(u)$ の準可換微分作用素であるとは,

$$[A, H(u)] = K$$

が, 0 階の微分作用素, 即ち, ただの関数の掛け算作用素になることを言う.

はじめに、微分作用素 (2.2) の形の微分作用素 A について, 予備的な考察を行い, 少しずつ形を決めていく. まず A の高階の項から順次, 交換子を計算し整理してみる.

$$\begin{aligned}
[A, H(u)] &= AH(u) - H(u)A \\
&= \left(a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right) - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)\left(a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right) \\
&\quad + \left(a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\right)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right) - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)\left(a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\right) + \cdots \\
&= (-a_{n-1} + 2a'_n + a_{n-1})\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} + \text{低次の項} \\
&= 2a'_n\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} + \text{低次の項}
\end{aligned}$$

したがって、A と $H(u)$ が準可換ならば, 最高階の係数 $a'_n = 0$ より, a_n は定数である. $a_n = 1$ として一般性を失わないので, A の最高階の係数を 1 とする. このように最高階の係数が 1 である線形微分作用素をモニック作用素と言う.

次に, A を $2n$ 階のモニック作用素で $H(u)$ と準可換で

$$[A, H(u)] = K$$

とする. 作用素 A' を

$$A' = A - (-1)^n H(u)^n$$

で定めると

$$[A', H(u)] = [A, H(u)] - (-1)^n [H(u)^n, H(u)] = K$$

なので $H(u)$ と準可換で, かつ, $2n-1$ 階以下である. 従って, A は奇数階作用素を考えるだけでよい. 即ち, $H(u)$ と準可換な作用素としては,

$$A_n = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} a_j(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^j \tag{2.3}$$

という形の作用素をだけを考えればよい.

次に, $H(u)$ のスペクトル λ に対応する固有関数 $f(x,\lambda)$ を導入する. 即ち, $f(x,\lambda)$ は微分方程式

$$H(u)f(x,\lambda) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x,\lambda) + u(x)f(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda) \tag{2.4}$$

の非自明解である．これにより，次の書き換えができる．

- $f''(x,\lambda) = (u(x)-\lambda)f(x,\lambda)$
- $f'''(x,\lambda) = (u(x)-\lambda)f'(x,\lambda) + u'(x)f(x,\lambda)$
- $$\begin{aligned} f^{(4)}(x,\lambda) &= u''(x)f(x,\lambda) + u'(x)f'(x,\lambda) + u'(x)f'(x,\lambda) + (u(x)-\lambda)f''(x,\lambda) \\ &= (u''(x) + (u(x)-\lambda)^2)f(x,\lambda) + 2u'(x)f'(x,\lambda) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f^{(5)}(x,\lambda) &= (u'(x) + 2(u(x)-\lambda)u'(x))f(x,\lambda) \\ &\quad + (u''(x) + (u(x)-\lambda)^2)f'(x,\lambda) + 2u''(x)f'(x,\lambda) + 2u'(x)f''(x,\lambda) \\ &= (3u''(x) + (u(x)-\lambda)^2)f'(x,\lambda) \\ &\quad + (u'(x) + 4u'(x)(u(x)-\lambda))f(x,\lambda) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\tag{2.5}$$

以下，同様に，2 階以上の項は全て 1 階導関数 $f'(x,\lambda)$ と $f(x,\lambda)$ で書き換えることができる．このことより，次が分かる．

補題 1. A_n を $2n+1$ 階のモニック微分作用素とすると

$$\begin{aligned} A_n f(x,\lambda) &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} a_j(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^j \right) f(x,\lambda) \\ &= P(x,\lambda)f'(x,\lambda) + Q(x,\lambda)f(x,\lambda) \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成立する．ここに $P_n(x,\lambda)$，$Q_n(x,\lambda)$ は x の関数を係数とする λ の高々n の次多項式である．

証明. $A_n f(x,\lambda)$ が式 (2.6) の様に表されることは，上の考察で明らかである．したがって，$P_n(x,\lambda)$，$Q_n(x,\lambda)$ が λ の n 次多項式であることを示せば良い．これは，(2.5) の計算から，λ の現れ方が分かるので，明らかである． □

補題 1 に注意して交換子 $[A_n, H(u)]$ を $f(x,\lambda)$ に作用させると次が従う．

$$\begin{aligned} [An, H(u)]f(x,\lambda) &= A_n H(u) f(x,\lambda) - H(u) A_n f(x,\lambda) \\ &= \lambda A_n f(x,\lambda) - H(u)(P_n(x,\lambda)f'(x,\lambda) + Q_n(x,\lambda)f(x,\lambda)) \\ &= (P_n''(x,\lambda) + 2Q_n'(x,\lambda))f'(x,\lambda) \\ &\qquad + (2(u(x)-\lambda)P_n'(x,\lambda) + P_n(x,\lambda)u'(x) + Q_n''(x,\lambda))f(x,\lambda) \end{aligned} \tag{2.7}$$

A_n と $H(u)$ は準可換として

$$[A_n, H(u)] = K_n(x)$$

と置く．すると (2.7) において $f'(x,\lambda)$ の係数は零で，$f(x,\lambda)$ の係数は $K_n(x)$ である．したがって，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} P_n''(x,\lambda) + 2Q_n'(x,\lambda) = 0 \\ K_n(x) = 2(u(x)-\lambda)P_n'(x,\lambda) + P_n(x,\lambda)u'(x) + Q_n''(x,\lambda) \end{cases} \tag{2.8}$$

$P_n(x,\lambda)$ を λ の n 次の多項式として

$$P_n(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{n} p_j(x)\lambda^{n-j} \tag{2.9}$$

と置くと，(2.8) より，次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} K_n &= 2(u(x)-\lambda)P_n'(x,\lambda) + P_n(x,\lambda)u'(x) - \frac{1}{2}P_n'''(x,\lambda) \\ &= 2(u(x)-\lambda)\sum_{j=0}^{n} p_j'(x)\lambda^{n-j} + u'(x)\sum_{j=0}^{n} p_j(x)\lambda^{n-j} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} p_j'''(x)\lambda^{n-j} \end{aligned}$$

この式を λ に関して降冪の順に整理すると次が分かる．

$$\begin{aligned} K_n &= -2p_0'\lambda^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}(-2p_j')\lambda^{n-j+1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n}(2u(x)p_j'(x) + u'(x)p_j'(x) - p_j'''(x))\lambda^{n-j} \\ &= -2p_0'\lambda^{n+1} + \left(-2p_1' + 2u(x)p_0' + u(x)'p_0 - \frac{1}{2}p_0'''\right)\lambda^n \\ &\quad + \left(-2p_2' + 2up_1' + u'(x)p_1 - \frac{1}{2}p_1'''\right)\lambda^{n-1} + \cdots \\ &\quad + \left(-2p_n' + 2up_{n-1}' + u'(x)p_{n-1} - \frac{1}{2}p_{n-1}'''\right)\lambda \\ &\quad + 2u(x)p_n' + u'(x)p_n - \frac{1}{2}p_n''' \end{aligned} \tag{2.10}$$

上式より，K_n は λ を項に持たないことに注意すると，λ の 0 次の項以外は 0 になるので，$p_j(x)$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} p_0' = 0 \\ -2p_{j+1}' - \frac{1}{2}p_j''' + 2u(x)p_j' + u'(x)p_j = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

また，

$$K_n = 2u(x)p_n' + u'(x)p_n - \frac{1}{2}p_n''' \tag{2.12}$$

であることが分かる．

したがって，以下のように，順次，式が決まっていく．

1. $p_0 = 1$ と置いて，漸化式 (2.11) に代入すると

$$p_1' = \frac{1}{2}u'(x)$$

である．したがって，積分すると，C_1 を積分定数として次を得る．

$$p_1 = \frac{1}{2}u + C_1$$

2. 上の p_1 を漸化式 (2.11) に代入すると

$$p_2' = -\frac{1}{8}u''' + \frac{3}{4}uu' + \frac{1}{2}C_1u'$$

である．したがって，積分すると，C_2 を積分定数として次を得る．

$$p_2 = -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 + \frac{1}{2}C_1u + C_2$$

以下同様に次々計算ができる．ところで，それらを実行してみると，一般に p_j は u とその導関数 u'，さらに高階導関数 $u^{(k)}$ の定数係数多項式になることが予想される．その様な多項式は微分多項式と呼ばれる．

2.4　KdV 多項式

上に述べたように，関数 $p_j(x)$ が $u(x)$ の微分多項式になることが期待されるが，実際に次のことが知られている．

補題 2. p_j は $u(x)$ の微分多項式である．

証明. 田中-伊達 [10] による帰納法を用いた方法で証明する．まず p_0，p_1，$\cdots$，p_m が微分多項式であるとする．実際 $p_0 = 1$ なのでこの仮定は空ではない．定義より次が成立する．

$$\begin{aligned} p_1' &= -\frac{1}{4}p_0''' + up_0' + \frac{1}{2}u'p_0 \\ p_2' &= -\frac{1}{4}p_1''' + up_1' + \frac{1}{2}u'p_1 \\ &\vdots \\ p_{m+1}' &= -\frac{1}{4}p_m''' + up_m' + \frac{1}{2}u'p_m \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.13) の第 j 番目の式の両辺に p_{m-j+1} をかけ，辺々たし合わせると次を得る．

$$\begin{aligned} p_0 p'_{m+1} &+ \sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p'''_{j-1} + u \sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p'_{j-1} \\ &\qquad + \frac{1}{2}u' \sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p_{j-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$p_0 = 1$ に注意すると (2.14) は p'_{m+1} について次のように解ける．

$$\begin{aligned} p'_{m+1} = &-\sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p'''_{j-1} \\ &+ u \sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p'_{j-1} + \frac{1}{2}u' \sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1} p_{j-1} \end{aligned} \tag{2.15}$$

そこで右辺の積分を計算する為に，各項の不定積分を計算する．実際には，全ての項を，ある微分多項式の導関数の形に書き換える．

まず (2.15) の右辺の第 1 項を計算する為に次に注意する．

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p_j\right)' &= \sum_{j=1}^{m} p'_{m-j+1} p_j + \sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j \\ &\qquad (\text{第 1 項で } k = m - j + 1 \text{ と置く}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} p'_k p_{m-k+1} + \sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j \\ &\qquad (\text{第 1 項と第 2 項は同じもの}) \\ &= 2\sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p'_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{m-j+1} p_j\right)'$$

が示された．次に (2.15) の右辺の第 2 項を計算する．そのために次のように書き

換える．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1}p'''_{j-1} \\
&\qquad = -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1}p''_{j-1}\right)' + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p''_{j-1}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

続いて，次の書き換えを行う．

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p'_{j-1}\right)' &= \sum_{j=1}^{m+1} p''_{m-j+1}p'_{j-1} + \sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p''_{j-1} \\
&\qquad (\text{第 1 項で } m-j+1=k-1 \text{ と置く}) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} p''_{k-1}p'_{m-k+1} + \sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p''_{j-1} \\
&\qquad (\text{第 1 項と第 2 項は同じもの}) \\
&= 2\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p''_{j-1}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p''_{j-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p'_{j-1}\right)' \tag{2.17}
$$

が示された．そこで (2.16) に (2.17) を代入すると次が示される．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1}p'''_{j-1} \\
&\qquad = -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1}p''_{j-1}\right)' + \frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p'_{j-1}\right)' \\
&\qquad = \left(-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1} p_{m-j+1}p''_{j-1} + \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{m+1} p'_{m-j+1}p'_{j-1}\right)'
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

即ち，(2.15) の右辺第 2 項はある微分多項式の導関数の形で与えられることが分かる．次に (2.15) の右辺の第 3 項，第 4 項を一緒にまとめて考える．

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}\right)'
&= \frac{1}{2}u\left(\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}\right)' + \frac{1}{2}u'\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1} \\
&= \frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p'_{m-j+1}p_{j-1} + \frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p'_{j-1} \\
&\qquad + \frac{1}{2}u'\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

であり，ここで，(2.19) の右辺の第 1 項において，$m-j+1=k-1$ と置くと

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}\right)' = \frac{1}{2}u\sum_{k=1}^{m+1}p'_{k-1}p_{m-k+1} + \frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p'_{j-1} \\
+ \frac{1}{2}u'\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

となり，(2.20) の右辺の第 1 項と第 2 項は同じものであるので

$$
\left(\frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}\right)' = u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p'_{j-1} + \frac{1}{2}u'\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}. \tag{2.21}
$$

(2.21) の最後の行は (2.15) の第 3 項，第 4 項と一致している．したがって，次が示された．

$$
\begin{aligned}
p'_{m+1} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}p_{m-j+1}p_j\right)' \\
+\left(-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p''_{j-1} + \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{m+1}p'_{m-j+1}p'_{j-1}\right)' \\
+\left(\frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1}\right)'
\end{aligned}
$$

ここで，両辺を積分すると，定数 C が存在して

$$
\begin{aligned}
p_{m+1} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}p_{m-j+1}p_j - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p''_{j-1} \\
+ \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{m+1}p'_{m-j+1}p'_{j-1} + \frac{1}{2}u\sum_{j=1}^{m+1}p_{m-j+1}p_{j-1} + C
\end{aligned}
$$

が成立する．右辺は微分多項式であるから p_{m+1} も微分多項式である． □

補題 2 より，関数 $p_j(x)$ は微分多項式であることが分かった．しかし，上の $p_1(x)$ と $p_2(x)$ の計算例でも分かるように，漸化式を解く際に不定積分を伴うので，その度ごとに積分定数が現れ，$p_j(x)$ は一意には定まらない．そこでその積分定数を零と置いて一意化を図ることにする．

定義 2. $Z_0(u) = 1$ と置く．$j \geq 1$ に対しては，微分多項式 $p_{j-1}(x)$ から漸化式 (2.11) を用いて微分多項式 $p_j(x)$ を計算する際に現れる積分定数を零と置いて得られる微分多項式を $Z_j(u)$ で表す．$Z_j(u)$, $j = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ を j 次 KdV 多項式と言う．

この定義は，厳密に言うと，数学的には不完全である．但し，補題 2 から，p_j は u の微分多項式と分かっているので，関数 $u(x)$ を微分多項式に代入して得られた関数としてではなく，p_j を不定元 u の微分多項式として考えると，いちおう誤解無く一意に定めることができる．詳しい微分代数的定義は Ohmiya[11] を参照されたい．

なお，“ KdV ”と言う命名の由来は，u が変数 x 以外に時間変数 t にも依存するとき，発展方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} Z_2(u) = -\frac{1}{8}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{4} u \frac{\partial u}{\partial x}$$

が本質的にソリトン方程式の代表的なものである KdV(Korteweg-de Vries) 方程式と同一のものだからである．ちなみに，KdV 多項式の名前が初めて使われている論文は，Ohmiya[12] である．

2.5 Λ 作用素

漸化式 (2.11) より，微分多項式 $Z_{j+1}(u)$ は $Z_j(u)$ を用いて

$$\frac{d}{dx} Z_{j+1}(u) = \frac{1}{2} u'(x) Z_j(u) + u(x) \frac{d}{dx} Z_j(u) - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dx^3} Z_j(u) \tag{2.22}$$

と表すことができる．そこで，これを形式的に

$$Z_{j+1}(u) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} u'(x) + u(x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dx^3}\right) Z_j(u) \tag{2.23}$$

と表す．そこで漸化作用素

$$\Lambda(u) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} u'(x) + u(x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \frac{d^3}{dx^3}\right) \tag{2.24}$$

を定義し，Λ 作用素と呼ぶことにする．これは形式的擬微分作用素とよばれるものの一種である．これを用いると Z_j を定める漸化式は次のように極めて単純になる．

$$Z_{j+1}(u) = \Lambda(u) Z_j(u), \quad Z_0(u) = 1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

最初のいくつかの計算結果を紹介する．

$$\begin{aligned}
&\bullet\ Z_1(u) = \frac{1}{2}u \\
&\bullet\ Z_2(u) = \frac{3}{8}u^2 - \frac{1}{8}u'' \\
&\bullet\ Z_3(u) = \frac{1}{32}u^{(4)} - \frac{5}{16}uu'' - \frac{5}{32}u'^2 + \frac{5}{16}u^3 \\
&\bullet\ Z_4(u) = -\frac{1}{128}u^{(6)} + \frac{7}{64}uu^{(4)} + \frac{7}{32}u'u''' + \frac{21}{128}u''^2 \\
&\qquad\qquad - \frac{35}{64}u^2u'' - \frac{35}{64}uu'^2 + \frac{35}{128}u^4
\end{aligned} \tag{2.25}$$

さらに，次が成立することが分かる．

補題 3. $2n+1$ 階の線形微分作用素 A_n を

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j} \tag{2.26}$$

で定めると

$$[A_n, H(u)] = \frac{d}{dx}Z_{n+1}(u) \tag{2.27}$$

が成立する．

証明. 帰納法による．まず

$$[A_{n-1}, H(u)] = \frac{d}{dx}Z_n(u)$$

が成立したとする．実際 $n = 1$ とすると $Z_0(u) = 1$ なので

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(Z_0(u)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}Z_0'(u)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}$$

であるから

$$\begin{aligned}
[A_0, H(u)] &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right)\left(\frac{d}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2}u'(x) = \frac{d}{dx}Z_1(u)
\end{aligned}$$

が成立するので，この帰納法の仮定は空ではない．次に，A_n の定義より

$$\begin{aligned}
A_n &= \left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(Z_j(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}Z'_j(u)\right)H(u)^{n-1-j}\right)H(u) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}\left(Z_n(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}Z'_n(u)\right) \\
&= A_{n-1}H(u)+\frac{1}{2}\left(Z_n(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}Z'_n(u)\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

が成立する．したがって，帰納法の仮定と直接計算で次が分かる．

$$\begin{aligned}
[A_n, H(u)] &= [A_{n-1}H(u), H(u)] + \left[\frac{1}{2}\left(Z_n(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}Z'_n(u)\right), H(u)\right] \\
&= Z'_n(u)H(u) + \left(\frac{1}{2}Z_n(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{4}Z'_n(u)\right)H(u) - H(u)\left(\frac{1}{2}Z_n(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{4}Z'_n(u)\right) \\
&= \frac{1}{2}u'Z_n(u) + uZ'_n(u) - \frac{1}{4}Z'''_n(u) \\
&= Z'_{n+1}(u)
\end{aligned}$$

従って補題は証明された． □

したがって，微分作用素

$$A = \sum_{j=1}^{n+1} c_j A_{j-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} c_{j+1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(Z_k(u)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}Z'_k(u)\right)H(u)^{j-k-1}$$

は $H(u)$ と準可換で

$$[A, H(u)] = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \frac{d}{dx}Z_j(u)$$

が成立する．即ち，$H(u)$ と微分作用素 A が可換となるためにはポテンシャル $u(x)$ が微分方程式

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \frac{d}{dx}Z_j(u) = 0$$

を満たせばよい事が分かる．この際，$c_{n+1} \neq 0$ として一般性を失わないので，c_{n+1} で全体を割っておけば，もともと $c_{n+1} = 1$ として良い．また，次節での話の展開の為には，c_j の代わりに $-c_j$ を考える方が便利なので

$$A = A_n - \sum_{j=1}^{n} c_j A_{j-1} \tag{2.29}$$

と置くと，

$$[A, H(u)] = \frac{d}{dx} Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{d}{dx} Z_j(u)$$

が成立する．これは A と $H(u)$ が可換である為には，$u(x)$ が微分方程式

$$\frac{d}{dx} Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{d}{dx} Z_j(u) = 0 \tag{2.30}$$

を満たすことが十分であることを示している．これで，2.2 節に述べた $u(x)$ を特徴付ける微分方程式が得られた．そこで微分方程式 (2.30) の両辺を積分して，$Z_0(u) = 1$ に注意すると，定数 c_0 が存在して

$$Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u) = c_0 = c_0 Z_0(u) \tag{2.31}$$

