

【研究ノート】

資産選択問題における異常値への対応： L_∞ ノルムの応用*

牧 大 樹

1 はじめに

現在、金融取引の複雑化や経済のグローバル化による資産市場の不安定性に伴い、資産運用におけるリスク管理はより一層重要になってきている。資産運用におけるリスク管理として代表的なのは、Markowitz (1952) の資産選択問題である。そこでは、それまで不明確だった投資リスクの尺度を収益率の分散と捉えたことにおいて画期的であり、これまでのファイナンス理論で重要な役割を果たしている。

分散は、距離の一般概念であるノルムで表すと L_2 ノルム (ユークリッドノルム) となる。なぜなら、分散は、収益率の平均値と各期間における収益率の差の 2 乗が平均的にどの程度あるかを示すからである。ポートフォリオモデルは、平均分散モデルの他にも、Sharp (1963) での単一指標モデル (Single Index Model, L_2 ノルム) や Yamazaki and Konno (1991) の平均偏差モデル (L_1 ノルム, 絶対値の距離), Harlow (1991) の下方部分積率モデル (L_1, L_2 ノルム), Young (1998) の Minimax モデル (L_∞ ノルム, ある 1 期間の絶対値の距離) 等がある。このように、ポートフォリオのリスクを表すには、ノルムがより一般的な基準となる。

通常用いられる L_1, L_2 ノルムの代表的なモデルにおけるリスク管理の手法は、

*本稿は、2002 年度日本ファイナンス学会において報告した内容をもとにしている。討論者の大阪大学の辻村元男先生、同志社大学の清川義友教授、北坂真一教授に有益なコメントをいただいたことをここに記して感謝する。

将来の収益率が過去の分布や正規分布，およびシミュレーションなどから発生させた分布に近似的に等しくなるとして，将来においても安定的な関係を求めようとしている．そこには，実際の証券市場では何らかの異常値が発生することはやむを得ないが，ある程度これらの異常値を容認した上で，平均的な収益率の発生過程を推計すれば，将来の資産運用に何らかの参考になるような情報を導くことができるかもしれないという考え方が背景にある．

しかし，資産運用を行っている投資家やファンドマネージャーにとって，異常事態が発生したときに壊滅的な状況が起こりやすい．異常事態の例として，現実の市場では，ブラックマンデーやわが国バブルの崩壊，アジア通貨危機があげられる．そのような状況は，膨大な損失を被るため，ファンドマネージャーにとって最も避けたい状況となる．

そこで本稿では，このような異常値事態が生じたときの損失を最小化するためのモデルを示し，その有効性を検証する．代表的な平均分散アプローチでは，収益率が中心極限定理に従い，標本数が多くなることで正規分布に近くなることを利用している．しかし，これまでの研究から収益率の分布は，裾の厚い分布が観察されることが多い．そのため，Engle (1982) の ARCH や Bollerslev (1986) の GARCH 等のモデルを用い，確率分布の端，つまり異常値を分析することがより重要になってきている．

このように，近年確率分布の端や異常値を分析する重要性が高まっており，本稿では，資産選択問題における異常値への対応を距離の一般概念であるノルムの観点から分析する．投資家が異常値に対応するためのモデル化としては， L_∞ ノルムを利用するポートフォリオ最適化が当てはまる． L_∞ ノルムは，ある基準から最も離れている値を示す指標である． L_∞ ノルムを用いた分析の一つとして，Young (1998) の Minimax モデルでは，最小リターンを最大化するという分析を行っている．本稿は，平均分散モデルと下方部分積率モデルの枠組みにおける L_∞ ノルムの特徴と有効性について分析する．

以下，2，3章では， L_∞ ノルムでのポートフォリオモデルのフレームワークに

ついて説明する. 4, 5 章では, 実際のデータを用いてパラメータや推定期間等を変化させ, 各モデルの違いを検討し, 6 章でまとめを述べる.

