博士学位論文審査要旨

２０１５年2月１３日

論 文 題 目：　可積分系と楕円・超楕円関数に対する古典代数解析的研究
学位申請者：　松島　正知
審 査 委 員：
　主　査：　同志社大学大学院生命医科学研究科　教授　大宮　眞弓
　副　査：　関西大学大学院総合情報学研究科　教授　伊達　悦朗
　副　査：　同志社大学大学院生命医科学研究科　教授　伊藤　利明

要　　旨：　生命現象のような非線形現象を精密に記述しようとすると，楕円関数に関する詳細な結果が必要となる．楕円関数は 19 世紀数学の華として長い歴史を有するが，工学や生命現象を記述する関数としてはかなり使いにくいものであった．本申請者は，楕円関数あるいは超楕円関数を研究するために，可積分系の理論を応用する方法を提唱し，多くの結果を得ている．

第１章では，１次元シュレディンガー作用素の準可換微分作用素を用いて高次の KdV 多項式と呼ばれる一連の微分多項式が構成されている．これらの微分多項式は，ラムダ作用素と呼ばれる形式的擬微分作用素で記述される階層構造を持つことが極めて明快に整理されている．

第２章では，KdV 多項式全体の作る複素数体上のヴェクトル空間が有限次元に退化する場合に，代数幾何的ポテンシャルの概念を導入し，それを特徴付ける微分方程式として高次定常 KdV 方程式が定義されている．

第３章では，M 関数の概念を導入し，高次定常 KdV 方程式の解をポテンシャルにもつ１次元シュレディンガー方程式に関する固有値問題を厳密に解く代数的方法が解説されている．

第４章では，スペクトル型 M 関数を定義し高次定常 KdV 方程式の包合的な第一積分を代数的に構成する方法が解説されている．

第５章では，前章で構成した第一積分を用いて，高次定常 KdV 方程式から具体的に高次導関数を消去して変数分離系に帰着させるスキームを，実際に１次定常 KdV 方程式に対して実行し，楕円関数のワイヤーストラス標準形に相当する等式が導出されている．この関係式をもとに，対応する１次元シュレディンガー方程式をリーマン球上の確定特異点型常微分方程式に変換する方法が展開されている．その方程式の局所モノドロミーを考察することにより，高次定常 KdV 方程式の解の周期性が示されている．これは従来の方法と異なり，楕円関数論を一切用いることなしに周期性を考察する新たな方法と言える．

第６章では，ディラック作用素に対する準可換微分作用素を考察することにより，KdV 多項式と変形 KdV 多項式の間に成立する著しい代数的関係式が導かれている．

よって，本論文は，博士（工学）（同志社大学）の学位を授与するにふさわしいものであると認められる．

総合試験結果の要旨

２０１５年2月１３日

論 文 題 目：　可積分系と楕円・超楕円関数に対する古典代数解析的研究
学位申請者：　松島　正知
審 査 委 員：
　主　査：　同志社大学大学院生命医科学研究科　教授　大宮　眞弓
　副　査：　関西大学大学院総合情報学研究科　教授　伊達　悦朗
　副　査：　同志社大学大学大学院生命医科学研究科　教授　伊藤　利明

要　　　旨：申請者に対する総合試験として 2015 年 1 月 13 日（火）13 時 30 分より約 1 時間半にわたって，口頭による約 1 時間の発表と，30 分間の質疑応答が行われた.

申請者は，これに対して，高次定常 KdV 方程式を代表とする可積分系を，申請者を中心としてここ 5 年間に開発された代数解析的に解析する手法を詳細に解説した．この手法は，現代の可積分系や可解モデルの研究が表現論的になっているのに対して，あえて言うならば古典解析的なもので，現代においては，極めて特徴的かつ個性的なものと言える．特に，代数的に構成された第一積分を具体的に用いて変数分離系に変換するとともに，解をポテンシャルに持つ 1 次元シュレディンガー方程式に対する固有値問題をリーマン球面上の確定特異点型の方程式に変換し，その局所モノドロミーを考察することにより，高次定常 KdV 方程式の解の周期性を考察する手法は，極めて独創的なものと言える．これらの発表に対し主査，副査から細かい技術的な面を含めた質問がなされたが，申請者は極めて的確に答えていた.