が成立することが分かる．この関係式 (2.31) を $Z_{n+1}(u)$ について解いた次の関係式が以後の基本になる．

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u) \tag{2.32}$$

ここで，ポテンシャル $u(x)$ を特徴づけるため，新たな概念の導入を行う．

2.6　代数幾何的ポテンシャル

$V(u)$ を無限個の微分多項式 $Z_j(u)$，$j = 0, 1, 2, \cdots$ で張られる複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とする．即ち，$V(u)$ は，1 次元複素ベクトル空間

$$\boldsymbol{C} Z_j(u) = \{c Z_j(u) \mid c \in \boldsymbol{C}\}$$

の直和空間

$$V(u) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{C} Z_j(u)$$

である．

無限個の 1 次元空間の直和 $V(u)$ は一般には無限次元空間である．しかし，特殊なポテンシャル $u(x)$ に対しては，有限次元に退化することがある．そこで次の概念を導入する．

定義 3 (代数幾何的ポテンシャル). $V(u)$ が $n+1$ 次元のとき，$u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルという．

代数幾何的ポテンシャルは確かに存在する．実際，次が直ちに分かる．

補題 4. 定数関数 $u(x) \equiv c$ は 0 次代数幾何的ポテンシャルである．

証明. $u(x) \equiv c$ なので，直ちに次が分かる．

$$
\begin{aligned}
Z_0(u) &= 1 \\
Z_1(u) &= \frac{1}{2}u = \frac{c}{2} \\
Z_2(u) &= -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 = \frac{3}{8}c^2
\end{aligned}
$$

以下，同様に全ての n に対して $Z_n(u) =$ 定数であることが分かる．したがって

$$V(u) = \boldsymbol{C}$$

である．即ち，$\dim V(u) = 1$ なので $u(x) \equiv c$ は 0 次代数幾何的ポテンシャルである． □

ベクトル空間 $V(u)$ が有限次元になる場合には，次が成立する．

定理 1. $u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルならば $Z_0(u), Z_1(u), \cdots, Z_n(u)$ を $V(u)$ の基底として選べる．

証明. $V(u)$ が有限次元なので，$Z_0(u)$，$\cdots$，$Z_m(u)$ は 1 次独立で，$Z_0(u)$，$\cdots$，$Z_{m+1}(u)$ は 1 次従属であるような m が存在する．すると，非自明な線形関係，即ち，$a_0, a_1, \cdots, a_{m+1}$ のなかに 0 でないものが存在して

$$\sum_{j=0}^{m+1} a_j Z_j(u) = 0$$

が成立する．すると $a_{m+1} \neq 0$ である．実際，$a_{m+1} = 0$ ならば

$$\sum_{j=0}^{m} a_j Z_j(u) = 0$$

だが，仮定より，$Z_j(u)$，$j = 0, 1, \cdots, m$ が一次独立であるので，$a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$ が従うので仮定に反するからである．したがって適当に書き換えて

$$Z_{m+1}(u) = \sum_{j=0}^{m} a_j Z_j(u) \tag{2.33}$$

が成立する．そこで，この関係式 (2.33) の両辺に $\Lambda(u)$ を作用させると，$\Lambda(u)$ は線形なので

$$\Lambda(u) Z_{m+1}(u) = \sum_{j=0}^{m} a_j \Lambda(u) Z_j(u)$$

が従うが，定義より

$$\begin{aligned}
Z_{m+2}(u) &= \sum_{j=0}^{m} a_{j+1} Z_{j+1}(u) + a_0 Z_0 \\
&= a_{m+1} Z_{m+1}(u) + \sum_{j=0}^{m} a_j Z_j(u) \\
&= a_m \sum_{j=0}^{m} a_j Z_j(u) + \sum_{j=0}^{m} a_j Z_j(u) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (a_m a_j + a_{j-1}) Z_j(u) + a_m a_0 Z_0(u)
\end{aligned}$$

なので，$Z_{m+2}(u)$ は $Z_0(u), \cdots, Z_m(u)$ の一次結合で表される．以下同様に，$Z_{m+k}(u)$, $k = 3, 4, \cdots$ も $Z_0(u), \cdots, Z_m(u)$ の 1 次結合で表されることが分かる．したがって，$Z_0(u), \cdots, Z_m(u)$ は $V(u)$ の基底である．仮定より $V(u)$ は n 次元なので $m = n$ である． □

この定理 1 より $u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルならば定数 c_0，c_1，$\cdots$，c_n が一意に存在して

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u) \tag{2.34}$$

が成立する．関係式 (2.34) はベクトル空間 $V(u)$ を完全に特徴付けるものなので次を定義する．

定義 4. n 次代数幾何的ポテンシャル $u(x)$ に対して関係式 (2.34) を基本関係式，定数 c_0，c_1，$\cdots$，c_n を特性係数と呼ぶ．また $n+1$ 次多項式

$$\Omega(\lambda) = \lambda^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} c_j \lambda^j \tag{2.35}$$

を特性多項式と呼ぶ．

これで，$H(u)$ と可換となる作用素 A が存在するポテンシャル $u(x)$ を特徴づけることができた．即ち，ポテンシャル $u(x)$ は関係式 (2.34) を満たせば (2.29) で定義される作用素 A と可換である．

2.7 まとめ

この章の結果をまとめる．1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

の準可換微分作用素を構成するとともに，この 2 つの作用素が可換となる条件を求めた．

準可換微分作用素は，

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

であり，このとき

$$[A_n, H(u)] = \frac{d}{dx}Z_{n+1}(u) \tag{2.36}$$

が成立する．$Z_n(u)$ は KdV 多項式と呼ばれ，漸化作用素

$$\Lambda(u) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}u'(x) + u(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\right)$$

を用いて

$$Z_{j+1}(u) = \Lambda(u)Z_j(u), \quad Z_0(u) = 1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

で定義される．

2 つの作用素が可換となる条件は，$u(x)$ が代数幾何的ポテンシャルであり，かつ微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n}c_jZ_j(u)\right) = 0 \tag{2.37}$$

を満たすことである．式 (2.37) のことを，n 次定常 KdV 方程式という．

したがって，2.2 節で述べた，$H(u)$ と可換となるものとそれが存在するポテンシャル $u(x)$ を特徴づけることができた．

次章では，1 次元 Schrödinger 作用素 $H(u)$ が固有値に代数幾何的ポテンシャル $u(x)$ を持つとして，固有関数の具体的な求め方を示唆し，低次の場合の代数幾何的ポテンシャルの特徴について，考察を行う．

第3章　M 関数と代数幾何的ポテンシャル

3.1　はじめに

この章では，$u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルとして基本関係式 (2.34) が成立しているとき，定義可能な M 関数と，KdV 多項式に成り立つ展開公式によって構成できるスペクトル型 M 関数を導入し，スペクトル型 M 関数を解にもつ Appell-Lindemann の方程式によって，1 次元 Schrödinger 作用素 $H(u)$ の具体的な固有関数の構成を行う．

3.2　M 関数

$u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルとして基本関係式 (2.34) が成立しているとき，次で定義される関数について考える．

定義 5 (M **関数**)**.** $u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルとして基本関係式 (2.34) が成立しているとする．そのとき

$$M(x) = Z_n(u(x)) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_{j-1}(u(x)) \tag{3.1}$$

で定義される関数を $u(x)$ に対応する M 関数と呼ぶ．この関数 (3.1) は，基本関係式 (2.34) の添字を 1 つずらしたものである．

$M(x)$ は恒等的に零ではない．実際，恒等的に零ならば $Z_0(u)$，$\cdots$，$Z_n(u)$ は一次従属になり，仮定に反する．また，M 関数は，次を満たす．

補題 5. M 関数 $M(x)$ はポテンシャル $u(x)$ に対する Appell-Lindemann 方程式

$$L(u)M(x) = -\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}M(x) + u(x)\frac{d}{dx}M(x) + \frac{1}{2}u'(x)M(x) = 0 \tag{3.2}$$

の解である．

証明. M 関数 $M(x)$ に漸化作用素 $\Lambda(u)$ を作用させると，基本関係式より，次が分かる．

$$\Lambda(u)M(x) = Z_{n+1}(u(x)) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u(x)) = c_0 Z_0(u(x)) \tag{3.3}$$

等式 (3.3) の両辺を x で微分すると，$c_0 Z_0(u(x))$ は定数なので

$$\frac{d}{dx}\Lambda(u)M(x) = \left(-\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3} + u(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}u'(x)\right)M(x) = 0 \tag{3.4}$$

である．これは $M(x)$ が Appell-Lindemann 方程式の解である事を示している． □

ここで，Appell-Lindemann 方程式について，定義をしておく．まずは，次の事実がある．

補題 6. 関数 $v(x)$，$u(x)$ は微分可能な関数とする．$y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ が 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v(x)\frac{dy}{dx} + u(x)y \tag{3.5}$$

の解の基本系ならば，

$$g_1(x) = f_1(x)^2,\ g_2(x) = f_1(x)f_2(x),\ g_3(x) = f_2(x)^2$$

で定義される関数 $z = g_1(x)$，$z = g_2(x)$，$z = g_3(x)$ は 3 階線形常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^3z}{dx^3} = 3v(x)\frac{d^2z}{dx^2} + (4u(x) - 2v(x)^2 + v'(x))\frac{dz}{dx}\\ + (2u'(x) - 4v(x)u(x))z\end{aligned}$$

の解の基本系である．特に $v(x) \equiv 0$ ならば 3 階線形常微分方程式

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 4u(x)\frac{dz}{dx} + 2u'(x)z \tag{3.6}$$

の解の基本系である．

この補題より，方程式 (3.6) を次のように定義する．

定義 6. 1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

に対して

$$L(u) = -\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3} + u(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}u'(x) \tag{3.7}$$

を $H(u)$ に付随する Appell-Lindemann 作用素と呼ぶ．また，微分方程式 (3.6)，即ち，

$$L(u)z = -\frac{1}{4}\frac{d^3z}{dx^3} + u(x)\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}u'(x)z = 0$$

を Appell-Lindemann 方程式と言う．

補題 5 より，代数幾何的ポテンシャルの M 関数は Appell-Lindemann 方程式 (3.4) を満たす．この事実から，スペクトル変数を含む M 関数に拡張することにより，それを通じて 1 次元 Schrödinger 作用素に対する固有値問題 (2.4) の固有値と対応する固有関数を代数的に構成する方法を考察する．

3.3 展開公式

微分多項式である KdV 多項式には，ある種の展開定理が成り立つ．そこで，KdV 多項式における展開公式について考察を行う．それには，Appell-Lindemann の補題 6 を利用する．

補題 5，6 より，M 関数 $M(x)$ は，2 階線形常微分方程式

$$H(u)f(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x) + u(x)f(x) = 0 \tag{3.8}$$

の解の基本系 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の 2 次形式で表すことができる．即ち，定数 α_1, α_2, α_3 が存在して

$$M(x) = \alpha_1 f_1(x)^2 + \alpha_2 f_1(x) f_2(x) + \alpha_3 f_2(x)^2 \tag{3.9}$$

と表される．しかし $M(x)$ から $f_1(x)$，$f_2(x)$ を再構成するのは，原理的に不可能である．そこで，スペクトル変数 λ を導入して，$u(x)$ の代わりに $u(x) - \lambda$ を考察する．即ち，2 階方程式としては

$$H(u(x) - \lambda)f(x, \lambda) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x, \lambda) + (u(x) - \lambda)f(x, \lambda) = 0 \tag{3.10}$$

を考える．そこで $u(x) - \lambda$ の KdV 多項式 $Z_j(u - \lambda)$ を構成する．具体例として，$j = 1, 2, 3$ の場合をあげる．

- $j = 1$ の場合：

$$Z_1(u - \lambda) = \frac{1}{2}(u - \lambda) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\lambda = Z_1(u) - \frac{1}{2}\lambda Z_0(u)$$

- $j = 2$ の場合：

$$\begin{aligned} Z_2(u - \lambda) &= -\frac{1}{8}(u - \lambda)'' + \frac{3}{8}(u - \lambda)^2 \\ &= -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 - \frac{3}{4}\lambda u + \frac{3}{8}\lambda^2 \\ &= Z_2(u) - \frac{3}{2}\lambda Z_1(u) + \frac{3}{8}\lambda^2 Z_0(u) \end{aligned}$$

- $j=3$ の場合：

$$
\begin{aligned}
Z_3(u-\lambda) &= \frac{1}{32}(u-\lambda)'''' - \frac{5}{16}(u-\lambda)(u-\lambda)'' \\
&\qquad - \frac{5}{32}(u-\lambda)'^2 + \frac{5}{16}(u-\lambda)^3 \\
&= \frac{1}{32}u'''' - \frac{5}{16}(u-\lambda)u'' - \frac{5}{32}u'^2 \\
&\qquad + \frac{5}{16}u^3 - \frac{15}{16}\lambda u^2 + \frac{15}{16}\lambda^2 u - \frac{5}{16}\lambda^3 \\
&= \left(\frac{1}{32}u'''' - \frac{5}{16}uu'' - \frac{5}{32}u'^2 + \frac{5}{16}u^3\right) \\
&\qquad - \frac{5}{2}\lambda\left(-\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2\right) + \frac{15}{8}\lambda^2\left(\frac{1}{2}u\right) - \frac{5}{16}\lambda^3 \\
&= Z_3(u) - \frac{5}{2}\lambda Z_2(u) + \frac{15}{8}\lambda^2 Z_1(u) - \frac{5}{16}\lambda^3 Z_0(u)
\end{aligned}
$$

以上の例より，$Z_j(u-\lambda)$ は $Z_j(u)$，$Z_{j-1}(u)$，$\cdots$，$Z_0(u)$ の一次結合で表され，さらに，その係数は λ の多項式であることが予想される．実際，次が成立する．

補題 7. 任意の $m=1,\ 2,\cdots$ に対して

$$\frac{d}{dx}Z_m(u-\lambda) = \sum_{j=1}^{m} p_j^{(m)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_j(u) \tag{3.11}$$

となる λ の定数係数多項式 $p_j^{(m)}(\lambda)$、$j=1,\ 2,\cdots,m$ が存在し，それらは次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} p_m^{(m)}(\lambda) = p_{m-1}^{(m-1)}(\lambda) \\ \\ p_j^{(m)}(\lambda) = p_{j-1}^{(m-1)}(\lambda) - \lambda p_j^{(m-1)}(\lambda),\ j=1,\cdots,m-1 \end{cases} \tag{3.12}$$

証明. m に関する帰納法による．上の例より $m=1$ では成立している．そこで $m-1$ まで成立したと仮定する．即ち，

$$\frac{d}{dx}Z_{m-1}(u-\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} p_j^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_j(u) \tag{3.13}$$

を仮定する．この (3.13) 式の両辺に式 (3.7) で定義される，$H(u-\lambda)$ に付随する Appell-Lindemann 作用素 $L(u-\lambda)$ を作用させる．その際

$$\frac{d}{dx}\Lambda(u-\lambda) = L(u-\lambda) = L(u) - \lambda\frac{d}{dx}$$

に注意する．まず

$$L(u-\lambda)Z_{m-1}(u-\lambda) = \frac{d}{dx}\Lambda(u-\lambda)Z_{m-1}(u-\lambda) = \frac{d}{dx}Z_m(u-\lambda) \tag{3.14}$$

が分かる．他方，上の注意と帰納法の仮定より，次が成立する．

$$\begin{aligned}
&L(u-\lambda)Z_{m-1}(u-\lambda)\\
&\quad = \left(L(u) - \lambda\frac{d}{dx}\right)\sum_{j=0}^{m-1} p_j^{(m-1)}(\lambda)Z_j(u)\\
&\quad = \left(\frac{d}{dx}\Lambda(u) - \lambda\frac{d}{dx}\right)\sum_{j=0}^{m-1} p_j^{(m-1)}(\lambda)Z_j(u)\\
&\quad = \sum_{j=0}^{m-1} p_j^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_{j+1}(u) - \sum_{j=0}^{m-1}\lambda p_j^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_j(u)\\
&\quad = p_{m-1}^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_m(u) + \sum_{j=1}^{m-1}(p_{j-1}^{(m-1)}(\lambda) - \lambda p_j^{(m-1)}(\lambda))\frac{d}{dx}Z_j(u)\\
&\qquad\quad - \lambda p_0^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_0(u)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.14) と (3.15) を比較し，$Z_0(u) = 1$ に注意すると次が分かる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}Z_m(u-\lambda) &= p_{m-1}^{(m-1)}(\lambda)\frac{d}{dx}Z_m(u)\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m-1}(p_{j-1}^{(m-1)}(\lambda) - \lambda p_j^{(m-1)}(\lambda))\frac{d}{dx}Z_j(u)\\
&= \sum_{j=0}^{k} p_j^{(m)}(\lambda)Z_j(u)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

各項を比較することにより漸化式も得られる． □

KdV 多項式の展開公式としては，(3.11) の両辺を積分すると，λ の多項式 $p_0^{(m)}(\lambda)$ が存在して

$$Z_m(u-\lambda) = \sum_{j=0}^{m} p_j^{(m)}(\lambda)Z_j(u) \tag{3.17}$$

と表すことが出来るのはすぐ分かるが，補題 7 ではこの $p_0^{(m)}(\lambda)$ は決定できない．そこで次に $p_0^{(m)}(\lambda)$ を決定する．まず，次が分かる．

補題 8. m 次 KdV 多項式 $Z_m(u)$ は $\beta_m u^m$ の形の項を含む．ここに

$$\beta_m = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \tag{3.18}$$

である．さらに

$$Y_m(u) = Z_m(u) - \beta_m u^m \tag{3.19}$$

と置くと，微分多項式 $Y_m(u)$ の全ての項は u の導関数を含む様にできる．

証明. m に関する帰納法で示す．まず，$m=1$ ならば

$$Z_1(u) = \frac{1}{2}u$$

である．また，定義より

$$\beta_1 = \frac{2!}{2^2(1!)^2} = \frac{1}{2}$$

より，

$$Y_1(u) = 0$$

であるから，補題の主張は明らかに成立する．そこで、$m-1$ まで成立したとする．即ち，(3.19) で定義される微分多項式 $Y_{m-1}(u)$ の全ての項は，無駄の無い表示をすると u の導関数を含んでいる．直接計算により次が分かる．

$$\begin{aligned}
Z_m(u) &= \Lambda(u)Z_{m-1}(u) \\
&= \Lambda(u)(Y_{m-1}(u) + \beta_{m-1}u^{m-1}) \\
&= \Lambda(u)Y_{m-1}(u) + \beta_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{4}(u^{m-1})''' + u(u^{m-1})' + \frac{1}{2}u^{m-1}u'\right) \\
&= \Lambda(u)Y_{m-1}(u) + \beta_{m-1}\left(-\frac{(m-1)(m-2)}{4}u^{m-3}u'^2 - \frac{m-1}{4}u^{m-2}u'' + \frac{2m-1}{2m}u^m\right)
\end{aligned}$$

次に，上式の第 1 項 $\Lambda(u)Y_{m-1}(u)$ の各項は u の導関数を含む事を背理法で示す．まず，$\Lambda(u)Y_{m-1}(u)$ の項のうち，少なくともその 1 つが u の導関数を含まないとする．そのような項の最低の次数を l とする．即ち，$\alpha \neq 0$ を定数として，αu^l という項を含んでいるとする．$L(u)$ を (3.7) で定義される Appell-Lindemann 作用素とすると，次が成立する．

$$\begin{aligned}
L(u)Y_{m-1}(u) &= \frac{d}{dx}\Lambda(u)Y_{m-1}(u) \\
&= l\alpha u^{l-1}u' + \cdots
\end{aligned} \tag{3.20}$$

他方

$$L(u)Y_{m-1}(u) = -\frac{1}{4}Y_{m-1}(u)''' + uY_{m-1}(u)' + \frac{1}{2}u'Y_{m-1}(u)$$

であるから，これが $l\alpha u^{l-1}u'$ という項を含んでいるためには，$Y_{m-1}(u)$ が $\gamma \neq 0$ を定数として，γu^{l-1} という形の導関数を含まない項を含んでいる必要がある．しか

し，仮定より，$Y_{m-1}(u)$ の各項は必ず u の導関数を含むので，これは矛盾である．したがって

$$Z_m(u) = \frac{2m-1}{2m}\beta_{m-1}u^m + \text{導関数を含む項}$$

が成立することが分かる．そして

$$\frac{2m-1}{2m}\beta_{m-1} = \frac{2m-1}{2m}\frac{(2(m-1))!}{2^{2(m-1)}((m-1)!)^2} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} = \beta_m$$