2 ノルムとポートフォリオ最適化

Markowitz の平均分散モデルでは, 投資のリスクをポートフォリオ収益率の分散とした. つまり, 各資産の収益率を R_i , 投資比率を x_i とすると, ポートフォリオ収益率は,

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i, \quad (1)$$

であり, その分散,

$$\text{var}(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}, \quad (2)$$

がリスクとなる. σ_{ij} は R_i と R_j の分散, 共分散を示す.

分散 (標準偏差) は距離の一般概念であるノルムで表記すると, L_2 ノルム (2 乗の距離)

$$E \left[\sqrt{(\overline{R}_t - \bar{R})^2} \right] = \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T |R_t - \bar{R}|^2 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

$\bar{R} = E[R_p]$, R_t : t 期のポートフォリオ収益率,

となる. つまり, 収益率の平均値から各期間の収益率が平均的にどの程度離れているかがリスクとなる.

他方, 投資を行う上で, 収益率のばらつきよりも市場ショックなどによる影響をできるだけ小さくしたい状況が存在する. そのような状況では, 平均から最も離れている値を最小化することが望ましい. 絶対値の距離である L_1 ノルムや上記の L_2 ノルムを用いたモデルでは, 平均偏差や分散がリスクとなり, それを最小化するための投資比率を構成する. その中には, 平均から最も離れている値も入っているが, 全体としてどの程度離れているかに比重がおかれている. そのため, 平均から最も離れている値が強調される割合は小さくなる.

そこで、本章と次章では、 L_∞ ノルムを利用して平均や目標とする収益率から最も離れている1期間を強調するモデルを示す。 L_∞ ノルムを含めたポートフォリオモデルのリスクを次のように L_p ノルムから表現すると、ノルムの定義より、 $p \geq 1$ に対して、

$$\frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T |R_t - R^*|^\rho \right]^{1/\rho}, \quad (4)$$

となる。かつ、 $p = \infty$ のとき、つまり、 L_∞ ノルムのとき、

$$\max \left\{ \frac{1}{T} |R_t - R^*|, t=1, \dots, T \right\}, \quad (5)$$

R^* : 目標リターン

となる。(1)を(4)に代入し、 R^* をポートフォリオ収益率の期待値とすると、

$$E \left[\left| \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right|^\rho \right]^{1/\rho} = \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n R_{it} x_i - \sum_{i=1}^n \bar{R}_i x_i \right|^\rho \right]^{1/\rho},$$

であり、平均分散モデルでは、 $p=2$ 、平均偏差モデルでは、 $p=1$ となる¹⁾。

(5)における最小化問題は、Gonin and Money (1989)から次のようになる。

$$\min_x \quad \frac{1}{T} d_\infty \quad (6)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \bar{R}_i x_i - d_\infty \leq \sum_{i=1}^n R_{it} x_i \leq \sum_{i=1}^n \bar{R}_i x_i + d_\infty, t=1, \dots, T, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{R}_i x_i = \rho W, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = W, \quad (9)$$

$$u \geq x_i \geq l, \quad i=1, \dots, N, \quad (10)$$

1) Yamazaki and Konno (1991)に示されているように、各資産収益率が正規分布にしたがっていれば、ポートフォリオの分散を最小化することと平均偏差を最小化することは等しくなる。

$$d_{\infty} \geq 0. \tag{11}$$

ただし, $d_{\infty} = \max \left\{ \left[\sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right], t=1, \dots, T \right\}$

ρ : 期待収益率, W : 初期保有額, u : 投資上限, l : 投資下限.

(6) ~ (11) のように L_{∞} ノルムを用いると, ポートフォリオ最適化は, Minimax 問題に帰着する. もし, サンプル期間の収益率に対して正規分布を前提としていれば, その対称性から, 平均以下の最小値を最大化することと平均以上の最大値を最小化することは, 等しい投資比率を構成する. しかし, 実際の収益率が正規分布をしていないことは, これまでしばしば検証されてきている. つまり, このモデルでは, 過去 T 期間やシミュレーション等で発生させたポートフォリオ収益率で, その平均値から最も離れた値をリスクと認識する.