英語に関する語学試験結果からは，専門分野で研究を遂行していくのに十分な語学力を有するものと判断された.

よって，総合試験の結果は合格であると認める.

博 士 学 位 論 文 要 旨

論 文 題 目 ：可積分系と楕円・超楕円関数に対する古典代数解析的研究
氏　　　名：松島　正知

要　　　旨：

微分作用素 A, B に対して，交換子 $[A, B] = AB - BA$ が 0 階の微分作用素になるとき，作用素 A, B は準可換と言われる．

KdV 方程式の線形化作用素である微分可能なポテンシャル $u = u(x)$ を有する 1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u \tag{1}$$

の準可換微分作用素は，$2n+1$ 階の奇数階微分作用素になるが，それを A_n とすると交換子 $[H(u), A_n]$ は，$u(x)$ の微分多項式 $Z_n(u)$ になることが知られている．微分多項式とは，関数 u とその導関数 u'，さらに高階導関数 $u^{(k)}$ のみで構成される定数係数多項式のことを言う．

本論文では，この微分多項式 $Z_n(u)$ より構成された n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0, \quad (c_j,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ :\text{定数}) \tag{2}$$

と呼ばれる非線形常微分方程式に対して古典代数解析的手法を用いた研究を行っている．ここに，微分多項式 $Z_n(u)$ は，$Z_{n+1}(u) = \Lambda(u)Z_n(u)$, $Z_0(u) = 1$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ で定義される．また，漸化作用素

$$\Lambda(u) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}u' + u\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\right)$$

は，Λ 作用素と呼ばれる形式的擬微分作用素の一種であり，$(d/dx)^{-1}$ は，形式的な積分を表している．

ここでいう古典代数解析的手法とは，関数解析を用いずに，代数解析的に厳密に計算する方法のことである．

第 2 章では，1 次元 Schrödinger 作用素 (1) の準可換微分作用素 A_n の構成，及び，交換子 $[H(u), A_n]$ から得られる微分多項式 $Z_n(u)$ の構成を行っている．また，交換子 $[H(u), A_n]$ が可換になる条件から，n 次定常 KdV 方程式の構成も行っている．また，そのときのポテンシャル $u(x)$ を特徴づけるため，新たな概念を導入している．それは，$V(u)$ を 1 次元複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}Z_j(u) = \{cZ_j(u) \mid c \in \boldsymbol{C}\}$ の直和空間

$$V(u) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{C}Z_j(u)$$

とするとき，特殊なポテンシャル $u(x)$ に対して，有限次元に退化することがあり，$V(u)$ が $n+1$ 次元のとき，$u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルとする概念である．この概念の導入により，ベクト

ル空間 $V(u)$ を完全に特徴づける重要な関係式

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(u) \tag{3}$$

が成立することを言及している.

第 3 章では，関係式 (3) より，M 関数

$$M_k(u) = \begin{cases} Z_{n-k+1}(u) - \displaystyle\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(u), & k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ Z_0(u) = 1, & k = n+1 \end{cases} \tag{4}$$

を定義する．M 関数は，微分多項式 $Z_n(u)$ に成り立つ展開公式から拡張が可能であり，拡張された関数をポテンシャル $u(x)$ に対するスペクトル型 M 関数 $M(x,\lambda)$ という．このとき，ポテンシャル $u(x)$ は n 次代数幾何的ポテンシャルである．このスペクトル型 M 関数は，3 階線形常微分方程式である Appell-Lindemann 方程式

$$\frac{d}{dx}\Lambda(u-\lambda)M(x,\lambda) = -\frac{1}{4}M'''(x,\lambda) + (u(x)-\lambda)M'(x,\lambda) + \frac{1}{2}u'(x)M(x,\lambda) = 0 \tag{5}$$

の解になっている．Appell-Lindemann 方程式 (5) は，1 次元 Schrödinger 作用素 (1) に対する固有値問題

$$(H(u)-\lambda)f(x,\lambda) = 0$$

の解 $f_1(x,\lambda)$，$f_2(x,\lambda)$ による 2 次形式で表される．そのことから，スペクトル型 M 関数より 1 次元 Schrödinger 作用素 (1) の固有値 λ_0 に対する固有関数を

$$f(x) = \sqrt{M(x,\lambda_0)}$$

によって，具体的に構成できることを言及している.