より，主張は証明された． □

この補題により，次の KdV 多項式に関する展開定理が証明できる．

定理 2 (展開公式). 係数 $\alpha_j^{(m)}$，$j = 0, 1, \cdots, m$ を次の漸化式で定める．

$$\alpha_j^{(m)} = \begin{cases} 1, & j = m \\ \alpha_{j-1}^{(m-1)} + \alpha_j^{(m-1)}, & j = 1, 2, \cdots, m-1 \\ \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, & j = 0 \\ \alpha_0^{(0)} = 1. & j = m = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

すると

$$p_j^{(m)}(\lambda) = (-1)^{m-j}\alpha_j^{(m)}\lambda^{m-j} \tag{3.22}$$

と置くと，展開公式

$$Z_m(u(x) - \lambda) = \sum_{j=0}^{m} p_j^{(m)}(\lambda) Z_j(u(x)) \tag{3.23}$$

が成立する．

係数 $\alpha_j^{(m)}$ は通常の二項展開に関する二項係数

$${}_nC_j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

に似ているので，KdV 二項係数と呼ぶことにする．

証明. $j \geq 1$ ならば，$Z_j(0) = 0$ が成立する．$Z_0(0) = 1$ であることに注意すると

$$Z_m(-\lambda) = \sum_{j=0}^{m} p_j^{(m)}(\lambda) Z_j(0) = p_0^{(m)}(\lambda)$$

が分かる．他方，補題 8 より，$Y_m(u)$ の各項は u の導関数を含むので，u が定数ならば $Y_m(u) = 0$ である．したがって，次が分かる．

$$\begin{aligned} Z_m(-\lambda) &= Y_m(-\lambda) + \beta_m(-\lambda)^m \\ &= \beta_m(-\lambda)^m = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \lambda^m \end{aligned}$$

したがって

$$p_0^{(m)}(\lambda) = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \lambda^m \tag{3.24}$$

が示された．次に，漸化式 (3.12) により，任意の m に対して，全ての $j = 1, 2, \cdots, m$ について $\alpha_j^{(m)}$ が (3.21) により定まり

$$p_j^{(m)}(\lambda) = (-1)^{m-j} \alpha_j^{(m)} \lambda^{m-j} \tag{3.25}$$

が成立することを m と j に関する帰納法で示す．まず $m = 0$ の場合，明らかに

$$Z_0(u - \lambda) = 1$$

であるから $p_0(0) = 1$ で，$\alpha_0^{(0)} = 1$ が分かる．$m = 1$ の場合は

$$Z_1(u - \lambda) = \frac{1}{2}(u - \lambda) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\lambda = Z_1(u) - \frac{1}{2}\lambda Z_0(u)$$

である．したがって

$$p_1^{(1)}(\lambda) = 1,\ p_0^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda$$

より

$$\alpha_1^{(1)} = 1 = \alpha_0^{(0)},\ \alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2} = \frac{2!}{2^2(1!)^2}$$

であるから，定理の主張を満たしている．そこで $m-1$ まで成立したとする．$j \neq 0$ かつ $j \neq m$ とする．すると補題 7 の漸化式 (3.12) より

$$\begin{aligned} p_j^{(m)}(\lambda) &= (-1)^{(m-1)-(j-1)} \alpha_{j-1}^{(m-1)} \lambda^{(m-1)-(j-1)} \\ &\qquad - \lambda(-1)^{(m-1)-j} \alpha_j^{(m-1)} \lambda^{(m-1)-j} \\ &= (-1)^{m-j} (\alpha_{j-1}^{(m-1)} + \alpha_j^{(m-1)}) \lambda^{m-j} \end{aligned} \tag{3.26}$$

が成立する．これは

$$\alpha_j^{(m)} = \alpha_{j-1}^{(m-1)} + \alpha_j^{(m-1)}$$

と置くと
$$p_j^{(m)}(\lambda) = (-1)^{m-j}\alpha_j^{(m)}\lambda^{m-j},\ j = 1, 2\cdots, m-1$$
であることを示している．他方，$j = 0$ の場合は，上の (3.24) で既に示されている．$j = m$ の場合は，補題 7 の漸化式 (3.12) より
$$p_m^{(m)}(\lambda) = p_{m-1}^{(m-1)}(\lambda) = \cdots = p_1^{(1)} = 1$$
であるから主張は全て示された． □

次に KdV 多項式 $Z_j(u)$ 全体で張られるベクトル空間 $V(u)$ についてもう少し調べておく．まず，この展開定理 2 より任意の m に対して $Z_m(u-\lambda) \in V(u)$ が成立するので
$$V(u-\lambda) \subset V(u)$$
が成立する．また
$$Z_m(u) = Z_m((u-\lambda)+\lambda) = \sum_{j=0}^{m} p_j^{(m)}(-\lambda) Z_j(u-\lambda)$$
が成立するので
$$V(u) \subset V(u-\lambda)$$
である．したがって
$$V(u) = V(u-\lambda)$$
である．故に次が示された．

系 1. 任意の λ に対して
$$V(u) = V(u-\lambda)$$
が成立する．さらに $u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルならば $u(x)-\lambda$ も n 次代数幾何的ポテンシャルである．

次に定義 4 にしたがってポテンシャル $u(x)-\lambda$ の基本関係式と特性係数を計算する．即ち，仮定としては，$u(x)$ は c_j，$j = 0$，$\cdots$，n を特性係数とする n 次代数幾何的ポテンシャルで，基本関係式
$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u)$$
が成立しているとする．すると次が分かる．

補題 9. $j = 0$, $\cdots$, n に対して λ の $n - j + 1$ 次多項式 $a_j(\lambda)$ を

$$a_j(\lambda) = -\alpha_j^{(n+1)}\lambda^{n-j+1} + \sum_{k=j}^{n} \alpha_j^{(k)} c_k \lambda^{k-j} \tag{3.27}$$

で定めると

$$Z_{n+1}(u-\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\lambda) Z_j(u-\lambda) \tag{3.28}$$

が成立する．即ち，(3.28) がポテンシャル $u(x) - \lambda$ の基本関係式であり，(3.27) で定義される λ の多項式 $a_j(\lambda)$ がその特性係数である．

3.4 スペクトル型 M 関数

上の等式 (3.23) をもとに次のスペクトル型 M 関数 $M(x, \lambda)$ を定義する．

定義 7. $u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルとするとき

$$M(x,\lambda) = Z_n(u(x)-\lambda) - \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda) Z_{j-1}(u(x)-\lambda) \tag{3.29}$$

をポテンシャル $u(x)$ に対するスペクトル型 M 関数と言う．

補題 5 より，$M(x, \lambda)$ はポテンシャル $u(x) - \lambda$ に対する Appell-Lindemann 方程式

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Lambda(u-\lambda)M(x,\lambda) \\ &\qquad = -\frac{1}{4}M'''(x,\lambda) + (u(x)-\lambda)M'(x,\lambda) + \frac{1}{2}u'(x)M(x,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

の解である．そこで，$f_1(x, \lambda)$，$f_2(x, \lambda)$ を固有値問題

$$(H(u) - \lambda) f = 0 \tag{3.31}$$

の解で，ポテンシャル $u(x)$ の正則点 $x = a$ において初期条件

$$\begin{pmatrix} f_1(a,\lambda) & f_2(a,\lambda) \\ f_1'(a,\lambda) & f_2'(a,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

を満たすものとする．すると，$f_1(x, \lambda)$，$f_2(x, \lambda)$ は固有値問題 (3.31) の解の基本系なので，補題 6 より，$f_1(x, \lambda)^2$，$f_1(x, \lambda) f_2(x, \lambda)$，$f_2(x, \lambda)^2$ は Appell-Lindemann 方程式 (3.30) の解の基本系である．したがって，スペクトル変数 λ にだけ依存する $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ が存在して

$$M(x,\lambda) = A(\lambda) f_1(x,\lambda)^2 + B(\lambda) f_1(x,\lambda) f_2(x,\lambda) + C(\lambda) f_2(x,\lambda)^2 \tag{3.33}$$

が成立する．そこで，$A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ を $M(x,\lambda)$ を用いて表す．最初に $x=a$ とすると，初期条件 (3.32) より

$$A(\lambda) = M(a,\lambda) \tag{3.34}$$

が成立することが分かる．次に

$$M'(x,\lambda) = 2Af_1f_1' + Bf_1'f_2 + Bf_1f_2' + 2Cf_2f_2'$$

であるから，$x=a$ とすると，初期条件 (3.32) より

$$B(\lambda) = M'(a,\lambda)$$

が分かる．最後は

$$\begin{aligned} M''(x,\lambda) = 2Af_1'^2 + 2A(u(x)-\lambda)f_1^2 + 2B(u(x)-\lambda)f_1f_2 \\ + 2Bf_1'f_2' + 2Cf_2'^2 + 2C(u(x)-\lambda)f_2^2 \end{aligned}$$

であるから，$x=a$ とすると，初期条件 (3.32) より

$$M''(a,\lambda) = 2A(u(a)-\lambda) + 2C$$

である．これを C について解いて，さらに，(3.34) を代入すると

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \frac{1}{2}M''(a,\lambda) - A(u(a)-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}M''(a,\lambda) - (u(a)-\lambda)M(a,\lambda) \end{aligned}$$

である．そこで，$M(x,\lambda)$ が完全平方式，即ち

$$M(x,\lambda) = (\alpha f_1(x,\lambda) + \beta f_2(x,\lambda))^2$$

が成立すると仮定する．2 次形式 (3.33) が完全平方であるためには，判別式を

$$\Delta(\lambda) = B(\lambda)^2 - 4A(\lambda)C(\lambda)$$

と置くと，$\Delta(\lambda)=0$ が成立することが必要かつ十分である．$\Delta(\lambda)$ を作用素 $H(u)$ のスペクトル判別式と言うことにする．

$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，$C(\lambda)$ に対する上の表示式より

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M'(a,\lambda)^2 - 4M(a,\lambda)\left(\frac{1}{2}M''(a,\lambda) - (u(a)-\lambda)M(a,\lambda)\right) \\ &= M'(a,\lambda)^2 - 2M(a,\lambda)M''(a,\lambda) + 4(u(a)-\lambda)M(a,\lambda)^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

が従う．一見すると，これは a に依存する様に見えるが，両辺を a で微分することにより

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\Delta(\lambda) &= 2M'M'' - 2M'M'' - 2MM''' + 4u'M^2 + 8(u-\lambda)MM' \\ &= 8M\left(-\frac{1}{4}M''' + (u-\lambda)M' + \frac{1}{2}u'M\right) = 0\end{aligned}$$

が成立するので，実際は a に依存していないことが分かる．後の引用の為に補題としてまとめておく．

補題 10. スペクトル判別式

$$\Delta(\lambda) = M_x(x,\lambda)^2 - 2M(x,\lambda)M_{xx}(x,\lambda) + 4(u(x)-\lambda)M(x,\lambda)^2$$

は x に依存しない．

なお，ここで独立変数を，初期条件 (3.32) を与える a にせず，一般の x にしてあるのは，上の考察でも分かるように任意の点に選べるからである．

他方，この完全平方条件 $\Delta(\lambda) = 0$ は，初期条件 (3.32) を $x = a$ で満たす，固有値問題 (3.31) の解の基本系 $f_1(x,\lambda)$，$f_2(x,\lambda)$ に関するものだが，他のどのような基本系を選んでも同じ条件であることは，次のようにして分かる．即ち，$g_1(x,\lambda)$，$g_2(x,\lambda)$ を他の基本系とすると，正則行列 S が存在して

$$S\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$$

が成立する．ここに

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

である．$M(x,\lambda)$ を基本系 $f_1(x,\lambda)$，$f_2(x,\lambda)$ の 2 次形式で表した (3.33) を行列表記すると

$$M(x,\lambda) = \boldsymbol{f}^T D\boldsymbol{f}$$

である．ここに $\boldsymbol{f}^T$ は転置行列を表し，

$$D = \begin{pmatrix} A(\lambda) & \dfrac{B(\lambda)}{2} \\ \dfrac{B(\lambda)}{2} & C(\lambda) \end{pmatrix}$$

である．

$$\Delta(\lambda) = -4\det D$$

に注意すると

$$M(x,\lambda) = (S\boldsymbol{g})^T D(S\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}^T(S^T DS)\boldsymbol{g} \tag{3.36}$$

である．したがって

$$\det S^T DS = (\det S)^2 \det D = -\frac{1}{4}(\det S)^2 \Delta(\lambda)$$

で，S は正則であるから，g_1，g_2 の 2 次形式である (3.36) の右辺が完全平方である条件は $\Delta(\lambda) = 0$ である。すなわち，完全平方条件 $\Delta(\lambda) = 0$ は解の基本系の選び方にも依存しないものである．以上より次が証明できた．

定理 3. 代数幾何的ポテンシャル $u(x)$ のスペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ に対して，固有値問題

$$H(u)f(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda)$$

の非自明解 $f(x,\lambda)$ が存在して

$$M(x,\lambda) = f(x,\lambda)^2$$

となる為の必要十分条件は，λ がスペクトル判別式 $\Delta(\lambda)$ の零点であることである．

補題 9 の (3.27) より，$a_j(\lambda)$ は $n - j + 1$ 次の λ の定数係数多項式である．また補題 2 の展開公式 (3.23) 及び $p_j^{(m)}(\lambda)$ の定義式 (3.22) より，$Z_j(u - \lambda)$ は λ に関して j 次の多項式であることが分かる．したがって，$M(x,\lambda)$ は λ に関して高々n 次の多項式である．また表示式 (3.35) より，$\Delta(\lambda)$ は高々$2n + 1$ 次であることが分かる．しかし，これだけでは $\Delta(\lambda) = 0$ の根の個数も分からないので，きちんと最高次係数を決定して階数を知る必要がある．その為に、KdV 二項係数の性質をもう少し詳しく調べる必要がある．そこで次を示す．

補題 11. 漸化式 (3.21) で定められる KdV 二項係数 $\alpha_j^{(n)}$ は次の関係を満たす．

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_0^{(k)} \alpha_k^{(n)} = 0 \tag{3.37}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \alpha_0^{(k-1)} \alpha_k^{(n)} = 1 \tag{3.38}$$

証明. $n \geq 1$ とする．定義より $Z_n(0) = 0$ なので，定理 2 の展開公式 (3.23) により

$$Z_n(0) = Z_n(1 - 1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_k^{(n)} Z_k(1) = 0$$

である．他方，補題 8 より，$k \geq 1$ ならば $Z_k(u)$ は $\alpha_0^{(k)} u^k$ の形の項を含み，残りの項は全て u の導関数を含むので

$$Z_k(1) = \alpha_0^{(k)}$$

である．したがって

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\alpha_k^{(n)}Z_k(1) = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_0^{(k)}\alpha_k^{(n)}$$

が成立するので (3.37) が示された．次に (3.38) を n に関する帰納法で示す．まず漸化式 (3.21) より

$$\alpha_0^{(0)}\alpha_1^{(1)} = 1$$

であるから，$n = 1$ に対しては (3.38) は確かに成立している．そこで $n-1$ まで成立したとする．即ち

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\alpha_0^{(k-1)}\alpha_k^{(n-1)} = 1 \tag{3.39}$$

を仮定する．そこで，KdV 二項係数の定義 (3.21) より，$1 \le k \le n-1$ ならば

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha_{k-1}^{(n-1)} + \alpha_k^{(n-1)}$$

であることに注意する．さらに $\alpha_n^{(n)} = \alpha_{n-1}^{(n-1)} = 1$ であるから

$$(-1)^{n-1}\alpha_0^{(n-1)}\alpha_n^{(n)} = (-1)^{n-1}\alpha_0^{(n-1)}\alpha_{n-1}^{(n-1)}$$

にも注意すると，次が分かる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\alpha_0^{(k-1)}\alpha_k^{(n)} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\alpha_0^{(k-1)}(\alpha_{k-1}^{(n-1)} + \alpha_k^{(n-1)}) + (-1)^{n-1}\alpha_0^{(n-1)}\alpha_n^{(n)} \qquad (3.40)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\alpha_0^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\alpha_0^{(k-1)}\alpha_k^{(n-1)}
\end{aligned}$$

上式 (3.40) の最後の式の第 1 項は (3.37) より零で，第 2 項は帰納法の仮定 (3.39) より 1 である． □

系 2. スペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ は，任意の x に対して，最高次係数が 1 の λ の n 次多項式，即ち，n 次モニック多項式である．

証明. スペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ の定義 (3.6) に対して，定理 2 と補題 9 を用いて展開し，λ の降冪の順に書き換える．そこで高々n 次なのは上の考察で分かっているので λ^n の項だけ取り出す．すると補題 11 の (3.38) より次が分かる．

$$\begin{aligned}
M(x,\lambda) &= Z_n(u-\lambda) - \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda) Z_{j-1}(u-\lambda) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_k^{(n)} Z_k(u) \lambda^{n-k} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n+1)} \lambda^{n-k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \alpha_j^{(k-1)} Z_j(u) \lambda^{k-j-1} \\
&\qquad\quad + \text{低次の項} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \alpha_0^{(k-1)} \alpha_k^{(n+1)} \lambda^n + \text{低次の項} = \lambda^n + \text{低次の項}
\end{aligned}$$

以上より，証明できた． □

系 2 より，$M(x,\lambda)$ は，λ の n 次モニック多項式なので，表示式 (3.35) より，$M'(a,\lambda)^2$ は λ に関し高々$2(n-1)$ 次であり，$-2M(a,\lambda)M''(a,\lambda)$ も高々$2n-1$ 次である．また $u(a)M(a,\lambda)^2$ は $2n$ 次である．したがって

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda M(a,\lambda)^2 + \text{低次の項} = -4\lambda^{2n+1} + \text{低次の項}$$

となることが分かる．

ここで，スペクトル判別式 $\Delta(\lambda)$ とその零点について，改めて定義しておく．

定義 8. 次式で定義される $2n+1$ 次定数係数多項式 $\Delta(\lambda)$ を作用素 $H(u)$ のスペクトル判別式と言う．

$$\Delta(\lambda) = M_x(x,\lambda)^2 - 2M(x,\lambda)M_{xx}(x,\lambda) + 4(u(x)-\lambda)M(x,\lambda)^2 \tag{3.41}$$

また，

$$\Gamma(H(u)) = \{\lambda \mid \Delta(\lambda) = 0\} \tag{3.42}$$

を $H(u)$ の Γ-スペクトルと呼ぶ．

上の考察より，$\Gamma(H(u))$ は重根の場合は，重複度も込めて数えると丁度 $2n+1$ 個の要素を持つことが分かる．過去の多くの Schrödinger 作用素のスペクトル理論の具体的結果と比較すると，これは急減少ポテンシャルの場合には二乗可積分空間 $L^2(\boldsymbol{R})$ の作用素としての離散スペクトルに相当し，周期ポテンシャルの場合には，単純周期スペクトルに相当することが分かる．以上を定理としてまとめておく．

定理 4. $u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルとする．$M(x,\lambda)$ を $u(x)$ のスペクトル型 M 関数とする．そのとき

$$\lambda_0 \in \Gamma(H(u))$$

ならば

$$f(x) = \sqrt{M(x,\lambda_0)} \tag{3.43}$$

は，固有値問題

$$(H(u) - \lambda_0) f = 0$$

の非自明解である．

この定理により，3 階の Appell-Lindemann 方程式の解から，本来の 2 階の 1 次元 Schrödinger 方程式の解，並びにスペクトルの構成できた．このことにより，3.2 節の最後に述べた目標が達成できた事になる．次節では，正体がよくわからない代数幾何的ポテンシャルについて，スペクトル M 関数や固有関数導出の公式 (3.43) を使って，1 次の場合について考察を行う．

3.5　1 次代数幾何的ポテンシャル

補題 4 より 0 次代数幾何的ポテンシャルは定数である．では，その次の 1 次代数幾何的ポテンシャルがどのような特徴をもつか，スペクトル M 関数や固有関数導出の公式 (3.43) を利用して具体的な構成を行う．