3 L_{∞} ノルムにおける下方部分積率モデル

前章では, ポートフォリオのリスクをポートフォリオ収益率の平均からの乖離としたが, 投資家の意思決定をモデル化する場合に, 投資へのリスクを分散などの平均からの乖離として記述できるとは限らない. むしろ, ある目標値からの乖離をリスクとすることが多い. 一定の利回りを確保することを目的とする機関投資家やファンドマネージャーにとっては, 特にこの傾向が当てはまる. そこで, ポートフォリオ収益率の目標値を設定して, それ以下になることをリスクとするモデルが必要となる. Telser (1965) では, 安全第一基準 (Safety First Rule) を導入して, ポートフォリオ収益率 R_p が確率密度関数 $f(R_p)$ にしたがつているとき, 次のようにある目標収益率 θ 以下になる確率を投資におけるリスクと定義した.

$$\Pr(R_p < \theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(R_p) dR. \tag{12}$$

Hogan and Warren (1972) 等では, この下方リスクの考え方に積率を加えた値をリスクとして定義している. つまり, 投資家はリスクとして k 次の下方部分

積率 (Lower Partial Moment),

$$LPM_k(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - R_p)^k f(R_p) dR, \quad (13)$$

を最小化する. θ をポートフォリオ収益率の期待値, 次数 k を 2 として積分区間を $-\infty$ から ∞ に変えれば分散と一致し, 平均分散モデルと等しくなる. Harlow (1991), 竹原 (1997) に示されているように, これを離散型で書き直すと以下のように表現できる.

$$d(x) = \sum_{R_p < \theta} P_p(\theta - R_p)^k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \max\{\theta - R_p, 0\} \right|^k. \quad (14)$$

P_p : ポートフォリオ収益率の確率

変数, $d_i^+ = (\theta < R_p, 0)$, $d_i^- = (\theta > R_p, 0)$,

を導入すると, 数理計画問題は次のようになる²⁾.

$$\min_x \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (d_i^-)^k \quad (15)$$

$$\text{subject to} \quad \theta - \sum_{i=1}^n R_{it} x_i + d_i^+ - d_i^- = 0, \quad t=1, \dots, T, \quad (16)$$

$$(8), (9), (10),$$

$$d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, \quad (17)$$

このように, 下方部分積率モデルでは, 投資家は下方リスクとして, ある目標収益率以下の積率をリスクと捉える. しかし, 投資家にとって, ある目標収益率を小さく下回る場合と大きく下回る場合では, その捉え方が全く異なる. 投資家が目標より大きく下回る値を小さく下回る値より嫌うのは当然である. $k=1$ では不足額の期待値, つまり, ある T 期間で下方リスクが平均的にどの程度あるかをリスクとして取り, それを最小化する. $k=2$ では, 下方リスクがどの程度ばらつきがあるかを示し, それを最小化する. 他方, 目標収益率以下の

2) ある t 期で $\theta < R_p$ であれば, $d_i^+ = d_i^+$, $d_i^- = 0$ となる.

ポートフォリオ収益率が最も小さくなることを避けることに重点を置く投資家も存在する。投資家がどの期間でも最も避けたいのは、最も利益が小さくなるときである。利益が最も小さくなる、つまり、異常事態が発生したときには、壊滅的な状況が起こりやすい。そのため、投資家や運用者にとっては、そのような状況下における損失の最小化が必要となる。このような問題に対しては、 L_∞ ノルムを利用することで、目標値からの最大の損失を最も小さくすることができる。

T 期間のポートフォリオ収益率で目標収益率 θ から下方に最も離れている収益率を

$$d_\infty^* = \max \left\{ \max \left(\theta - \sum_{i=1}^n R_{it} x_i, 0 \right), t=1, \dots, T \right\}, \quad (18)$$