第 4 章では，M 関数 (4) の一般化を定義し，n 次定常 KdV 方程式 (2) の第一積分 $I_j(u)$ を，公式

$$I_j(u) = \begin{cases} 8M_0(u), & j = n \\ 8\displaystyle\int M_{j+1}(u)\frac{d}{dx}M_0(u)dx, & j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{cases} \tag{6}$$

によって，完全な初等代数による手法で，包合的に求めることができることを示している.

第 5 章では，n 次定常 KdV 方程式の第一積分の公式 (6) から，楕円関数における $\wp$ 関数で定義された Weierstrass の標準形に相当する式を構成している．このとき，具体例として 1 次定常 KdV 方程式の第一積分

$$\begin{aligned} I_0(u) &= u^3 - 4c_1u^2 + 4c_1^2u - \frac{1}{2}u''u + \frac{1}{4}u'^2 + c_1u'' + k_0 \\ I_1(u) &= 3u^2 - 4c_1u - u'' + k_1 \\ &\quad (k_0,\ k_1 : \text{定数}) \end{aligned} \tag{7}$$

より，微分方程式型 Weierstrass の標準形

$$u'^2 = 2u^3 - 2K_2u - 4K_3, \quad (\text{非退化条件} \ : \ K_2^3 - 27K_3^2 \neq 0) \tag{8}$$

を構成している．このとき，K_2，K_3 は定数である．これは，多くの研究において，楕円関数によるソリトン方程式の解析が行われていることに対する逆転の発想で，ソリトン方程式による楕円関数の解析を行う試みの第一歩であると位置づけている．

また，1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)f(x) = \lambda f(x) \tag{9}$$

において変数変換 $\xi = u(x)$ を考えると，式 (7), (8) を利用すると，Fuchs 型の微分方程式

$$\phi_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right)\phi_\xi - \frac{\xi - \lambda}{2(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}\phi = 0, \quad \phi(\xi) = f(x)$$

に変換できる．このとき，$e_1 \neq e_2 \neq e_3$ である．ここでは，この方程式の 3 つの有限な確定特異点 e_1，e_2，e_3 における局所モノドロミーの考察を行っている．結果，1 次元 Schrödinger 方程式 (9) における $f(x)$ が周期的であること，さらに $u(x)$ が 2 重周期関数（＝楕円関数）であることを楕円関数論を用いない新たな方法によって証明をしている．この証明は，高次定常 KdV 方程式についても応用が可能で，超楕円関数の解析への足がかりとなり得る．

第 6 章では，mKdV(-) 方程式の線形化作用素である 1 次元 Dirac 作用素を

$$P(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} + v(x) \\ -\dfrac{d}{dx} + v(x) & 0 \end{pmatrix}$$

で定義し，1 次元 Dirac 作用素の多成分準可換微分作用素の構成，及び，交換子から得られる微分多項式

$$K_n(v) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n+1}(u) - Z_{n+1}(u^*)\Big) \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{10}$$

の導出方法の証明，考察を行っている．ここで，1 次元 Schrödinger 方程式 (9) において，非自明解 $f(x)$ に対して

$$v(x) = \frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と置いて 1 階作用素 $A^{(\pm)}$ を $A^{(\pm)} = \pm(d/dx) + v(x)$ で定義すると，Miura 変換

$$u(x) = v'(x) + v(x)^2$$

が成立し，$H(u) = A^{(+)}A^{(-)}$ であることから，Darboux 変換

$$u^*(x) = u(x) - 2v'(x) = -v'(x) + v(x)^2$$

が得られる．

この構成された等式 (10) は，Darboux 変換の高階化を示す関係式となっており，高次 KdV 方程式系と高次 mKdV(-) 方程式系の解の構造の繋がりを明示している．