$u(x)$ を 1 次代数幾何的ポテンシャルとすると

$$Z_2(u) = c_1 Z_1(u) + c_0 Z_0(u) \tag{3.44}$$

となる定数（特性係数）c_0，c_1 が存在する．ここに，式 (2.25) より

$$Z_0(u) = 1, \quad Z_1 = \frac{1}{2}u, \quad Z_2(u) = -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2$$

である．すると，1 次代数幾何的ポテンシャルは，2 階非線形常微分方程式

$$-\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 = \frac{1}{2}c_1 u + c_0 \tag{3.45}$$

を満たす事が分かる．この方程式 (3.45) の両辺に導関数 u' をかけると

$$-\frac{1}{8}u'u'' + \frac{3}{8}u^2 u' = \frac{1}{2}c_1 u u' + c_0 u'$$

となるが，これは直ちに積分できて，さらに両辺に 16 を乗じて整理すると

$$u'^2 = 2u^3 - 4c_1 u^2 - 16 c_0 u + k \tag{3.46}$$

という変数分離形に帰着できる．ここに k は任意定数である．方程式 (3.46) は，楕円関数の方程式に他ならない．

基本関係式 (3.44) から，

$$Z_2(u-\lambda) = a_1(\lambda) Z_1(u-\lambda) + a_0(\lambda) Z_0(u-\lambda)$$

となる $u-\lambda$ の特性係数 $a_0(\lambda)$，$a_1(\lambda)$ を補題 9 を用いて計算すると次を得る．

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= -\alpha_0^{(2)}\lambda^2 + \alpha_0^{(1)} c_1 \lambda + \alpha_0^{(0)} c_0 \\ a_1(\lambda) &= -\alpha_1^{(2)}\lambda + \alpha_1^{(1)} \end{aligned}$$

ここで漸化式 (3.21) より次が分かる．

$$\begin{aligned} &\alpha_0^{(2)} = \frac{4!}{2^4(2!)^2} = \frac{3}{8},\ \alpha_0^{(1)} = \frac{2!}{2^2(1!)^2} = \frac{1}{2},\ \alpha_0^{(0)} = 1 \\ &\alpha_1^{(2)} = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} = \frac{3}{2},\ \alpha_1^{(1)} = 1 \end{aligned}$$

したがって，次が得られた．

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= -\frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{1}{2}c_1\lambda + c_0 \\ a_1(\lambda) &= -\frac{3}{2}\lambda + c_1 \end{aligned}$$

以上の計算より，スペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ を計算する．

$$\begin{aligned} M(x,\lambda) &= Z_1(u-\lambda) - a_1(\lambda) Z_0(u-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}(u-\lambda) - (-\frac{3}{2}\lambda + c_1) \\ &= \frac{1}{2}u + \lambda - c_1 \end{aligned} \tag{3.47}$$

これをスペクトル判別式 $\Delta(\lambda)$ の定義式 (3.6) に代入すると

$$M_x = \frac{1}{2}u',\ M_{xx} = \frac{1}{2}u''$$

であるから，次が分かる．

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M_x^2 - 2MM_{xx} + 4(u-\lambda)M^2 \\ &= \frac{1}{2}u'^2 - \left(\frac{1}{2}u + \lambda - c_1\right)u'' + 4(u-\lambda)\left(\frac{1}{2}u + \lambda - c_1\right)^2 \\ &= -4\lambda^3 + 8c_1\lambda^2 \\ &\qquad + (-u'' + 3u^2 - 4c_1 u - 4c_1^2)\lambda \\ &\qquad - \left(\frac{1}{2}u - c_1\right)u'' + \frac{1}{4}u'^2 + u^3 - 4c_1u^2 + 4c_1^2 u \end{aligned}$$

この式を，(3.45) と (3.46) を利用して u と u の高階導関数を消去すると

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda^3 + 8c_1\lambda^2 + (8c_0 - 4c_1^2)\lambda + \frac{1}{4}k - 8c_0c_1 \tag{3.48}$$

が得られる．これは，結果的に定数係数多項式になっているが，実は，補題 10 で既に一般的に証明したことである．

次に，定数 c_0，c_1，k を場合に分けて計算し，特徴的な 1 次代数幾何的ポテンシャルを構成する．さらに Γ スペクトル，及び，対応する固有関数の構成を行う．

I. $c_1 = c_2 = 0$，$k = 0$ のとき：

この場合，方程式 (3.46) は

$$u'^2 = 2u^3$$

になるので

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int u^{-\frac{3}{2}}du = -\sqrt{2}u^{-\frac{1}{2}} = x + c$$

であるから，u について解くと

$$u(x) = \frac{2}{(x+c)^2} \tag{3.49}$$

である．

次に，スペクトルについて，スペクトル型 M 関数は

$$M(x,\lambda) = \frac{1}{2}u(x) + \lambda = \frac{1}{(x+c)^2} + \lambda$$

である．ここに c は任意定数である．他方，スペクトル判別式は (3.48) より，$c_0 = c_1 = k = 0$ とすると

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda^3$$

となるので Γ-スペクトルは

$$\Gamma(H(u)) = \{0\}$$

である．したがって，固有値 $\lambda = 0$ に対する固有関数は

$$f(x,0) = \sqrt{M(x,0)} = \frac{1}{x+c}$$

である．まずは，有理関数型が得られた．次にもう少し複雑な例を扱う．

II. $c_1 = -1$，$c_2 = 0$，$k = 0$ のとき：

この場合，方程式 (3.46) は

$$u'^2 = 2u^3 + 4u^2$$

になるので

$$\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2}u\sqrt{u+2}$$

である．したがって

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u+2}} = \pm\sqrt{2}(x+c)$$

である．ここに c は任意定数である．左辺は，$s = \sqrt{u+2}$ と変数変換すると $2sds = du$ で

$$左辺 = 2\int \frac{ds}{s^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}\right|$$

となる．したがって

$$\left|\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}\right| = e^{\pm 2(x+c)}$$

が成立する．

$$\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} = e^{\pm 2(x+c)}$$

ならば

$$s = \sqrt{2}\frac{1+e^{\pm 2(x+c)}}{1-e^{\pm 2(x+c)}} \tag{3.50}$$

であるから，ポテンシャル u は

$$u(x) = s(x)^2 - 2 = \frac{8}{(e^{x+c} - e^{-(x+c)})^2} \tag{3.51}$$

となる．このポテンシャル (3.51) は，$x = -c$ で $s = s(x)$ は不連続で有界ではない．**I.** の場合のポテンシャル (3.49) も $x = -c$ に特異点が存在する．しかし，この場合は，ソリトン理論（KdV 方程式の進行波解）の観点から，こちらを考えずに次の場合を主として考えることにする．即ち

$$\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} = -e^{\pm 2(x+c)}$$

ならば

$$s = \sqrt{2}\frac{1-e^{\pm 2(x+c)}}{1+e^{\pm 2(x+c)}}$$

であるから，簡単な計算で

$$u(x) = s^2 - 2 = -\frac{8}{(e^{x+c} + e^{-(x+c)})^2} = -2\mathrm{sech}^2(x+c) \tag{3.52}$$

が分かる．

これは，KdV ソリトンに相当するポテンシャルである．これらの事については大宮 [1, 100〜103 頁] に詳しく記載されている．

他方，スペクトル判別式は (3.48) より

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda^3 - 8\lambda^2 - 4\lambda = -4\lambda(\lambda+1)^2 \tag{3.53}$$

であるから

$$\Gamma(H(u)) = \{0, -1\}$$

である．また，スペクトル型 M 関数は (3.47) より

$$M(x,\lambda) = \frac{1}{2}u(x) + \lambda + 1 = -\mathrm{sech}^2(x+c) + \lambda + 1$$

である．したがって，この固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有関数は

$$f(x,-1) = i\,\mathrm{sech}\,(x+c) \tag{3.54}$$

である．他方，固有値 $\lambda = 0$ に対する固有関数は

$$f(x,0) = \sqrt{-\mathrm{sech}^2(x+c)+1}$$

である．これで，双曲線関数型が得られた．ここで，注意すべきなのは，固有関数 $f(x,-1)$ は二乗可積分であり，固有関数 $f(x,0)$ はそうではない事である．これは，$\lambda = -1$ は離散スペクトルであり，$\lambda = 0$ は，固有関数が有界に留まるだけなので，連続スペクトルに属することに起因している．では，さらに複雑な場合を扱う．

III. $c_0 = \frac{1}{8}g_2$，$c_1 = 0$，$k = -4g_3$（ただし $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$）のとき：

ここに条件に現れる g_2 は任意定数で，また，積分定数 k の替わりに，伝統に従って $4g_3$ と表すことにする．すると

$$u'^2 = 2u^3 - 2g_2u - 4g_3 \tag{3.55}$$

である．$u = 2p$ と置くと p は変数分離系の方程式

$$p'^2 = 4p^3 - g_2p - g_3 \tag{3.56}$$

を満たす．これは

$$\frac{dp}{dx} = \pm\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}$$

と書けば変数分離系で

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}} = x + c$$

と積分できるが，この左辺は楕円積分と呼ばれるもので，場合 I や場合 II と異なり，指数関数や三角関数等の初等関数で表すことができない．

(3.56) は，Weierstrass の楕円関数 $\wp(x+c,L)$ の満たす方程式（Weierstrass の標準形）なので，

$$u(x) = 2\wp(x+c,L)$$

であることが分かる．ここに L は，以下で定義される格子である．即ち，ω_1，ω_2 を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立な複素数として，$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とするとき

$$L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \boldsymbol{Z}\}$$

である．格子 L に関する Weierstrass の楕円関数 $\wp(x,L)$ は級数

$$\wp(x,L) = \frac{1}{x^2} + \sum_{l \in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right)$$

で定義される関数である．

スペクトル判別式は (3.48) より

$$\Delta(\lambda) = -4\lambda^3 + g_2\lambda - g_3$$

である．なお，楕円関数に関する条件

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

より，方程式 $\Delta(\lambda) = 0$ は重解を持たない．即ち

$$\Delta(\lambda) = -4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)$$

として

$$\Gamma(H(u)) = \{e_1, e_2, e_3\}$$

とすると e_1，e_2，e_3 は互いに相異なる数で，関係式

$$e_1e_2e_3 = -\frac{g_3}{4},\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4},\ e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{3.57}$$

が成立する．またスペクトル型 M 関数は (3.47) より

$$M(x,\lambda) = \frac{1}{2}u(x) + \lambda = \wp(x+c,L) + \lambda \tag{3.58}$$

である．したがって，これらの固有値 $\lambda = e_j$，$j = 1,\ 2,\ 3$ に対応する固有関数は

$$f(x,e_j) = \sqrt{\wp(x+c,L) + e_j},\ j = 1,2,3$$

である．いちおう，形式的ではあるが，楕円関数型が得られた．

この場合 III は，場合 I や場合 II と違って計算を行って導出したのではなく，既知の事実にあわせるべく係数を調節しただけである．結果的には，1 次代数幾何的ポテンシャルとしては代表的な下記の 3 つのものが挙げることができた．

(i) **有理ポテンシャル**：

$$u(x) = \frac{2}{(x+c)^2}$$

(ii) **双曲ポテンシャル**：

$$u(x) = -2\mathrm{sech}^2(x+c)$$

(iii) **楕円ポテンシャル**：

$$u(x) = 2\wp(x+c, \omega_1, \omega_2)$$

有理ポテンシャルは，確定特異点型，あるいは Fuchs 型方程式の最も簡単なものである．また，双曲ポテンシャルは，急減少型ポテンシャルの最も簡単な例である．そして，最後の楕円ポテンシャルは，Lamé方程式の最も簡単な例になっている．

3.6 まとめ

この章の結果をまとめておく．$u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルとして基本関係式

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u)$$

が成立しているとき，$u(x)$ に対応する M 関数

$$M(x) = Z_n(u(x)) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_{j-1}(u(x))$$

を定義する．M 関数は，1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

のポテンシャル $u(x)$ に対する Appell-Lindemann 方程式

$$L(u)M(x) = -\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}M(x) + u(x)\frac{d}{dx}M(x) + \frac{1}{2}u'(x)M(x) = 0$$

の解である．この事実より，展開公式により M 関数を拡張したスペクトル型 M 関数

$$M(x,\lambda) = Z_n(u(x)-\lambda) - \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda) Z_{j-1}(u(x)-\lambda)$$

を利用して，1 次元 Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x,\lambda) + u(x) f(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda)$$

の固有値とそれに対応する固有関数を代数的に構成した．

固有値は，スペクトル判別式

$$\Delta(\lambda) = M_x(x,\lambda)^2 - 2M(x,\lambda)M_{xx}(x,\lambda) + 4(u(x)-\lambda)M(x,\lambda)^2 = 0$$

を満たす λ の値であり，$\lambda = \lambda_0$ がスペクトル判別式を満たすとき，対応する固有関数は,

$$f(x) = \sqrt{M(x,\lambda_0)}$$

で求められる．

この章の最後では，スペクトル判別式や，固有関数導出の公式を利用して，1 次代数幾何的ポテンシャルについて言及を行った．結論として，1 次代数幾何的ポテンシャルとして，有理ポテンシャル，双曲ポテンシャル，楕円ポテンシャルという 3 種類のものの導出を行った．

第4章　定常KdV方程式の第一積分

4.1　はじめに

この章では，n 次定常 KdV 方程式を解くことを考える．ここで言う微分方程式を解くとは，方程式を加減乗除の四則演算，微分演算，不定積分演算，逆関数演算，代数方程式を解く演算，これら全ての演算を「有限回」繰り返すで方程式を変形し，変数分離形にして，解を不定積分で表すことをさすことにする．

4.2　自励系の第一積分

次の 1 階自励系

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{4.1}$$

を考える．これは，変数分離形なので直ちに

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx = x + c \tag{4.2}$$

と積分できる．このとき，この (4.2) の左辺が既知関数で書き表せるかについては，この左辺の不定積分をいろいろ調べて，大域的性質も含め分かるものとする．そして，新たな特殊関数として認知されるならば，

$$\int \frac{dy}{f(y)} = G(y)$$

として、これはその逆関数 $G^{-1}(x)$ を使って，y は x の関数として

$$y = G^{-1}(x)$$

と言う風に書き表され，これで微分方程式 (4.1) は解けたことになる．

しかし，この様な 1 階自励系では余りにも単純すぎるので，もう少し複雑な自由度 1 の Hamilton 系を考える．それは次のような連立微分方程式系である．

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここに $H(q,p)$ は q，p に関して連続偏微分可能な関数である．この方程式は，右辺に変数 t を含んでいないので，自励系である．この方程式は 2 階の方程式で，方程式 (4.1) のように，1 階自励系ではないので，すぐには積分できないが次のようにして 1 階自励系に変換できる．まず，$q = q(t)$，$p = p(t)$ を (4.3) の解として，それらを $H(q,p)$ に代入して t の関数を作り，それを t で微分する．そこで，上の (4.3) に注意して書き直すと次が分かる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) \\
&= \frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p}\frac{dp(t)}{dt} \\
&= \frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q}\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p} - \frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p}\frac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

即ち，$H(q,p)$ は，解 $q(t)$，$p(t)$ を代入すると定数 E になることを表している．これは言い換えると、I を解の存在区間として，解曲線を

$$C = \{(q(t),p(t)) \mid t \in I\}$$

とするとそれは曲線

$$L_E = \{(q,p) \mid H(q,p) = E\}$$

に含まれる事を意味する．即ち，局所的には p は q の関数になっている．したがって，それを

$$p = f(q) \tag{4.4}$$

とする．すると

$$F(q,p) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}$$

と置くと方程式 (4.3) の最初の方程式は

$$\frac{dq}{dt} = F(q, f(q))$$

となり，これは 1 階自励系なので，方程式 (4.1) と同様の方法で解くことで解 $q(t)$ が得られる．もうひとつの解 $p(t)$ は，この $q(t)$ を (4.4) に代入して得られる．即ち，自由度 1 の Hamilton 系は，Hamilton 関数を利用して，一つ変数を減らして実質的に 1 階自励系に変換することができる．これは，微分方程式を解くことの意味を示唆する重要な事実である．

Hamilton 系の Hamilton 関数のように関数を代入すると定数になる関数を，その微分方程式（系）の第一積分と言う．ここで，第一積分について定義しておく．

定義 9. n 階自励系

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ j = 1, 2, \cdots, n \tag{4.5}$$

の解 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$\cdots$、$x_n(t)$ に対して、n 変数の関数 $I(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

$$I(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) = 定数$$

となるとき，関数 $I(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を系 (4.5) の第一積分と言う．

この第一積分によって，n 階の方程式が $n-1$ 階の方程式に階数を低下する事ができる．さらに，第一積分が沢山あれば、階数をもっと下げることができる．実際には未知数の数 n より 1 個少ない $n-1$ 個の 関数的に独立な第一積分 $I_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$、$j = 1$，$2$，$\cdots$，$n-1$ があれば，n 階の連立方程式 (4.5) は 1 階自励系に変換できる．なお、関数的に独立とは $n-1$ 個の横ベクトル

$$\nabla I_1, \nabla I_2, \cdots, \nabla I_{n-1}$$

が恒等的には 1 次従属にならない事を言う．

次に，Hamilton 系の場合について考える．Hamilton 系の場合は，2 階の方程式であっても Hamilton 関数 $H(x, y)$ を 1 個の第一積分と見なすと，それだけで求積できた．この事は，もっと未知関数の多い場合に一般化できる．即ち，次の $2n$ 個の未知関数 q_1，q_2，$\cdots$，q_n，p_1，p_2，$\cdots$，p_n に対する次の Hamilton 系を考える．

$$\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2 \cdots, n \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_j}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n),\ \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

である．この場合も同様に

$$\boldsymbol{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)),\ \boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t))$$

を (4.6) の解として，それを Hamilton 関数に代入した $H(\boldsymbol{q}(\mathrm{t}), \boldsymbol{p}(t))$ を t で微分すると次が分かる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(\boldsymbol{q}(\mathrm{t}), \boldsymbol{p}(t)) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

即ち，一般の次元（自由度）でも，Hamilton 関数に解を代入したものは定数になることが分かるので，Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ は第一積分である．そこで

$$I_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$$

と置き，さらに，それ以外に $n-1$ 個の第一積分 $I_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$，$\cdots$，$I_{n-1}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ が存在するならば次が成立する．

定理 5. 任意の $0 \leq i,\ j \leq n-1$ に対して，

$$\{I_i, I_j\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial I_i}{\partial q_k} \frac{\partial I_j}{\partial p_k} - \frac{\partial I_i}{\partial p_k} \frac{\partial I_j}{\partial q_k} \right) = 0 \tag{4.7}$$

が成立し，それらが関数的に独立であるならば，Hamilton 系 (4.6) は求積可能である．

関係式 (4.7) は Poisson の括弧と呼ばれる解析力学で重要な役割を担う量である．全ての Poisson の括弧が 0 になるとき，その第一積分の集まりは包合的（in involution）であると言う．

この定理は一般に Liouville の定理と呼ばれる．この定理そのものは，原理的な解の構成アルゴリズムの存在を保障するだけである．したがって，この定理は，Liouville の意味における可積分性の定義と捉えることにする．そこで，次の定義を与えておく．

定義 10. 自由度 n の Hamilton 系は，自由度と同数の n 個の包合的な第一積分が存在するとき，Liouville の意味で完全積分可能であるという．

力学系が与えられたとき，その第一積分を調べるのは，重要な問題であるが，第一積分を構成するのは，非常に難しい問題である事も知られている．しかし，n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u) \right) = 0, \quad (c_j,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ :\text{定数}) \tag{4.8}$$

は，非常に簡明な方法で第一積分が構成でき，かつ包合性も簡単に証明することができる．そこで，次節より，n 次定常 KdV 方程式 (4.8) の第一積分の構成を行う．仮に，n 次定常 KdV 方程式が Hamilton 形式で表現できるならば、求める第一積分は半分で済む．ここでは，n 次定常 KdV 方程式 (4.8) の Hamilton 形式を実際に求めることは省略するが，Hamilton 形式での表現結果により，自由度が $n+1$ になることを利用することにする．したがって，Liouville の意味で完全積分可能であることを言うには、包合的な $n+1$ 個の第一積分を構成すればよいことになる．