として、次のような数理計画問題が考えられる。

$$\min_x \quad \frac{1}{T} d_\infty^* \quad (19)$$

$$\text{subject to} \quad \theta - \sum_{i=1}^n R_{it} x_i \leq d_\infty^*, \quad t=1, \dots, T, \quad (20)$$

$$(8), (9), (10),$$

$$d_\infty^* \geq 0. \quad (21)$$

この問題は、T 期間のポートフォリオ収益率の中で、最も目標収益率から下方に離れている 1 期間を強調している。また、 $k=1, 2$ では、 $2T$ だけあるパラメータ d_t も d_∞^* の 1 つにすることができる³⁾。k は危険回避度のパラメータであり、上昇とともにペナルティが増加するため、 ∞ の場合は、最大の損失を回避する状況を想定している⁴⁾。

この特徴を簡単に見るために、**第 1 表** に将来における 3 つのポートフォリオ

3) Perold (1984) では、標本数が大きい場合の 2 次計画問題における効率的な解法を議論している。

4) 批々木 (1999, 2001) では、パラメータ k を取るモデルの代替的なモデルとしてオープン L 偏差モデルを提示している。

第1表 ポートフォリオ収益率

生起確率	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Port. A	0.2	0.2	0.6	1.1	1.5
Port. B	0	0.5	0.6	0.8	1.3
Port. C	-0.1	0.4	0.9	1	1.2

収益率が与えられているとする。目標収益率を0.1とすると、(13)、(18)より、 LPM_1 、 LPM_∞ の両リスク尺度で、下方リスクがない Port. A が選好される。目標収益率を0.5にすると、 LPM_1 ではB、 LPM_∞ はAを選好する。また、目標収益率を1にすると、 LPM_1 ではC、 LPM_∞ ではAを選好することになる。このように、 LPM_1 では、目標収益率以下の不足の期待値が最も小さいポートフォリオが選ばれ、 LPM_∞ では目標収益率以下の最小収益率が最も大きいポートフォリオが選ばれる。そのため、 LPM_∞ は目標収益率の上昇に対する選好は変わらなくなる。

4 シミュレーション

本章では、 L_∞ ノルムを利用したポートフォリオモデルをシミュレーションし、他のモデルと比較する。使用データはダウ30銘柄収益率であり、過去3年（月次収益36ヶ月）でポートフォリオを構築し、そのポートフォリオを1年間保有して1年ごとに再構築する。例えば、2000年に投資を行うとき、1997年から1999年の月次収益36ヶ月のもとで最適化されたポートフォリオを1年間持つことになる。検証期間は1997年から2001年とする。また、 P_i を*i*資産の資産価格として、各資産の収益率は $R_i=(P_i-P_{i-1})/P_{i-1}$ とする。

第2表は、MVモデルと L_∞ ノルムモデル（Maximum Normモデル、以下MNモデル）との期待収益率の変化による実現収益率の基本統計量の比較である。MNモデルは、(6)～(11)を解いたもので、 $W=1$ 、 $u=1$ 、 $l=0$ とする。MVモデルは、(2)、(8)～(10)を計算している。結果から、MVモデルは、平均実現収益率が期待収益率の変化に関わらず、全てMNモデルを上回っている。逆に、

MN モデルは、MV モデルよりも標準偏差が全て小さくなっている。また、両モデルとも期待収益率を高く設定すると、その実現収益率の平均値が小さくなっている。これは、株式収益率の平均回帰的な性質のためであると考えられる。

次に第 3, 4 表では、下方部分積率モデルでのパラメータ次数 k を 1, 2, ∞ に変化させたときの実現収益率の基本統計量を表している。 LPM_1 , LPM_2 は (15) ~ (17), (8) ~ (10) で (15) の k を変化させ、 LPM_∞ は (19) ~ (21), (8) ~ (10) を解いている。推定期間は 36 ヶ月としている。