4.3　一般化 M 関数

$u(x)$ を未知関数とする n 次定常 KdV 方程式を

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0 \tag{4.9}$$

とする．そこで $v(x)$ を任意の有理形関数，λ をスペクトル変数として，$v(x)$ に関する (3.29) 式を一般化して M 関数を

$$\tilde{M}(x,\lambda;v) = Z_n(v(x)) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(\lambda) Z_j(v(x)) \tag{4.10}$$

で定義する．ここに $p_j(\lambda)$，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ は

$$p_j(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{n-j} - \displaystyle\sum_{k=j+1}^{n} c_k \lambda^{k-j-1}, & j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \\ 1, \quad j = n \end{cases} \tag{4.11}$$

で定義されたスペクトル変数 λ の多項式である．また，この定義式 (4.11) に使われている定数 c_j，$j = 1, 2, \cdots, n$ は、n 次定常 KdV 方程式 (4.9) の係数である．

この $v(x)$ に関する一般化 M 関数は，もし $v(x)$ が n 次定常 KdV 方程式 (4.9) の解で

$$\dim V(u) = n+1$$

ならば，スペクトル型 M 関数である．しかし，ここでは，$v(x)$ はあくまでも任意の有理型関数に対して考えたものなので，スペクトル型 M 関数ではない．この $v(x)$ に関する一般化 M 関数については，次が成立する．

補題 12. 関数 $v(x)$ の微分多項式 $M_k(v(x))$，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ を次で定義する．

$$M_k(v(x)) = \begin{cases} Z_{n-k+1}(v(x)) - \displaystyle\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(v(x)), & k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ Z_0(v(x)) = 1, \quad k = n+1 \end{cases} \tag{4.12}$$

すると

$$\tilde{M}(x,\lambda;v) = \sum_{k=1}^{n+1} M_k(v(x))\lambda^{k-1} \tag{4.13}$$

が成立する．さらに

$$\frac{d}{dx}\Lambda(v) M_k(v(x)) = \frac{d}{dx} M_{k-1}(v(x)),\ k = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{4.14}$$

が成立する．

証明. 最初に (4.13) を示す．そのためには，式 (4.10) に (4.11) を代入して，λ に関して整理すれば良い．実際，定義 (4.11) と上の定義式 (4.12) に注意すると次が分かる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}(x,\lambda;v) &= Z_n(v) + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\lambda^{n-j} - \sum_{k=j+1}^{n} c_k\lambda^{k-j-1}\right)Z_j(v) \\
&= Z_n(v) + \sum_{j=0}^{n-1} Z_j(v)\lambda^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} c_k Z_j(v)\lambda^{k-j-1} \\
&= Z_n(v) + \sum_{k=2}^{n+1} Z_{n-k+1}(v)\lambda^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} c_k Z_j(v)\lambda^{k-j-1} \\
&= Z_n(v) + \sum_{k=2}^{n+1} Z_{n-k+1}(v)\lambda^{k-1} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{j} c_j Z_{j-l}(v)\lambda^{l-1} \\
&= Z_n(v) + \sum_{k=2}^{n+1} Z_{n-k+1}(v)\lambda^{k-1} - \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=l}^{n} c_j Z_{j-l}(v)\right)\lambda^{l-1} \\
&= Z_n(v) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_{j-1}(v) + \lambda^n + \sum_{k=2}^{n} Z_{n-k+1}(v)\lambda^{k-1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(v)\right)\lambda^{k-1} \\
&= \lambda^n + \sum_{k=2}^{n} M_k(v)\lambda^{k-1} + M_1(v)
\end{aligned}
$$

したがって，(4.13) は証明できた．他方，

$$\Lambda(v)Z_j(v) = Z_{j+1}(v)$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Lambda(v)M_k(v) &= \frac{d}{dx}\left(Z_{n-k+2}(v) - \sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k+1}(v)\right) \\
&= \frac{d}{dx}(M_{k-1}(v) + c_{k-1}) \\
&= \frac{d}{dx}M_{k-1}(v)
\end{aligned}
$$

であるから，(4.14) も示された． □

以上の準備の下，第一積分の構成を行う．

4.4 n 次定常 KdV 方程式の第一積分の生成

第一積分の構成に必要な多項式を，次に定義する．

定義 11. 有理型関数 $v(x)$ と n 次定常 KdV 方程式 (4.9) に対して定まる関数 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ を

$$\tilde{\Delta}(x,\lambda;v) = \tilde{M}_x(x,\lambda;v)^2 - 2\tilde{M}(x,\lambda;v)\tilde{M}_{xx}(x,\lambda;v) + 4(v(x)-\lambda)\tilde{M}(x,\lambda;v)^2 \quad (4.15)$$

で定義し，積分生成多項式と呼ぶ．

積分生成多項式の定義式 (4.15) は，第 3.3 節の定義 8 のスペクトル判別式 $\Delta(\lambda;u)$ の定義式 (3.6) と全く同じ形をしている．これは，第 3.3 節の補題 10 においてスペクトル判別式 $\Delta(\lambda;u)$ が x に依存しないことを示した．$\Delta(\lambda;u)$ はスペクトル変数 λ の多項式で，その係数は $u(x)$ の微分多項式である．そのことは，その n 次代数幾何的ポテンシャル $u(x)$ を一般の未知関数 $v(x)$ に置き換えれば，それらの係数である微分多項式が，考えている n 次定常 KdV 方程式の第一積分になるということを表している．

実際，次のことが分かる．

補題 13. 任意の有理型関数 $v(x)$ に対して，等式

$$\frac{d}{dx}\tilde{\Delta}(x,\lambda;v) = 8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v(x)) \quad (4.16)$$

が成立する．

証明. 直接計算により，次が分かる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tilde{\Delta} &= 2\tilde{M}_x\tilde{M}_{xx} - 2\tilde{M}_x\tilde{M}_{xx} - 2\tilde{M}\tilde{M}_{xxx} + 4v'\tilde{M}^2 + 8(v-\lambda)\tilde{M}\tilde{M}_x \\
&= 8\tilde{M}\left(-\frac{1}{4}\tilde{M}_{xxx} + (v-\lambda)\tilde{M}_x + \frac{1}{2}v'\tilde{M}\right) \\
&= 8\tilde{M}\left(\frac{d}{dx}\Lambda(v)\tilde{M} - \lambda\tilde{M}_x\right)
\end{aligned} \quad (4.17)$$

他方，上の補題 12 の式 (4.13) と (4.14) に注意すると，次が分かる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Lambda(v)\tilde{M} &= \frac{d}{dx}\Lambda(v)\left(\sum_{j=1}^{n+1} M_j\lambda^{j-1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} M_j'\lambda^j \\
&= M_0' + \lambda\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n+1} M_j\lambda^{j-1}\right) \\
&= M_0' + \lambda\tilde{M}_x
\end{aligned} \quad (4.18)$$

したがって，(4.18) を (4.17) に代入すると等式 (4.16) が得られる． □

この補題から直ちに次が分かる．

系 3. 関数 $v(x)$ が n 次定常 KdV 方程式 (4.9) の解ならば，積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ は x に依存しない．

証明. 等式 (4.16) において，定義 (4.12) に注意しながら右辺の M_0' を詳しく書くと，$c_0 Z_0(v(x))$ は定数だから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}M_0(v(x)) &= \frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(v(x)) - \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(v(x))\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(v(x)) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(v(x))\right) = 0\end{aligned}$$

である． □

補題 12 より，$\tilde{M}(x,\lambda;v)$ は λ の n 次モニック多項式で，$n-1$ 次以下の係数は $v(x)$ の微分多項式である．したがって，定義式 (4.15) より積分生成多項式は最高次が -4 の $2n+1$ 次の λ の多項式で，$2n$ 次以下の係数は $v(x)$ の微分多項式である．すなわち，表示式

$$\tilde{\Delta}(x,\lambda;v) = -4\lambda^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} I_j(v(x))\lambda^j \tag{4.19}$$

が成立する．ここに $I_j(v(x))$，$j=0,1,\cdots,2n$ は $v(x)$ の微分多項式である．したがって，上の系 3 より次を証明した事になる．

定理 6. 積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ の係数 $I_j(v(x))$，$j=0,1,\cdots,2n$ は $v(x)$ の微分多項式で，n 次定常 KdV 方程式 (4.9) の第一積分である．

この定理で，第一積分は構成できた．ここで，求められた第一積分は，$2n+1$ 個である．しかし，4.2 節の最後で述べた Hamilton 表示より自由度は $n+1$ であるから，必要な第一積分は $n+1$ 個である．したがって，$2n+1$ 個の第一積分のなかには，意味の無いもの，即ち，関数的に独立でないものや自明なもの，即ち，無条件に定数であるものも含まれている可能性がある．次にそれを明らかにする．

補題 13 の等式 (4.16) に，補題 12 の (4.13) 式を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde{\Delta}(x,\lambda;v) &= 8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v(x))\\ &= 8\left(\sum_{k=1}^{n+1} M_k(v(x))\lambda^{k-1}\right)\frac{d}{dx}M_0(v(x))\end{aligned} \tag{4.20}$$

であるから，これは n 次の多項式である．そこで積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ を次のように分解する．

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_I(x,\lambda;v) &= -4\lambda^{2n+1} + \sum_{j=n+1}^{2n} I_j(v(x))\lambda^j \\ \tilde{\Delta}_{II}(x,\lambda;v) &= \sum_{j=0}^{n} I_j(v(x))\lambda^j\end{aligned} \tag{4.21}$$

すると上のことより，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\tilde{\Delta}_I(x,\lambda;v) = 0 \\ &\frac{d}{dx}\tilde{\Delta}_{II}(x,\lambda;v) = \sum_{j=0}^{n} I'_j(v(x))\lambda^j = 8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v(x))\end{aligned} \tag{4.22}$$

が分かる．即ち，積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ は $2n+1$ 次多項式だが，その最高次から $n+1$ 次までの係数は無条件に定数である．それに対して，n 次の係数は $8M_0(v(x))$ である．したがって

$$I_n(v(x)) = 8M_0(v(x)) = 8\left(Z_{n+1}(v(x)) - \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(v(x))\right) \tag{4.23}$$

である．また，$n-1$ 次以下は (4.20) と (4.22) より

$$\frac{d}{dx}I_j(v(x)) = 8M_{j+1}(v(x))\frac{d}{dx}M_0(v(x)), \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \tag{4.24}$$

であるから両辺積分して $I_j(v(x))$ について解いておくと

$$I_j(v(x)) = 8\int M_{j+1}(v(x))\frac{d}{dx}M_0(v(x))dx, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \tag{4.25}$$

が分かる．$I_j(v(x))$ が $v(x)$ の微分多項式である事は積分生成多項式の定義 (4.15) よりほぼ明らかだが，それらの関数的独立性や包合性を調べるにはもう少し詳しい事を調べておく必要がある．そのために次の補題を示す．

補題 14. $M_j(v(x))$ を補題 12 の (4.12) で定義される $v(x)$ の微分多項式とする．すると任意の $i,\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n+1$ に対して

$$M_i(v(x))\frac{d}{dx}M_j(v(x)) = \frac{d}{dx}P_{ij}(v(x)) \tag{4.26}$$

が成立するような微分多項式 $P_{ij}(v(x))$ が存在する．

証明. まず $i=j$ ならば，明らかに

$$M_i(v)M_i'(v) = \frac{1}{2}\left(M_i(v)^2\right)'$$

が成立するから，C を任意定数として

$$P_{ii}(v) = \frac{1}{2}M_i(v)^2 + C \tag{4.27}$$

である．また補題 4.12 の (4.14) に注意すると，次が分かる．

$$\begin{aligned}\int M_i(v)M_{i-1}'(v)dx &= \int M_i(v)(\Lambda M_i(v))'dx\\
&= \int M_i(v)\left(\frac{1}{2}v'M_i(v) + vM_i'(v) - \frac{1}{4}M_i'''(v)\right)dx\\
&= \frac{1}{2}vM_i(v)^2 - \frac{1}{2}\int 2vM_i(v)M_i'(v)dx + \int vM_i(v)M_i'(v)dx\\
&\qquad - \frac{1}{4}M_i(v)M_i''(v) + \frac{1}{4}\int M_i'(v)M_i''(v)dx\\
&= \frac{1}{2}vM_i(v)^2 - \frac{1}{4}M_i(v)M_i''(v) + \frac{1}{8}M_i'(v)^2 + C\end{aligned}$$

すなわち

$$M_i(v)M_{i-1}'(v) = \left(\frac{1}{2}vM_i(v)^2 - \frac{1}{4}M_i(v)M_i''(v) + \frac{1}{8}M_i'(v)^2 + C\right)'$$

であるから

$$P_{ii-1}(v) = \frac{1}{2}vM_i(v)^2 - \frac{1}{4}M_i(v)M_i''(v) + \frac{1}{8}M_i'(v)^2 + C \tag{4.28}$$

である．次に，再び補題 4.12 の (4.14) に注意すると，次が分かる．

$$\begin{aligned}&M_{i-1}(v)M_{j+1}'(v)\\
&= (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' - M_{i-1}'M_{j+1}(v)\\
&= (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' - (\Lambda M_i(v))'M_{j+1}\\
&= (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' - \left(\frac{1}{2}v'M_i(v) + vM_i'(v) - \frac{1}{4}M_i'''\right)M_{j+1}(v)\end{aligned}$$

他方，Leibniz の法則にしたがい計算すると，次が分かる．

$$
\begin{aligned}
&\bigg(M_{i-1}(v)M_{j+1}(v) + \frac{1}{4}M_i''(v)M_{j+1}(v) \\
&\qquad -\frac{1}{4}M_i'(v)M_{j+1}'(v) + \frac{1}{4}M_i(v)M_{j+1}''(v) - vM_i(v)M_{j+1}\bigg)' \\
&\qquad\qquad + M_i(v)\left(\frac{1}{2}v'M_{j+1}(v) + vM_{j+1}'(v) - \frac{1}{4}M_{j+1}'''(v)\right) \\
&\quad = (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' \\
&\qquad\qquad - \left(\frac{1}{2}v'M_i(v) + vM_i'(v) - \frac{1}{4}M_i'''(v)\right)M_{j+1}(v) \\
&\quad = (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' - (\Lambda M_i(v))'M_{j+1}(v) \\
&\quad = (M_{i-1}(v)M_{j+1}(v))' - M_{i-1}'(v)M_{j+1}(v) \\
&\quad = M_{i-1}(v)M_{j+1}'(v)
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

この式変形は，何故この様な式を思いついたかまで考えると少し無理がある．しかし，この種類の問題では，結構良く知られたものである．例えば [13, p.168] を参照されたい．

この (4.29) の最初の式の最後の項については、次が成立する事が分かる．

$$
\begin{aligned}
M_i(v)\left(\frac{1}{2}v'M_{j+1}(v) + vM_{j+1}'(v) - \frac{1}{4}M_{j+1}'''(v)\right) &= M_i(v)(\Lambda M_{l+1}(v))' \\
&= M_i(v)M_j'(v)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

したがって，式 (4.29) と (4.30) をまとめると，次が分かる．

$$
\begin{aligned}
&M_{i-1}(v)M_{j+1}'(v) \\
&\quad = \bigg(M_{i-1}(v)M_{j+1}(v) + \frac{1}{4}M_i''(v)M_{j+1}(v) - \frac{1}{4}M_i'(v)M_{j+1}'(v) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4}M_i(v)M_{j+1}''(v) - vM_i(v)M_{j+1}(v)\bigg)' + M_i(v)M_j'(v)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

即ち，

$$
M_{i-1}(v)M_{j+1}'(v) = P_{i-1j+1}'(v) \tag{4.32}
$$

となる微分多項式 $P_{i-1j+1}(v)$ が存在するならば

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(v) = P_{i-1j+1}(v) &- M_{i-1}(v)M_{j+1}(v) - \frac{1}{4}M_i''(v)M_{j+1}(v) \\
&+ \frac{1}{4}M_i'(v)M_{j+1}'(v) - \frac{1}{4}M_i(v)M_{j+1}''(v) + vM_i(v)M_{j+1}(v)
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

と置くと，

$$
P_{ij}'(v) = M_i(v)M_j'(v) \tag{4.34}
$$

が成立することが分かる．上の推論を見ると，(4.34) が成立するならば，(4.32) が成立することも分かる．即ち，$M_i(v)M'_j(v)$ において，$i+j$ を一定に保てば，上のような変形が，微分多項式の範囲内で自在にできることが示された．したがって，$i+j=2k$ ならば，上の操作を繰り返して (4.27) に注意すると，(4.26) が成立する微分多項式 $P'_{ij}(v)$ が存在することが分かる．同様に，$i+j=2k-1$ の場合は，(4.28) に注意すれば良い． □

次に，$I_j(v)$，$j=0,1,2,\cdots,n$ が関数的に独立な第一積分であることを示す．表示式 (4.25) において部分積分を実行する．補題 12 の定義式 (4.12) より，微分多項式 $M_{j+1}(v)M'_0(v)$ の最高階導関数の項は，k 次導関数を $v^{(k)}(x)$ で表すと，α を零でない定数として，$\alpha v^{(2n)}(x)v^{(2n-2j-2)}(x)$ である．

$$
\begin{aligned}
&\int \alpha v^{(2n)}(x)v^{(2n-2j-2)}(x)dx \\
&\quad = \alpha\left(v^{(2n-1)}(x)v^{(2n-2j-2)}(x) - \int v^{(2n-1)}(x)v^{(2n-2j-1)}(x)dx\right)
\end{aligned}
$$

この式と上の (4.31) を見ると，微分多項式 $I_j(v)$ の最高次導関数は $v^{(2n-1)}(x)$ で，それを含む項は $\alpha v^{(2n-1)}(x)v^{(2n-2j-2)}(x)$ のみであることが分かる．独立変数を

$$v_j = v^{(j)}(x),\ j=0,1,2,\cdots,2n-1$$

と置くと，第一積分 $I_j(v)$ は変数 v_j，$j=0,1,2,\cdots,2n-1$ の多項式である．したがって，$I_j(v)$ は項 $\alpha v_{2n-1}v_{2n-2j-2}$ を含むので，明らかに関数的に独立である．よって，次が示された．

補題 15. 第一積分 $I_j(v)$，$j=0,1,2,\cdots,n$ は関数的に独立である．

構成した第一積分が包合系であることを示すには，さらに Poisson 括弧が消えることを示さなければならない．しかし，現時点で，古典代数解析的手法による直接的な計算による一般的な証明は，どの変数を選んでも，ただただ煩雑になるだけで推薦できるほどには洗練されていない．関数的独立性の証明までは，かなりすっきりした方法になっている様に思えるが，Poisson 括弧の計算に関しては，何等かの工夫が必要と思われる．一般的な方法としては，Dickey[13, 170〜178 頁] に詳しく解説されているベクトル場のつくる Lie 環の方法がある．そこで，Poisson 括弧の消えることの証明は，上掲の Dickey の方法に譲ることにする．以上のことを定理としてまとめておく．

定理 7. 代数方程式

$$\Omega(\lambda) = \lambda^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} c_j\lambda^j = 0$$

は重根を持たないとする．補題 12 の (4.12) 式で定義される微分多項式 $M_j(u)$，$j = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$I_j(u(x)) = \begin{cases} 8M_0(u(x)), \quad j = n \\ \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u(x))\frac{d}{dx}M_0(u(x))dx, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{cases}$$

と置くと，$I_j(u)$，$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ は n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0$$

の包合的な第一積分である．即ち，この n 次定常 KdV 方程式は Liouville の意味で完全積分可能である．また、n 次定常 KdV 方程式は自由度 $n+1$ のハミルトン系に同値である．例えば，Ohmiya[14] を参照されたい．

4.5　まとめ

この章で得られた n 次定常 KdV 方程式の第一積分についてまとめる．n 次定常 KdV 方程式の第一積分は，公式

$$I_j(u(x)) = \begin{cases} 8M_0(u(x)), \quad j = n \\ \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u(x))\frac{d}{dx}M_0(u(x))dx, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{cases}$$

によって，初等代数のみを扱うことで構成することができる．また，第一積分になるメカニズムがはっきり判るため，他のオペレーターへの一般化が考えられる．

第5章　定常KdV方程式の解における Weierassの標準形と周期性

5.1　はじめに

この章では，第 4 章で構成方法を述べた定常 KdV 方程式の解における第一積分を用いて，楕円関数に対する Weierstrass の標準形に相当するものを代数的に構成する．さらに，それを用いて問題を Heun 型方程式のモノドロミーの計算に帰着させ，その解の二重周期性を，楕円関数論を用いずに証明する．定常 KdV 方程式が高階の場合，第一積分の導出は非常に煩雑になるため，1 次定常 KdV 方程式の解における第一積分を用いて，具体的な形を構成し，その構成方法の一般化を示す．一般化することで，可積分である高階定常 KdV 方程式による，超楕円関数に対するアプローチを可能とする．

5.2　1次定常KdV方程式による微分方程式型Weierassの標準形

3.5 節において，すでに 1 次定常 KdV 方程式を具体的に構成しているが再度述べる．1 次定常 KdV 方程式は，KdV 多項式 (定義 2) を用いると

$$Z_2(u) = c_1 Z_1(u) + c_0 Z_0(u), \quad c_0, c_1 : \text{定数} \tag{5.1}$$

で表される．このとき

$$Z_0(u) = 1, \quad Z_1 = \frac{1}{2}u, \quad Z_2(u) = -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2$$

である．

1 次代数幾何的ポテンシャルに対応する M 関数 (補題 12) は，

$$M_k(u(x)) = \begin{cases} Z_{2-k}(u(x)) - \displaystyle\sum_{j=k}^{1} c_j Z_{j-k}(u(x)), & k = 0,\ 1 \\ \\ Z_0(u(x)) = 1,\ k = 2 \end{cases}$$

である．具体的な計算結果を次に示す．

$$\begin{aligned}
M_0(u) &= -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 - \frac{1}{2}c_1 u - c_0 \\
M_1(u) &= \frac{1}{2}u - c_1 \\
M_2(u) &= 1
\end{aligned} \tag{5.2}$$

したがって，第一積分生成多項式 (定理 7)

$$I_j(u(x)) = \begin{cases} 8M_0(u(x), & j = 1 \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u(x))\frac{d}{dx}M_0(u(x))dx, & j = 0 \end{cases}$$

は，M 関数 (5.2) を用いると，次の 2 つの非自明な第一積分を構成できる．

$$\begin{aligned}
I_0(u) &= u^3 - 4c_1u^2 + 4c_1^2u - \frac{1}{2}u''u + \frac{1}{4}u'^2 + c_1u'' + k_0 \\
I_1(u) &= 3u^2 - 4c_1u - u'' + k_1
\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここに，k_0，k_1 は定数である．

この 2 つの第一積分より，2 階導関数 u'' を消去すると，Weierstrass の標準形に相当する関係式

$$u'^2 = 2u^3 - 2K_2u - 4K_3, \quad (K_2, K_3; \text{定数}) \tag{5.4}$$

が構成できる．このとき，右辺の 3 次多項式の非退化条件は

$$K_2^3 - 27K_3^2 \neq 0 \tag{5.5}$$

である．

以上が微分方程式である 1 次定常 KdV 方程式による Weierstrass の標準形の構成方法である．また，この構成方法が，一般化できることは容易にわかる．

5.3 Heun 型微分方程式

次に，1 次定常 KdV 方程式の第一積分 (7.3) と Weierstrass の標準形 (7.4) より，変数 $u(x)$ を変数変換行うことで，Fuchs 型微分方程式の構成を行う．

まず第一積分 (7.3) の 1 つを

$$u'' = 3u^2 - K_2 = G(u), \tag{5.6}$$

Weierstrass の標準形 (7.4) を

$$u'^2 = 2u^3 - 2K_2u - 4K_3 = F(u) \tag{5.7}$$

とする．

次に，1 次元 Schrödinger 方程式

$$-f'' + (u(x) - \lambda)f = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx} \tag{5.8}$$

において変数変換

$$\xi = u(x) \tag{5.9}$$

を行う．ここで，

$$\phi(\xi) = f(x)$$

とすると

$$\phi_\xi = \frac{df}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{f'}{u'} \tag{5.10}$$

と

$$\begin{aligned} \phi_{\xi\xi} &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{f'}{u'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f'}{u'}\right)\frac{dx}{d\xi} \\ &= \frac{f''u' - f'u''}{u'^3} = \frac{f''}{u'^2} - \frac{f'}{u'}\frac{u''}{u'^2} \end{aligned} \tag{5.11}$$

が成立する．変数変換 (5.9) に注意して，1 次元 Schrödinger 方程式 (5.8) に式 (5.6), (5.7)，(5.10)，(5.11) を代入すると

$$\phi_{\xi\xi} = \frac{(\xi - \lambda)\phi}{F(\xi)} - \phi_\xi \frac{G(\xi)}{F(\xi)} \tag{5.12}$$

となる．したがって，1 次元 Schrödinger 方程式 (5.8) は，有理関数係数の微分方程式

$$\phi_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right)\phi_\xi - \frac{\xi - \lambda}{2(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}\phi = 0 \tag{5.13}$$

に変換される．ここで e_1, e_2, e_3 は

$$F(\xi) = 2\xi^3 - 2K_2\xi - 4K_3 = 2(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3) = 0 \tag{5.14}$$

を満たすものとし，非退化条件 (5.5) より

$$e_1 \neq e_2 \neq e_3$$

であるから，(5.13) は有限な確定特異点を 3 つもつ Fuchs 型の微分方程式である．このような微分方程式を Heun 型微分方程式という．

定義 12 (Fuchs 型微分方程式). 関数 $p(x)$，$q(x)$ を正則かつ，有理関数とするとき，2 階線形斉次常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

において，特異点が全て確定特異点であるものを Fuchs 型微分方程式と言う．

Fuchs 型微分方程式としては，Gauss 型微分方程式（超幾何微分方程式）

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\Big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\Big)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \tag{5.15}$$

が有名である．この微分方程式 (5.15) は，$x=0,\ 1,\ \infty$ において，確定特異点をもち，それ以外に特異点を持たない．また，モノドロミーによる局所構造だけでなく，大域構造も解析することができる．

Heun 型微分方程式 (5.13) については，Gauss 型微分方程式と異なり，通常，大域構造を知ることはできない．例外として，微分方程式 (5.13) において，スペクトルパラメータ λ が，特異点 e_j と一致する場合，大域構造を知ることができる．しかし，今の場合，決定方程式 $\Gamma_j(\rho)$ は，λ に依存していないことから，λ はアクセサリパラメータとしての役割しかない．そのため，Heun 型微分方程式 (5.13) は，モノドロミーによる局所構造しか解析することはできない．Heun 型微分方程式 (5.13) は，元々，1 次元 Schrödinger 方程式 (5.8) の変換式であったため，1 次元 Schrödinger 方程式の固有値問題（定義 4）を利用することができる．このことを使って解の構成ができないか考察してみる．

スペクトル判別式 $\Delta(\lambda)$ は 3.5 節より

$$\Delta(\lambda)=-4\lambda^3+K_2\lambda-K_3$$

である．このとき，

$$\xi=-2\lambda$$

とすると

$$F(\xi)=4\Delta(\lambda)$$

が成立するので

$$\lambda=-\frac{e_1}{2},\quad -\frac{e_2}{2},\quad -\frac{e_3}{2} \tag{5.16}$$

が分かる．したがって，(5.16) が，1 次元 Schrödinger 作用素の Γ-スペクトルである．これらの Γ-スペクトルに対するスペクトル M 関数は

$$M(x,\ -\frac{e_j}{2})=\frac{1}{2}\Big(u(x)-e_j\Big),\quad j=1,\ 2,\ 3$$

であるから

$$f_j(x)=\sqrt{u(x)-e_j},\ j=1,2,3 \tag{5.17}$$

は 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\right)f_j=\lambda_j f_j,\qquad \lambda_j=-\frac{e_j}{2},\quad j=1,\ 2,\ 3 \tag{5.18}$$

における固有値 λ_j に対応する固有関数である．したがって，具体的な解が構成できる．式 (5.18) より，

$$u(x)=\frac{f_j''(x)+\lambda_j f_j(x)}{f_j(x)},\quad j=1,\ 2,\ 3$$

なので，3 つの $u(x)$ を求めることができる．このことは，固有値問題 (5.18) が解けることを示しているが，実際のところ，$u(x)$ を求めることはできない．なぜならば，前提として，$f_j(x)$ そのものを固有値問題によって，導かなければならないからである．したがって，この方法による解の構成はできない．

そこで，固有値問題を解くことからでなく，Heun 型微分方程式の局所モノドロミーを考察することによって，$f(x)$ の性質を解析することにする．さきに，$f(x)$ の性質について，述べておく．

定理 8. 高階定常 KdV 方程式の解である $u(x)$ が，1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\right)f(x)=\lambda f(x)$$

を満たすとき，$f(x)$ は，周期関数である．

次節で，$f(x)$ が，周期関数であることを証明する．

5.4 定理 8 の証明

式 (7) の確定特異点は，e_1，e_2，e_3，∞ である．この中から，3 点についてノドロミーを求めれば，残りの 1 点も求めたことになるので，有限特異点 3 つのモノドロミーを求めることにする．

特異点 e_1 の時：

$$\phi(\xi)=(\xi-e_1)^t\cdot(1+\text{正則}) \tag{5.19}$$

とする．式 (5.19) を Heun 型微分方程式 (5.13) に代入すると

$$t(t-1)(\xi-e_1)^{t-2}+\frac{1}{2}t(\xi-e_1)^{t-2}+\ \text{高次}\ \cdots \tag{5.20}$$

となる．モノドロミーは，最低次の係数にのみ着目するので，式 (5.20) は，最低次のみ表している．式 (5.20) より，モノドロミーの決定方程式は

$$\Gamma=\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}\rho=0$$

となるので

$$\rho = 0,\ \frac{1}{2} \tag{5.21}$$

である．これにより，特異点周りを 2 回まわることで，元の点に戻ってくることがわかる．

特異点 e_2，e_3 の時：
e_1 の時と同様に求めることができる．

ここで，3 つの有限な特異点 e_1，e_2，e_3 の周りを回る解析接続の様子について説明する．

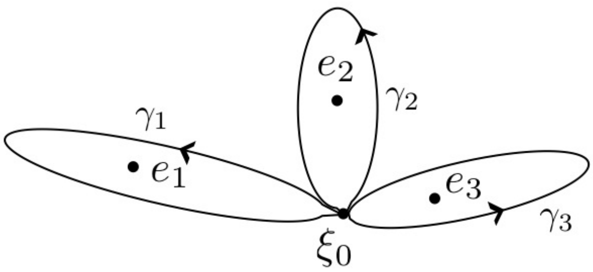

図 5.1: 3 つの特異点周りの解析接続

その様子を，図5.1のよう考える．この図では，各々の特異点について，$u(x_0) = \xi_0$ とし，ξ_0 を出発して，特異点 e_j だけを左に見ながら反時計回りに回る曲線を描いている．このとき，この曲線を γ_j とする．また，一般の解析関数 $g(\xi)$ を γ_j に沿って解析接続したものを

$$g(\gamma_j^* \xi)$$

で表す．今回の場合，(5.21) より，1 つの特異点周りの解析接続は，2 回まわることで元の点に戻ってくることがわかる．1 回まわった時は，見かけ上，元の点に戻ってきたように見えるが，そうではないので，注意が必要である．

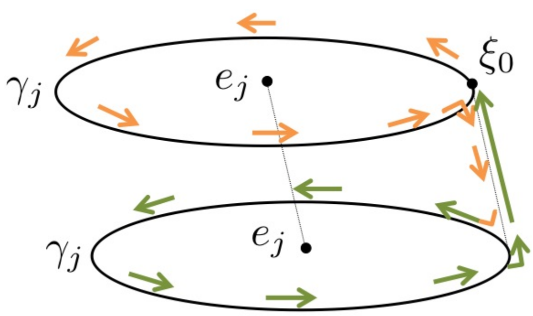

図 5.2: 特異点周りの解析接続の様子

その様子を図 5.2 に描く．このとき，二つの曲線 γ_j の始点と終点を結ぶ曲線を

$$\widetilde{\gamma_j} = \gamma_j \circ \gamma_j$$

と表す．これは，ξ_0 を出発して特異点 $\xi = e_j$ を 2 回まわる閉曲線である．したがって，次が成立する．

$$\phi(\gamma_j^*(\gamma_j^*\xi_0)) = \phi(\widetilde{\gamma_j}^*\xi_0) = \phi(\xi_0) \tag{5.22}$$

これは，ξ-平面のおける解析関数 $g(\xi)$ の解析接続の様子である．では，変数変換前の x-平面における解析接続に引き戻してやるとどうなるかを次に考える．

まず，ξ-平面において，同値式 (5.22) より，2 点は同一点であるが，x-平面では，非退化条件 (5.14) より，$u(x) \in \tilde{\gamma}_j$ ならば

$$u'(x)^2 \neq 0 \tag{5.23}$$

が従うので，同一点とはなり得ない．図 5.3 は，その様子を表している．

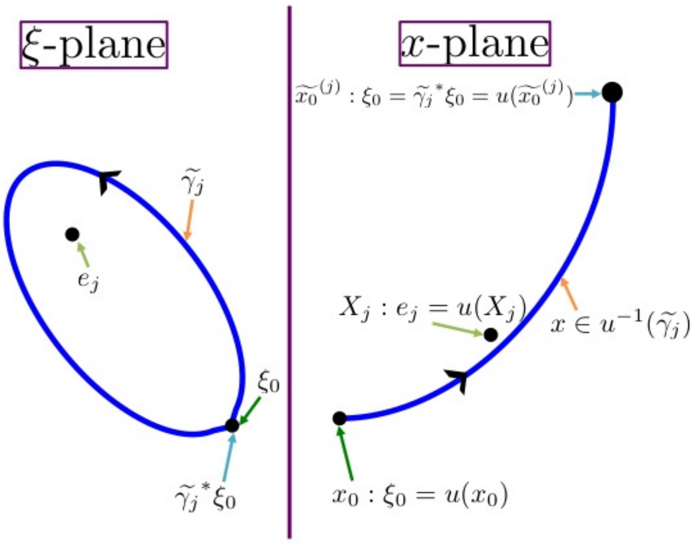

図 5.3: ξ-平面とそれに対応する x-平面での解析接続の様子

図 5.3 では，ξ-平面における特異点 e_j に対応する x-平面での特異点を X_j と表した．青い線は，解析接続を表し，ξ-平面では，内側に特異点 e_j をただ 1 つをもつような閉曲線であったが，x-平面では，特異点 X_j を避けて通る開曲線になる．条件式 (5.23) より，ξ-平面における解析接続を上手くとると，x-平面において解析接続が直線にとれる．図 5.4 がその様子を表している．

1 つの問題として，x_0 と $\widetilde{x_0}^{(j)}$ を結ぶ直線上に特異点 X_j がある場合が考えられる．しかしこれは，元々ξ_0 を任意の点としているので，対応する x_0 も任意にとることができるため，必ず特異点を避けて直線を引くことができる．また，この直線は，無限に延長することが可能である．したがって，

$$f(x_0) = f(u^{-1}(\xi_0)) = f(u^{-1}(\widetilde{\gamma_j}^*\xi_0)) = f(\widetilde{x_0}^{(j)})$$

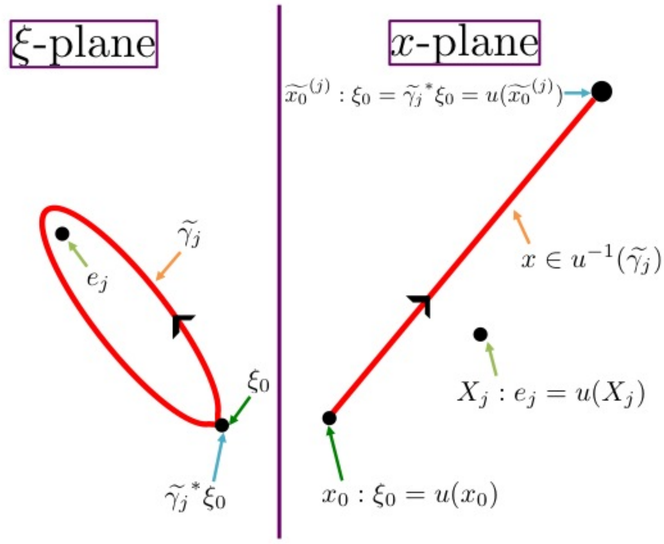

図 5.4: x-平面での解析接続が直線となる場合

が成り立ち，$f(x)$ が周期関数であることが証明できた．この事実から，さらに重要なことがわかる．次の定理にまとめる．

定理 9. 高階定常 KdV 方程式の解である $u(x)$ が，1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right) f(x) = \lambda f(x)$$

を満たすとき，$f(x)$ が周期関数であるならば，

$$u(x) = \frac{f''(x) + \lambda f(x)}{f(x)}$$

より，$u(x)$ も周期関数である．

したがって，各々の特異点周りの解析接続によって，各々の点で $u(x)$ が周期関数であることが判明したが，実際，有限な特異点は，3 つある．そこで，つぎは，３つの特異点周りでは，どうなるかを調べる．図 5.5 でその様子を描く．

まず，無限遠点については，決定方程式の解 (5.21) より，分岐点とならない，非自明解を選ぶことができるので，問題ない．次に，3 つの特異点において，各々，解析接続を描いている．これだけを見ると，$u(x)$ が 3 重周期を持つように見えるが，実際，このうち，二つを回ることで，残り 1 つは回ったことになっている．したがって，図 5.5 のように

$$\widetilde{\gamma_3} \sim \widetilde{\gamma_1} \circ \widetilde{\gamma_2}$$

が成り立つ．このことより，3 つの周期のうち，1 つは，他の 2 つの周期に依存することになる．よって，$u(x)$ は，2 重周期である．定理としてまとめておく．

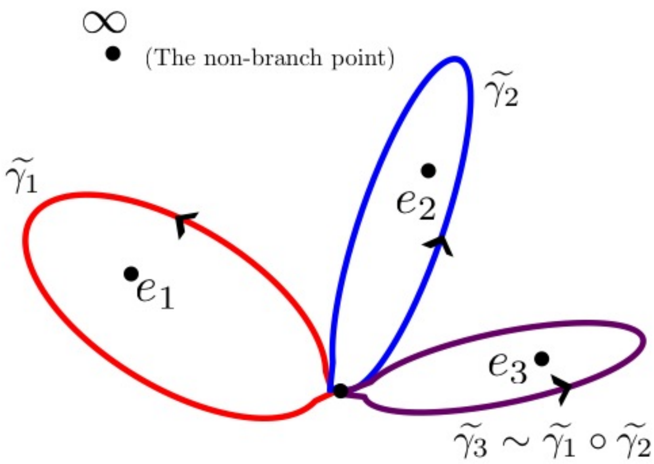

図 5.5: 3 つの有限な特異点周りでの解析接続

定理 10. 1 次定常 KdV 方程式の解 $u(x)$ は，非退化条件 (5.5) を満たすならば，2 重周期関数である．言い換えると，$u(x)$ は，楕円関数である．

以上より，$u(x)$ が 2 重周期性をもつことにより，楕円関数であることを証明できた．元々，楕円関数論を使うことによって，直接的に 1 次定常 KdV 方程式の解を構成することができるので，あまり意味のないものに思える．しかし，楕円関数論を用いずに，2 重周期性が証明したことは，画期的であり，この方法は，高次定常 KdV 方程式に応用できる．そこで，超楕円関数論への拡張を考えてみる．

1 次定常 KdV 方程式の時と同様に，まず，2 次定常 KdV 方程式における第一積分の 1 つを構成してみると

$$
\begin{aligned}
I_1(u) =& \frac{1}{2}c_1c_2u^2 - \frac{3}{8}c_1u^3 - \frac{3}{16}c_2u^4 + \frac{1}{8}c_2^2u^3 + \frac{9}{128}u^5 \\
&+ \frac{1}{2}c_1^2u + \frac{3}{16}c_1u'^2 + \frac{1}{32}c_2^2u'^2 + \frac{1}{32}uu''^2 + \frac{13}{64}c_2u^2u'' \\
&- \frac{1}{16}c_2^2uu'' - \frac{1}{8}c_1c_2u'' + \frac{5}{16}c_1uu'' - \frac{15}{128}u^3u'' - \frac{1}{64}c_2u''^2 \\
&+ \frac{3}{128}u'^2u'' - \frac{3}{128}uu'u''' + \frac{1}{64}c_2u'u''' + \frac{1}{512}u'''^2 \\
&- \frac{1}{256}u''u'''' + \frac{3}{256}u^2u'''' - \frac{1}{64}c_2uu'''' - \frac{1}{32}c_1u''''
\end{aligned}
$$