まず、全てのモデルで MV モデルや MN モデルと同じように、期待収益率の上昇に伴う実現収益率の悪化が起きており、期待収益率の上昇割合とほぼ同等に、実現収益率の平均値の悪化が見られる。さらに、前章で LPM_∞ が、 LPM_1 , LPM_2 より最小値が大きくなると予想されたとしたが、そのような結果には必ずしもなっていない。その理由は、推定期間とポートフォリオ保有期間において、各資産の収益率分布が異なるためである。

また、各モデルにおいて、目標収益率 θ の変化による実現収益率の変化も見られる。目標収益率を高く設定すると、その後の実現収益率が悪化する傾向が LPM_1 , LPM_2 において現れている。これは、期待収益率の場合と同様に、株式収益率の平均回帰性のためであると推測される。他方、 LPM_∞ だけは、他の 2 モデルと異なった動きをしている。 LPM_∞ では、目標収益率の上昇により、その実現収益率も上がる傾向が高い。 $\theta = 0$ では、 LPM_1 , LPM_2 よりも実現収益率は小さいが、 $\theta = 1, 2$ の場合には、 LPM_∞ が全て上回っている。これは、

第 2 表 MVモデルとMNモデルの比較

Ave.: 平均 S.D.: 標準偏差 max: 最大値 min: 最小値

ρ (%)	Mean Variance				Maximum Norm			
	Ave.	S.D.	Max	min	Ave.	S.D.	max	min
0	2.87	7.30	18.98	-10.79	2.62	7.07	18.95	-10.37
0.5	2.19	6.44	17.35	-14.28	1.75	6.20	17.50	-14.50
1	1.64	6.31	22.74	-16.02	1.50	6.11	21.95	-15.85

第3表 $\rho=0\%$ における各LPMモデルの比較

T.S.D $:\sqrt{LPM_2(\theta)}$ LPMinf= LPM_∞					
LPM1 $\rho=0(\%)$					
	Ave.	S.D.	T.S.D.	max	min
$\theta=0(\%)$	2.42	6.73	2.98	18.99	-11.77
1	2.43	6.41	3.17	18.10	-10.45
2	2.43	6.15	3.40	17.22	-9.80
LPM2 $\rho=0(\%)$					
$\theta=0(\%)$	2.80	7.11	3.18	19.02	-14.81
1	2.25	6.32	3.30	16.76	-13.48
2	2.32	6.34	3.64	14.57	-13.78
LPMinf $\rho=0(\%)$					
$\theta=0(\%)$	2.26	6.72	3.18	19.01	-14.70
1	2.84	7.31	3.63	18.99	-14.70
2	2.92	7.59	4.09	19.18	-14.70

第4表 $\rho=0.5\%$ における各LPMモデルの比較

LPM1 $\rho=0.5(\%)$					
	Ave.	S.D.	T.S.D.	max	min
$\theta=0(\%)$	2.02	6.39	2.96	17.53	-14.67
1	1.94	6.03	3.15	17.88	-13.72
2	1.78	5.74	3.42	17.03	-13.51
LPM2 $\rho=0.5(\%)$					
$\theta=0(\%)$	2.22	6.55	3.08	17.54	-15.89
1	1.82	6.35	3.42	17.15	-15.60
2	1.15	6.98	4.47	14.06	-15.27
LPMinf $\rho=0.5(\%)$					
$\theta=0(\%)$	1.70	6.50	3.27	17.95	-15.84
1	2.17	6.63	3.50	17.95	-15.84
2	2.12	6.61	3.84	17.95	-15.84

第5表 目標収益率の変化による投資比率への影響

1997~2001年平均値 単位 (%) () 内は, 銘柄を示す.