のように複雑な形をしている．そのため，具体的に高階の場合に Weierstrass の標準形に相当するものを構成するには，新たな手法が必要となる．

5.5 まとめ

この章において，構成したもの，証明されたものについてまとめておく．

初めに，1 次定常 KdV 方程式を具体例に挙げ，微分方程式型 Weierstrass の標準形の構成を行った．

1 次定常 KdV 方程式は，c_0，c_1 を定数とすると

$$Z_2(u) = c_1 Z_1(u) + c_0 Z_0(u), \qquad \left(Z_0(u) = 1,\ Z_1 = \frac{1}{2}u,\ Z_2(u) = -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2\right)$$

で定義され，このとき，ポテンシャル $u(x)$ は 1 次代数幾何的ポテンシャルを満たす．また，このポテンシャル $u(x)$ に対応する M 関数は

$$M_k(u(x)) = \begin{cases} Z_{2-k}(u(x)) - \displaystyle\sum_{j=k}^{1} c_j Z_{j-k}(u(x)), & k = 0,\ 1 \\ \\ Z_0(u(x)) = 1,\ k = 2 \end{cases}$$

で定義され，第一積分生成多項式

$$I_j(u(x)) = \begin{cases} 8M_0(u(x), & j = 1 \\ \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u(x))\frac{d}{dx}M_0(u(x))dx, & j = 0 \end{cases}$$

より，k_0，k_1 を定数とすると，2 つの非自明な第一積分

$$\begin{aligned} I_0(u) &= u^3 - 4c_1 u^2 + 4c_1^2 u - \frac{1}{2}u''u + \frac{1}{4}u'^2 + c_1 u'' + k_0 \\ I_1(u) &= 3u^2 - 4c_1 u - u'' + k_1 \end{aligned} \tag{5.24}$$

を構成できる．この 2 つの第一積分より，K_2，K_3 を定数とすると，微分方程式型 Weierstrass の標準形

$$u'^2 = 2u^3 - 2K_2 u - 4K_3, \quad (\text{非退化条件}:K_2^3 - 27K_3^2 \neq 0) \tag{5.25}$$

が構成することができる．この構成方法は，高次の n 次代数幾何的ポテンシャルにも応用できる，しかし，高次になれば，第一積分が複雑化するため，具体的な表示式を構成するのは，困難である．

次に，1 次定常 KdV 方程式から構成した第一積分 (5.24) と微分方程式型 Weierstrass の標準形 (5.25) を利用して，1 次元 Schrödinger 方程式

$$-f'' + (u(x) - \lambda)f = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx}$$

において，変数変換

$$\xi = u(x), \quad (\phi(\xi) = f(x))$$

を行うことで，1 次元 Schrödinger 方程式を有理関数係数の微分方程式

$$\phi_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right)\phi_\xi - \frac{\xi - \lambda}{2(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}\phi = 0 \tag{5.26}$$

に変換を行った．この方程式は，非退化条件から

$$e_1 \neq e_2 \neq e_3$$

であることから，3 つの有限確定特異点を持つ Fuchs 型微分方程式である．そこで，この 3 つの有限確定特異点における局所モノドミーの考察を行った．結果，各々の特異点における局所モノドロミーの様子より，1 次元 Schrödinger 方程式

$$-f'' + (u(x) - \lambda)f = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx}$$

の固有関数 $f(x)$ が周期を有し，$u(x)$ も周期関数であることを証明した．また，3 つの特異点を回る局所モノドロミーの様子から 2 つ回れば，残り 1 つ回ったことになることから，$u(x)$ が 2 重周期を持つことを証明した．この証明は，楕円関数論を用いない新しい 2 重周期性の証明方法になっている．

第6章　1次元Dirac作用素の準可換微分作用素

6.1　はじめに

本章では，mKdV(-) 方程式の線形化作用素である 1 次元 Dirac 作用素

$$P(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} + v(x) \\ -\dfrac{d}{dx} + v(x) & 0 \end{pmatrix}$$

の準可換微分作用素の構成，さらにその二つの作用素の交換子から得られる 0 階の微分作用素について考察することを目的とする．方法として，すでに研究されている代数的手法を用いた 1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトル理論を利用する．また，0 階の微分作用素 として構成された微分多項式 $K_n(v)$ が驚くべき簡明な等式を表していたので，そのことについて言及する．その等式は，mKdV(-) 方程式の解と KdV 方程式の解の間の深い関係を Darboux 変換によって示唆するものであり，今後の研究の発展の足ががりとなりうるものである．

6.2　Miura 変換と Lax 表示

mKdV(-) 方程式と KdV 方程式の関係について，1968 年に R. M. Miura は，次の事実を発見した．

定理 11 (R. M. Miura[4])**.** 関数 $v = v(x,t)$ が mKdV(-) 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{6.1}$$

の解ならば，Miura 変換

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \tag{6.2}$$

で定義される関数 $u = u(x,t)$ は KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{6.3}$$

の解である．

　この Miura 変換 (6.2) より，P. D. Lax は，ソリトン理論の基礎となる KdV 方程式の Lax 表示を発見した．

定理 12 (P. D. Lax[8])**.** $u = u(x,t)$ が KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の解ならば，微分作用素 $H(u)$, $A(u)$ を

$$H(u) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$

$$A(u) = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - 3u_x(x,t)$$

で定めると，KdV 方程式に対して Lax 表示

$$\frac{d}{dt}H(u) = [H(u), A(u)] = H(u)A(u) - A(u)H(u)$$

が成立する．また，1 次元 Schrödinger 作用素 $H(u)$ のスペクトルは t に依存しない．

　また，Miura 変換 (6.2) には，作用素の交換公式である Darboux 変換が成り立つことが知られている．

定義 13 (Darboux 変換)**.** 1 次元 Schrödinger 作用素 $H(u)$ の固有値問題

$$(H(u) - \lambda)f(x,\lambda) = 0$$

の非自明解 $f(x,\lambda)$ に対して

$$v(x) = \frac{d}{dx}\log f(x,\lambda) = \frac{f'(x,\lambda)}{f(x,\lambda)}$$

と置いて 1 階作用素 $A^{(\pm)}$ を

$$A^{(\pm)} = \pm\frac{d}{dx} + v(x)$$

で定義すると

$$u(x) - \lambda = v'(x) + v(x)^2$$

が成立し

$$H(u) - \lambda = A^{(+)}A^{(-)}$$

である．さらに

$$\begin{aligned} u^*(x) &= u(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\log f(x,\lambda) \\ &= u(x) - 2v'(x) = -v'(x) + v(x)^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

と置くと

$$H(u^*) - \lambda = A^{(-)}A^{(+)} \tag{6.5}$$

が成立する．このとき (6.5) で定義される作用素 $H(u^*)$ を $H(u)$ の Darboux 変換と言う．また (6.4) で定義されるポテンシャル $u^*(x)$ だけでも Darboux 変換と言う．

これらの事実から，具体的に 1 次元 Dirac 作用素の準可換微分作用素の構成を行う．

6.3 2 成分 Schrödinger 作用素の準可換微分作用素

1 次元 Dirac 作用素を次で定義する．

定義 14 (1 次元 Dirac 作用素)**.** 1 次元 Dirac 作用素を

$$P(v) = \begin{pmatrix} 0 & L(v) \\ L^*(v) & 0 \end{pmatrix}, \quad L(v) = \frac{d}{dx} + v(x), \quad L^*(v) = -\frac{d}{dx} + v(x) \tag{6.6}$$

で定義する．また，Miura 変換

$$u(x) = v'(x) + v^2(x)$$

と Darboux 変換

$$u^*(x) = -v'(x) + v^2(x)$$

を用いて，2 成分 Schrödinger 作用素を

$$S(v) = \begin{pmatrix} H(u) & 0 \\ 0 & H(u^*) \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき，1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ と 2 成分 Schrödinger 作用素 $S(v)$ には，次の関係式が成り立つ．

$$S(v) = \begin{pmatrix} L(v)L^*(v) & 0 \\ 0 & L^*(v)L(v) \end{pmatrix} = P^2(v) \tag{6.7}$$

次に，1 次元 Schrödinger 作用素の準可換微分作用素は，

$$A_n(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)D - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

より，2 成分微分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ を定義する．

定義 15. 2 成分微分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ を

$$\widetilde{A}_n(v) = \begin{pmatrix} A_n(u) & 0 \\ 0 & A_n(u^*) \end{pmatrix}$$

で定義する．

これより，次の定理が成り立つ．

定理 13 (2 成分 Schrödinger 作用素の準可換微分作用素)**.** *2* 成分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ は，2 成分 Schrödinger 作用素 $S(v)$ の準可換 2 成分微分作用素である．

証明. 計算をすればただちに証明される．

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{A}_n(v), S(v)] &= \widetilde{A}_n(v)S(v) - S(v)\widetilde{A}_n(v) \\
&= \begin{pmatrix} A_n(u)H(u) - H(u)A_n(u) & 0 \\ 0 & A_n(u^*)H(u^*) - H(u^*)A_n(u^*) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [A_n(u), H(u)] & 0 \\ 0 & [A_n(u^*), H(u^*)] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって，補題 3 より

$$
[\widetilde{A}_n(v), S(v)] = \begin{pmatrix} Z'_{n+1}(u) & 0 \\ 0 & Z'_{n+1}(u^*) \end{pmatrix}
$$

が成立するので，$\widetilde{A}_n(v)$ は $S(v)$ の準可換 2 成分微分作用素である． □

この定理を用いて，1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ の準可換微分作用素を求める．

6.4 1 次元 Dirac 作用素の準可換微分作用素

1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ の準可換微分作用素，及び，交換子により構成される 0 階の微分作用素は次のようになる．

定理 14 (1 次元 Dirac 作用素の準可換微分作用素)**.** 2 成分微分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ は，1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ の準可換 2 成分微分作用素である．また，

$$
[\widetilde{A}_n(v), P(v)] = \begin{pmatrix} 0 & K_n^*(v) \\ K_n(v) & 0 \end{pmatrix}
$$

で定義される 0 階の微分作用素である微分多項式 $K_n(v)$，$K_n^*(v)$ は

$$
K_n(v) = K^*n(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u) - Z_{n+1}(u^*)\Big) \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots
$$

である．

実際に，成り立つか証明を行う．この証明には，次の定理と補題を利用する．

定理 15 (Darboux 変換の基本等式 [15])**.** 等式

$$
B^* Z_j(u) = BZ_j(u^*), \quad B = D + 2v(x), \quad B^* = -D + 2v(x) \tag{6.8}
$$

が成立する．

補題 16 (Association アルゴリズム)**.** 等式 (6.7) の関係より，次の順序変換が可能である．

$$\begin{aligned} H(u)^{n-j}L(v) &= L(v)H(u^*)^{n-j} \\ H(u^*)^{n-j}L^*(v) &= L^*(v)H(u)^{n-j} \end{aligned} \tag{6.9}$$

証明. (6.7) より

$$\begin{aligned} H(u)^{n-j}L(v) &= \Big(L(v)L^*(v)\Big)^{n-j}L(v) \\ &= L(v)\Big(L^*(v)L(v)\Big)^{n-j} = L(v)H(u^*)^{n-j} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} H(u^*)^{n-j}L^*(v) &= \Big(L^*(v)L(v)\Big)^{n-j}L^*(v) \\ &= L^*(v)\Big(L(v)L^*(v)\Big)^{n-j} = L^*(v)H(u)^{n-j} \end{aligned}$$

であるから，括弧の括りをかえるだけで，明らか証明される． □

これらの事実を使って，次節では，定理 14 の証明を示す．

6.5 定理 14 の証明

$\widetilde{A}_n(v)$ と $P(v)$ の交換子を

$$\begin{aligned} \Big[\widetilde{A}_n(v), P(v)\Big] &= \widetilde{A}_n(v)P(v) - P(v)\widetilde{A}_n(v) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A_n(u)L(v) - L(v)A_n(u^*) \\ A_n(u^*)L^*(v) - L^*(v)A_n(u) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & K_n^*(v) \\ K_n(v) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする．このとき，$K_n(v)$ は

$$\begin{aligned} K_n(v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\Big\{&\Big(Z_j(u^*)D - \frac{1}{2}Z_j'(u^*)\Big)H(u^*)^{n-j}L^*(v) \\ &- L^*(v)\Big(Z_j(u)D - \frac{1}{2}Z_j'(u)\Big)H(u)^{n-j}\Big\} \end{aligned}$$

である．ここで，Association アルゴリズム (6.9) を利用すると，$H(u)^{n-j}$ でまとめられ

$$\begin{aligned} K_n(v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\Big\{&\Big(Z_j(u^*)D - \frac{1}{2}Z_j'(u^*)\Big)L^*(v) \\ &- L^*(v)\Big(Z_j(u)D - \frac{1}{2}Z_j'(u)\Big)\Big\}H(u)^{n-j} \end{aligned}$$

となる．次に (6.6) より作用素計算をすると

$$
\begin{aligned}
K_n(v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\Bigl\{&\Bigl(Z_j(u) - Z_j(u^*)\Bigr)D^2 \\
&+ \frac{1}{2}\Bigl(Z_j'(u) + Z_j'(u^*)\Bigr)D - v\Bigl(Z_j(u) - Z_j'(u^*)\Bigr)D \\
&+ \frac{1}{2}v\Bigl(Z_j'(u) - Z_j'(u^*)\Bigr) + v'Z_j(u^*) - \frac{1}{2}Z_j'''(u)\Bigr\}H(u)^{n-j}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，Darboux 変換の基本等式 (6.8) より

$$
\frac{1}{2}\Bigl(Z_j'(u) + Z_j'(u^*)\Bigr) - v\Bigl(Z_j(u) - Z_j'(u^*)\Bigr) = 0
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
K_n(v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\Bigl\{&\Bigl(Z_j(u) - Z_j(u^*)\Bigr)D^2 \\
&+ \frac{1}{2}v\Bigl(Z_j'(u) - Z_j'(u^*)\Bigr) + v'Z_j(u^*) - \frac{1}{2}Z_j''(u)\Bigr\}H(u)^{n-j}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

が成立する．ここで，$J_n(v)$ を

$$
\begin{aligned}
J_n(v) = \frac{1}{2}\Bigl\{&\Bigl(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Bigr)D^2 \\
&+ \frac{1}{2}v\Bigl(Z_n'(u) - Z_n'(u^*)\Bigr) + v'Z_n(u^*) - \frac{1}{2}Z_n''(u)\Bigr\}
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

で定義する．すると，$K_n(v)$ は $J_n(v)$ を用いて，漸化式

$$
K^n(v) = J^n(v) + K_{n-1}(v)H(u) \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{6.12}
$$

で表わせる．ただし，$n = 0$ は

$$
K_0(v) = J_0(v) = \frac{1}{2}v'
$$

である．

$K_n^*(v)$ の場合も同様の道筋で進めると

$$
\begin{aligned}
K_n^*(v) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\Bigl\{&\Bigl(Z_j(u) - Z_j(u^*)\Bigr)D^2 \\
&- \frac{1}{2}v\Bigl(Z_j'(u) - Z_j'(u^*)\Bigr) + v'Z_j(u) + \frac{1}{2}Z_j''(u^*)\Bigr\}H(u^*)^{n-j}
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

$$
\begin{aligned}
J_n^*(v) = \frac{1}{2}\Bigl\{&\Bigl(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Bigr)D^2 \\
&- \frac{1}{2}v\Bigl(Z_n'(u) - Z_n'(u^*)\Bigr) + v'Z_n(u) + \frac{1}{2}Z_n''(u^*)\Bigr\}
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

が成立し，漸化式

$$K_n(v) = J_n(v) + K_{n-1}(v)H(u) \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.15}$$

で表わせる．ただし，$n = 0$ は

$$K_0^*(v) = J_0^*(v) = \frac{1}{2}v'$$

である．$K_n(v)$ と $K_n^*(v)$ が一致することは，帰納法を使ってただちに証明できる．

次に，$K_n(v) = K_n^*(v)$ の具体的な式について，関数 $K_n(v)$ を

$$K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u) - Z_{n+1}(u^*)\Big) \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.16}$$

と仮定する．$K_n(v)$ は，(6.12) より

$$K_0(v) = J_0(v)$$

$$K_n(v) = J_n(v) + K_{n-1}(v)H(u) \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.17}$$

である．$K_n(v)$ は $n = 0$ のとき，(6.12)，(6.16)，とも

$$Z_1(u) = \frac{1}{2}u(x)$$

より

$$K_0(v) = \frac{1}{2}v'(x)$$

である．$n-1$ のとき

$$K_{n-1}(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Big) \tag{6.18}$$

が成立するとする．漸化式 (6.12) に (6.18) を代入すると

$$K_n(v) = J_n(v) + \frac{1}{2}\Big(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Big)H(u)$$

であるから，(3.10) より

$$\begin{aligned} K_n(v) = &\ \frac{1}{2}\Big(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Big)D^2 + \frac{1}{4}v\Big(Z_n'(u) - Z_n'(u^*)\Big) + \frac{1}{2}v'Z_n(u^*) - \frac{1}{4}Z_n''(u) \\ &-\frac{1}{2}\Big(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Big)D^2 + \frac{1}{2}u\Big(Z_n(u) - Z_n(u^*)\Big) \end{aligned}$$

となる．ここで，D^2 の項は消去でき，(6.2) を利用して整理すると

$$\begin{aligned} K_n(v) = &-\frac{1}{4}Z_n''(u) + \frac{1}{4}vZ_n'(u) - \frac{1}{4}vZ_n'(u^*) \\ &+ \frac{1}{2}v^2Z_n(u) - \frac{1}{2}v^2Z_n(u^*) + \frac{1}{2}v'Z_n(u) \end{aligned}$$

となる．この $K_n(v)$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
K_n'(v) =& -\frac{1}{4}Z_n'''(u) + \frac{1}{4}vZ_n''(u) - \frac{1}{4}vZ_n''(u^*) + \frac{3}{4}v'Z_n'(u) - \frac{1}{4}v'Z_n'(u^*) \\
&+ \frac{1}{2}v^2Z_n'(u) - \frac{1}{2}v^2Z_n'(u^*) + vv'Z_n(u) - vv'Z_n(u^*) + \frac{1}{2}v''Z_n(u)
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

である．同様に $K_n^*(v)$ は

$$
\begin{aligned}
K_n^*(v) =& \quad \frac{1}{4}Z_n''(u^*) - \frac{1}{4}vZ_n'(u) - \frac{1}{4}vZ_n'(u^*) \\
&+\frac{1}{2}v^2Z_n(u) - \frac{1}{2}v^2Z_n(u^*) + \frac{1}{2}v'Z_n(u^*)
\end{aligned}
$$

となり，よって $K_n^{*'}(v)$ は

$$
\begin{aligned}
K_n^{*'}(v) =& \quad \frac{1}{4}Z_n'''(u^*) - \frac{1}{4}vZ_n''(u) + \frac{1}{4}vZ_n''(u^*) - \frac{1}{4}v'Z_n'(u) + \frac{3}{4}v'Z_n'(u^*) \\
&+\frac{1}{2}v^2Z_n'(u) - \frac{1}{2}v^2Z_n'(u^*) + vv'Z_n(u) - vv'Z_n(u^*) + \frac{1}{2}v''Z_n(u^*)
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