Rank	LPM1		LPM2		LPM inf	
	$\theta=0$	$\theta=2$	$\theta=0$	$\theta=2$	$\theta=0$	$\theta=2$
1	17.2(V11)	14.1(V27)	17.5(V11)	19.9(V27)	17.7(V11)	19.0(V11)
2	15.8(V29)	12.1(V29)	16.0(V29)	12.7(V29)	16.4(V29)	16.4(V29)
3	13.8(V27)	12.0(V11)	13.8(V27)	7.8(V13)	13.9(V27)	13.6(V27)
4	8.8(V18)	7.3(V18)	10.4(V18)	7.1(V1)	9.2(V19)	9.7(V18)
5	6.8(V19)	6.2(V13)	3.6(V13)	5.3(V22)	5.1(V18)	4.1(V19)

LPM_{∞} が目標収益率を実現しやすい可能性を示唆している. LPM_1 , LPM_2 では θ を上げると実現収益率が小さくなる傾向にあり, 高い実現収益率を期待するには, 事前の目標収益率を下げなければならないという結果になる. また, LPM_{∞} では, 他のモデルと比較して, 最大値, 最小値が目標収益率の変化の影響をほとんど受けていない. これは, 1 期間を強調しているため, 投資比率の変化が小さいことによる.

このことを見るため, 各 LPM モデルについて $\rho = 0.5\%$ における, 目標収益率の上昇による投資比率の変化を第5表に示す. 表から LPM_{∞} は, あまり投資比率の構成に差が出ていないことが分かる. この理由は, 前章でも述べたように, LPM_{∞} モデルの特徴が挙げられる. 各 LPM モデルは, θ が上昇するとリスクも大きくなるが, LPM_{∞} では, θ が上昇しても選択されるポートフォリオは変わらないためである.

5 推定期間と最適ポートフォリオ

本章では, 推定期間の違いが各モデルの実現収益率の平均と標準偏差に与える影響について分析する. ヒストリカルデータを用いた場合のポートフォリオモデルの最適化は, 過去 T 期間でリスクを最小化する投資比率が, 将来のポートフォリオ保有期間にも当てはまることに代替している. そこでは, T 期間の

第6表 推定期間別の実現収益率の基本統計量

全てのモデルに関して ρ は 0.5%, θ は 1% とする. T.S.: $LPM_1(1\%)$

T	MV		MN		LPM1		LPMinf			
	Ave.	S.D.	Ave.	S.D.	Ave.	S.D.	T.S.	Ave.	S.D.	T.S.
12	1.499	5.013	1.363	5.131	1.339	4.874	1.737	1.022	6.172	2.295
24	1.960	5.674	1.751	5.338	1.817	5.241	1.635	1.648	5.687	1.898
36	2.190	6.442	1.746	6.200	1.937	6.025	1.865	2.170	6.634	2.018
48	2.543	7.621	2.624	7.301	2.462	7.182	1.995	2.351	7.379	2.155
60	1.527	7.488	1.446	7.670	1.397	7.327	2.571	1.528	7.551	2.626
72	0.759	8.185	0.781	7.677	0.691	7.995	3.220	0.892	7.952	3.081
84	2.838	7.923	2.326	8.125	2.601	7.637	2.172	2.903	8.164	2.227
120	1.265	9.234	1.387	8.973	1.139	8.838	3.390	1.407	9.108	3.339

ポートフォリオ収益率が将来も同じ分布になると仮定している。各資産の収益率に関しても、同様のことを想定している。

しかし、実際には、推定期間 T の取り方で投資比率が大きく変化する。その理由は、各資産のリスク、リターンの推定値が時系列的に安定していないためである。推定値が将来を近似的に予想できなければ、過去のリスクを最小化した投資比率は、意味を持たなくなってしまう。そのような状況では、分散や下方リスクを最小化したポートフォリオを将来のある一定期間保有すると、結果的にリスクが増大してしまう可能性がある。

第6表は、4章と同じように T 期の推定期間の下でその後1年間保有したポートフォリオに関して、1997年から2001年の平均と標準偏差を表している。表からもわかるように、推定期間を変えることにより、実現収益率が変化している。平均的な収益率の違いを見てみると、MVモデルとMNモデルの比較に関して、 T が小さいときはMVが高い。しかし、 T が大きくなるとMVモデルとMNモデルの優劣はつけがたくなる。また、 LPM_1 、 LPM_∞ においては、 LPM_∞ は T が大きくなると、 LPM_1 を上回る傾向が強い。しかし、実現収益率の平均下方リスクは、 LPM_1 が比較的 LPM_∞ よりも小さい。