となる．ここで，(6.19)，(6.20) が一致することより

$$
\begin{aligned}
K_n'(v) &= \frac{1}{2}\Big(K_n'(v) + K_n^{*'}(v)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\bigg\{\Big(\frac{1}{2}(2vv' + v'')Z_n(u) + (v^2 + v')Z_n'(u) - \frac{1}{4}Z_n'''(u)\Big) \\
&\qquad - \Big(\frac{1}{2}(2vv' - v'')Z_n(u^*) + (v^2 - v')Z_n'(u^*) - \frac{1}{4}Z_n'''(u^*)\Big) \\
&\qquad + vv'Z_n(u) - vv'Z_n(u^*) - \frac{1}{2}v'Z_n'(u) - \frac{1}{2}v'Z_n'(u^*)\bigg\}
\end{aligned}
$$

が成立する．Association アルゴリズム (6.9) より

$$
vv'Z_n(u) - vv'Z_n(u^*) - \frac{1}{2}v'Z_n'(u) - \frac{1}{2}v'Z_n'(u^*) = 0
$$

であるから，(6.2) より

$$
u'(x) = 2v(x)v'(x) + v''(x), \quad u^{*'}(x) = 2v(x)v'(x) - v''(x)
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
K_n'(v) = \frac{1}{2}\bigg\{&\Big(\frac{1}{2}u'(x) + u(x)D - \frac{1}{4}D^3\Big)Z_n(u) \\
&-\Big(\frac{1}{2}u^{*'}(x) + u^*(x)D - \frac{1}{4}D^3\Big)Z_n(u^*)\bigg\}
\end{aligned}
$$

と整理できる．Λ 作用素 (2.24) より

$$
K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(\Lambda(u)Z_n(u) - \Lambda(u^*)Z_n(u^*)\Big)
$$

と表すことができ

$$K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u) - Z_{n+1}(u^*)\Big) \tag{6.21}$$

を満たす．

したがって，1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ の準可換 2 成分微分作用素 $\widetilde{A}_n(v)$ から，微分多項式 $K_n(v)$ を構成できた．この関係式 (6.21) は，今後の研究を発展させる重要な関係式である．次の節では，この $K_n(v)$ より，新たに分かった事実を述べる．

6.6　$K_n(v)$ と mKdV 階層

ここでは，前節によって構成できた微分多項式

$$K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u) - Z_{n+1}(u^*)\Big) \tag{6.22}$$

について，考察を行う．まず，式 (6.22) に内包している KdV 多項式 $Z_n(u)$ について，再定義をする．

定義 16. KdV 多項式 $Z_n(u)$ は，漸化作用素

$$\Lambda(u) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}u'(x) + u(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\right) \tag{6.23}$$

を用いて，漸化式

$$Z_{j+1}(u) = \Lambda(u)Z_j(u), \quad Z_0(u) = 1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.24}$$

で表される．また，1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

と微分作用素

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

によって，

$$[A_n, H(u)] = \frac{d}{dx}Z_{n+1}(u)$$

が成立する．

これにより，微分多項式 $K_n(v)$ について，KdV 多項式 $Z_n(u)$ と同じく漸化作用素を構成することが可能であると思われる．そこで，微分多項式 $K_n(v)$ に対応する漸化作用素の構成を試みる．

式 (6.22) に漸化式 (6.24) を代入すると

$$K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(\Lambda(u)Z_n(u) - \Lambda(u^*)Z_n(u^*)\Big). \tag{6.25}$$

漸化作用素 (6.23) より

$$\begin{aligned} K_n(v) =& \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{-1}\Bigg(\Big(\frac{1}{2}u'(x) + u(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\Big)Z_n(u) \\ & - \Big(\frac{1}{2}u^{*'}(x) + u^*(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\Big)Z_n(u^*)\Bigg). \end{aligned} \tag{6.26}$$

Miura 変換 (14) を用いて，整理すると

$$\begin{aligned} K_n'(v) = \frac{1}{2}\Big\{ & 2vv'K_{n-1}(v) + 2v^2K_{n-1}'(v) - \frac{1}{2}K_{n-1}'''(v) \\ & + \frac{1}{2}v''\Big(Z_n(u) + Z_n(u^*)\Big) + v'\Big(Z_n'(u) + Z_n'(u^*)\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{6.27}$$

となる．ここで，Darboux 変換の基本公式 (6.8) より，

$$Z_n'(u) + Z_n'(u^*) = 4vK_{n-1} \tag{6.28}$$

であり，積分を形式的に D^{-1} とあらわすと

$$Z_n(u) + Z_n(u^*) = D^{-1}\Big(4vK_{n-1}\Big). \tag{6.29}$$

式 (6.28) と式 (6.29) を (6.27) の右辺の第 3 項，第 4 項に代入して，整理すると

$$K_n'(v) = 3vv'K_{n-1}(v) + v^2K_{n-1}'(v) - \frac{1}{4}K_{n-1}'''(v) + v''D^{-1}\Big(vK_{n-1}\Big). \tag{6.30}$$

式 (6.30) を積分すると

$$K_n(v) = D^{-1}\Big(-\frac{1}{4}K_{n-1}''' + v^2K_{n-1}' + 2vv'K_{n-1}\Big) + v'D^{-1}\Big(vK_{n-1}\Big) \tag{6.31}$$

が成立する．式 (6.31) の右辺の最後の項を見ると，D^{-1} の前に v' が出てきており，漸化作用素 $\Lambda(u)$ のように D^{-1} で完全にくくれた形で表現できていないので，扱い易い形の漸化作用素を構成できていない．しかし，いちおう，微分多項式 $K_n(v)$ の漸化式の構成に成功した．

これらの事実より，非線形定常微分方程式である n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\Big(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=0}^{n} c_jZ_j(u)\Big) = 0$$

の構成は定常 KdV 階層と呼ばれる．同様に，非線形定常微分方程式

$$K_n - \sum_{j=0}^{n-1} e_jK_j = 0, \quad e_j : 定数$$

の構成を定常 mKdV 階層と呼ぶことができる．

6.7 Darboux変換の一般化

恒等式 (6.16) において，$n = 0$ のとき

$$K_0(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_1(u) - Z_1(u^*)\Big)$$

であり，これを具体的に書くと

$$\frac{1}{2}v'(x) = \frac{1}{4}u(x) - \frac{1}{4}u^*(x)$$

である．さらに $u^*(x)$ について解くと

$$u^*(x) = u(x) - 2v'(x)$$

が得られる．これは，Darboux 変換の式そのものであり，さらに定理 4 で得られた等式を $Z_{n+1}(u^*)$ について解くと

$$Z_{n+1}(u^*) = Z_{n+1}(u) - 2K_n(v)$$

が得られる．この式は，Darboux 変換の一般化に相当する極めて興味深い等式である．

6.8 1次元Dirac作用素の性質

微分方程式

$$\begin{cases} SF(x) = 0 \\ PG(x) = 0 \end{cases}$$

の解を考える．ここに

$$P(v) = \begin{pmatrix} 0 & L(v) \\ L^*(v) & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} H(u) & 0 \\ 0 & H(u^*) \end{pmatrix}$$

である．このとき，$u^+(x)$ が代数幾何的ポテンシャルであると，代数的に $SF(x) = 0$ は解くことができる．

定義 17 (代数幾何的ポテンシャル)**.** ベクトル空間 $V(u)$ を

$$V(u) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{C} Z_n(u), \qquad \dim V(u) < \infty.$$

としたとき，$V(u)$ が $n+1$ 次元ならば，$u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルという．

(6.7) より $SF(x)=0$ は

$$P(PF(x))=0$$

と表すことができ，$PF(x)=G(x)$ とすると $PG(x)=0$ の解は，$PF(x)=0$ の時 $F(x)$ になる．また，$PF(x)\neq 0$ の時は，$F(x)$ が解ではないが $PG(x)=0$ であるから $G(x)$ が解となる．したがって，$PG(x)=0$ は代数的に解くことができる．以上のことから，1 次元 Dirac 方程式の解は，1 次元 Schrödinger 方程式の解を利用して具体的に構成できる．

スペクトルパラメータを含む固有値問題の解も同様の関係が成立するが，具体的な解の構成を含め将来の研究の課題とする．

6.9 まとめ

この章において，構成できたものについてまとめておく．

1 次元 Dirac 作用素を

$$P(v)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx}+v(x) \\ -\dfrac{d}{dx}+v(x) & 0 \end{pmatrix}$$

で定義すると，1 次元 Dirac 作用素 $P(v)$ の準可換 2 成分微分作用素は，

$$\widetilde{A}_n(v)=\begin{pmatrix} A_n(u) & 0 \\ 0 & A_n(u^*) \end{pmatrix}$$

$$A_n(u)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)D-\frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

である．また，2 つの作用素の交換子

$$[\widetilde{A}_n(v),P(v)]=\begin{pmatrix} 0 & K_n(v) \\ K_n(v) & 0 \end{pmatrix}$$

より構成される 0 階の作用素である微分多項式は

$$K_n(v)=\frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u)-Z_{n+1}(u^*)\Big) \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.32}$$

であり，定常 KdV 階層の構成ができた．また，(7.6) より

$$Z_{n+1}(u^*)=Z_{n+1}(u)-2K_n(v)$$

は，Darboux 変換の一般化を示しており，定常 KdV 階層と定常 mKdV 階層の間にある階層構造のつながりを Darboux 変換を通じて明瞭に示されている．

第7章　最後に

本論文では，n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0$$

に対する古典代数解析的手法を用いた研究結果を報告している．

第 2 章では，KdV 程式の線形化作用素である 1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

の準可換微分作用素

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

の構成，及び，交換子 $[H(u), A_n]$ より導かれる 0 階の微分作用素である微分多項式 $Z_n(u)$ の考察を行っている．また，微分作用素 $H(u)$ と A_n が可換になる条件より，微分多項式 $Z_n(u)$ から，n 次定常 KdV 方程式を構成している．さらに，n 次定常 KdV 方程式を解析するため，代数幾何的ポテンシャルという概念を導入している．

第 3 章では，代数幾何的ポテンシャルの概念から成立する関係式

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u)$$

から，n 次定常 KdV 方程式を解析するのにとても重要な関数である M 関数

$$M_k(u) = \begin{cases} Z_{n-k+1}(u) - \displaystyle\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(u), & k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ Z_0(u) = 1, & k = n+1 \end{cases}$$

を定義している．この M 関数は，微分多項式 $Z_n(u)$ に成り立つ展開公式から拡張が可能であり，拡張された関数をポテンシャル $u(x)$ に対するスペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ として定義している．また，このスペクトル型 M 関数は，3 階線形常微分方程式である Appell-Lindemann 方程式

$$\frac{d}{dx}\Lambda(u-\lambda)M(x,\lambda) = -\frac{1}{4}M'''(x,\lambda) + (u(x)-\lambda)M'(x,\lambda) + \frac{1}{2}u'(x)M(x,\lambda) = 0 \quad (7.1)$$

の解になっており，Appell-Lindemann 方程式 (7.1) が，1 次元 Schrödinger 作用素に対する固有値問題

$$(H(u)-\lambda)f(x,\lambda)=0$$

の解 $f_1(x,\lambda)$，$f_2(x,\lambda)$ による 2 次形式で表すことができる方程式であることから，1 次元 Schrödinger 作用素の固有値 λ_0 に対する固有関数を

$$f(x)=\sqrt{M(x,\lambda_0)}$$

で求めることができることを言及している．また，公式 (7) を利用して，1 次代数幾何的ポテンシャルについて解析を行い，代数幾何的ポテンシャルが，非常に興味深いものであることを示している．それは，$u(x)$ を 1 次代数幾何的ポテンシャルとするならば，ポテンシャル $u(x)$ が，有理ポテンシャル，双曲ポテンシャル，楕円ポテンシャルという 3 つのポテンシャルを有しており，それらは，Fuchs 型方程式，ソリトン解，楕円関数との繋がりを示していることから，研究の広がりを感じさせる．しかし，2 次代数幾何的ポテンシャルについては，挙げた 3 つのポテンシャル以外の存在は，はっきりしていない．

第 4 章では，n 次定常 KdV 方程式を解く方法として，n 次定常 KdV 方程式の包合的な第一積分を構成する方法を考察している．n 次定常 KdV 方程式の包合的な第一積分 $I_j(u)$ は，公式

$$I_j(u)=\begin{cases} 8M_0(u), \quad j=n \\ \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u)\frac{d}{dx}M_0(u)dx, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{cases} \tag{7.2}$$

によって，初等代数のみを使った手法で求めることが可能であることを言及している．この研究内容は，著者 [16]，[17] にて発表している．

第 5 章では，n 次定常 KdV 方程式の第一積分の公式 (7.2) から，楕円関数における $\wp$ 関数で定義された Weierstrass の標準形に相当する式を構成している．このとき，具体例として 1 次定常 KdV 方程式の第一積分

$$\begin{aligned} I_0(u)&=u^3-4c_1u^2+4c_1^2u-\frac{1}{2}u''u+\frac{1}{4}u'^2+c_1u''+k_0 \\ I_1(u)&=3u^2-4c_1u-u''+k_1 \\ &\qquad (k_0,\ k_1：定数) \end{aligned} \tag{7.3}$$

より，微分方程式型 Weierstrass の標準形

$$u'^2=2u^3-2K_2u-4K_3, \quad (非退化条件 ： K_2^3-27K_3^2\neq 0) \tag{7.4}$$

を構成している．このとき，K_2，K_3 は定数である．これは，多くの研究において，楕円関数によるソリトン方程式の解析が行われていることに対する逆転の発

想で，ソリトン方程式による楕円関数の解析を行う試みの第一歩であると位置づけている．

また，1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\right)f(x)=\lambda f(x) \tag{7.5}$$

において変数変換 $\xi=u(x)$ を考えると，式 (7.3)，(7.4) を利用すると，Fuchs 型の微分方程式

$$\phi_{\xi\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-e_1}+\frac{1}{\xi-e_2}+\frac{1}{\xi-e_3}\right)\phi_{\xi}-\frac{\xi-\lambda}{2(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}\phi=0, \quad \phi(\xi)=f(x)$$

に変換できる．このとき，$e_1\neq e_2\neq e_3$ である．ここでは，この方程式の 3 つの有限な確定特異点 e_1，e_2，e_3 における局所モノドロミーの考察を行っている．結果，1 次元 Schrödinger 方程式 (7.5) における $f(x)$ が周期的であること，さらに $u(x)$ が 2 重周期関数（＝楕円関数）であることを楕円関数論を用いない新たな方法によって証明をしている．この証明は，高次定常 KdV 方程式についても応用が可能で，超楕円関数の解析への足ががりとなり得て，2 次代数幾何的ポテンシャルを解析する方法にも繋がってくると考えられる．この研究内容は，著者 [18]，[19] にて発表している．

第 6 章では，mKdV(-) 方程式の線形化作用素である 1 次元 Dirac 作用素を

$$P(v)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{d}{dx}+v(x)\\ -\dfrac{d}{dx}+v(x) & 0\end{pmatrix}$$

で定義し，1 次元 Dirac 作用素の多成分準可換微分作用素の構成，及び，交換子から得られる微分多項式

$$K_n(v)=\frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u)-Z_{n+1}(u^*)\Big) \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{7.6}$$

の導出方法の証明，考察を行っている．ここで，1 次元 Schrödinger 方程式 (7.5) において，非自明解 $f(x)$ に対して

$$v(x)=\frac{d}{dx}\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

と置いて 1 階作用素 $A^{(\pm)}$ を $A^{(\pm)}=\pm(d/dx)+v(x)$ で定義すると，Miura 変換

$$u(x)=v'(x)+v(x)^2$$

が成立し，$H(u)=A^{(+)}A^{(-)}$ であることから，Darboux 変換

$$u^*(x)=u(x)-2v'(x)=-v'(x)+v(x)^2$$

が得られる．

この構成された等式 (7.6) は，Darboux 変換の高階化を示す関係式となっており，高次 KdV 方程式系と高次 mKdV(-) 方程式系の解の構造の繋がりを明示している．また，Darboux 変換は，ポテンシャルの次数を一つ持ち上げることがあるので，2 次代数幾何的ポテンシャルの解析に利用できると考えられる．この研究内容は，著者 [20]，[21] にて発表している．

このように，n 次定常 KdV 方程式と代数幾何的ポテンシャルを根底に研究がつながっている．代数幾何的ポテンシャルの解析には，研究の広がりを感じられるが，代数幾何的ポテンシャルそのものを解析することは，困難である．そこで，代数幾何的ポテンシャルとして，判明している 3 つのポテンシャルから，拡張していくことを考えていく．それは，超楕円関数へのアプローチであるが，現段階では，古典代数解析手法としての道具が足りていない．そこで，まずは，楕円関数に対して，微分方程式を用いた古典代数解析を行い，楕円関数論の再構築を目論んでいる．

このことは，工学や医学など他分野への応用を考えることができる．それは，非線形現象にあらわれる楕円関数において微分方程式による理論ができたならば，従来，非線形現象を線形近似によって扱ってきた現象を非線形現象のまま扱うことが可能になるからである．

参考文献

[1] 大宮眞弓：非線形波動の古典解析　－ソリトン，それに続く非線形の世界－，森北出版，2008.

[2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal : Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett. 15, pp.240-243, 1965.

[3] D. J. Korteweg and G. de Vries : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. (5) 39, pp.422-443, 1895.

[4] R. M. Miura : Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys. 9(8), pp.1202-1204, 1968.

[5] 松島正知：1 次元 Dirac 作用素の準可換微分作用素と Darboux 変換，同志社大学大学院 工学研究科 数理環境科学専攻 修士論文，2012.

[6] T. Kato : On the existence of solutions of the helium wave equation, Trans. Amer. Math. Soc. 70, pp.212-218, 1951.

[7] I. Kay and H. E. Moses : Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials, J. Appl. Phys., 27, pp.1503-1508, 1956.

[8] P. D. Lax : Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math. 21, 467-490, 1968.

[9] Burchnall, T. W. Chaundy : Commutative ordinary differential operator, Proc. London Math. Soc. Ser. (2), Vol.21, pp.420-440, 1923.

[10] 田中俊一, 伊達悦朗：KdV 方程式 －非線形数理物理学入門－, 紀伊国屋書店, 1979.

[11] M. Ohmiya : Spectrum of Darboux transformation of differential operator, Osaka J. Math., Vol.36, pp.949-980, 1999.

[12] M. Ohmiya : KdV polynomials and Λ-operator, Osaka J. Math., Vo.32, pp.409-430, 1995.

[13] L. A. Dickey : Soliton equation and Hamiltonian systems, World Scientific, 1991.

[14] M.Ohmiya : Trace formulae and completely integrable Hamiltonians. Differential equations and mathematical physics AMS/IP Studies in Advanced Math., Vol.16, pp.307-321, 2000.

[15] M. Ohmiya and Y. P. Mishev : Darboux transformation and Λ -operator, J. Math. Tokushima Univ. Vol.27 pp.1-15, 1993.

[16] M. Matsushima and M. Ohmiya : An algebraic construction of the first integrals of the stationary KdV hierarchy, AIP conference Proceeding 1168, Vol.1, pp.168-172, 2009.

[17] 松島正知, 大宮眞弓：跡公式と定常 KdV 階層の完全積分可能性，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.21 ME-S7(5) pp.29-34, 2010.

[18] 松島正知, 岡本沙紀, 大宮眞弓：楕円・超楕円関数に対するソリトン理論的アプローチ，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.25 AO-S2 pp.101-106, 2014.

[19] M. Matsushima and M. Ohmiya : The n-th stationary KdV equation and the monodromy, AIP conference Proceeding, (2014 年度内 刊行予定).

[20] 松島正知, 大宮眞弓：Darboux 変換の一般化と準可換微分作用素，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.23 AO-S7 pp.102-108, 2012.

[21] M. Matsushima and M. Ohmiya : Semi-Commutative Differential Operators Associated with the Dirac Operator and Darboux Transformation, Advances in Pure Mathematics, Vol.3, pp.209-213, 2013.

謝辞

本研究を遂行し，本博士論文を纏めるにあたり，多くのご指導・ご支援をしていただいた指導教員の大宮眞弓先生に深謝いたします．また，論文をご精読いただき，副査を務めていただいた同志社大学生命医科学部の伊藤利明先生，関西大学総合情報学部の伊達悦郎先生に感謝いたします．

7 年間という長い期間，過ごさせていただいた非線形応用数理研究室，ならびに，その中で出会った多くの仲間たちから頂いた刺激に感謝いたします．最後に，長い期間，支えていただいた家族に深謝いたします．