各モデルで、 T が小さいときにポートフォリオ収益率の標準偏差が比較的小さいのは、事前のトレンドが引き続き事後にも当てはまりやすかったため、最適化された投資比率が的確にポートフォリオ保有期間のリスクを小さくできたからである。また、 T が大きくなるにつれて、標準偏差が高くなる傾向がある。これは、 T を大きく取れば事後のリスクを小さくできるとは限らないことを示す。例えば、ヒストリカルデータを用いてポートフォリオ最適化のための推定期間を $T=120$ としたとき、過去 1 年と過去 10 年が同質的に扱われ、事後 1 年間は、それらの内どれかが同じような確からしさと起こると仮定して最適化される。しかし、実際には直前のトレンドが直後にも反映されやすい。このため、過去 1 年を過去数年よりも強調した方が良いかもしれない。この問題における明確な議論は少ないが、これまでの慣例的な過去 3～5 年で直前の 1 年をより起こりやすいものとしてモデルを構築することが有効であると考えられる。

これらの結果から、例えば、事前に株価が上昇しており、事後にも同じようにその傾向が強いと予測できるならば、 T に関してあまり大きな値を取る必要はない。しかし、そのような状況でないときには、上昇と下降の循環を含んでいるような T をとったほうが有効である可能性が高い。もし、市場の上昇局面だけをとった T の下で最適化されたポートフォリオを 1 年持ち、事後 1 年間で下降局面であったならば、最適な投資比率自体まったく意味を持たなくなる。

6 ま と め

本稿では、資産選択問題における異常値に対応するため、 L_{∞} ノルムを利用したポートフォリオ最適化について、その特徴と従来のモデルとの比較検証を行った。 L_{∞} ノルムを利用することで、従来のモデルと比較してサンプル期間の目標から最も離れた値を強調した投資比率を構成することができる。シミュレーションの結果から、 L_{∞} ノルムを利用したモデルは、 L_1 、 L_2 ノルムを利用したモデルに比較して、推定期間を大きく取るほど実現収益率が高くなる傾向が観察された。また、 L_{∞} ノルムを用いた下方部分積率モデルでは、目標収益率の変化

に対する影響が、 L_1 、 L_2 ノルムを利用したモデルよりも小さいことが示された。

今回本稿では、ヒストリカルデータを用いて分析を行った。つまり、過去に起こった異常値が将来にも同様に起こるとして分析している。しかし、異常値の発生はきわめて例外的であり、過去のデータがそのまま当てはまるとは限らない。そのため、シミュレーションや資本資産価格モデルを用いて将来の分布の予測が必要となる。そのような分析を含めた最適ポートフォリオの構築は、今後の検討課題とする。

【参考文献】

- Bollerslev, T., (1986) "Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.
- Engle, R. F., (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimation of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1007.
- Gonin, R., and J. Money., (1989) *Nonlinear L_p -Norm Estimation*, John Wiley and Sons, New York.
- Harlow, W. V., (1991) "Asset Allocation in Downside-Risk Framework," *Financial Analysts Journal*, (September-October), pp. 28-40.
- Hogan, W. W., and J. M. Warren., (1974) "Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 5 pp. 1-11.
- Markowitz, H., (1952) "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 7, 77-91.
- Perold, A., (1984) "Large Scale Portfolio Optimizations," *Management Science*, Vol. 30, pp. 1143-1160.
- Sharpe, W., (1963) "A Simplified Model for Portfolio Analysis," *Management Science*, Vol. 9, pp. 277-293.
- Telsor, K., (1956-1957) "Safety First and Hedging," *Review of Economic Studies*, Vol. 23, pp. 1-16.
- Yamazaki, H., and H. Konno., (1991) "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market," *Management Science*, Vol. 37, pp. 519-531.
- Young, M. R., (1998) "A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution," *Management Science*, Vol. 44, pp. 673-683.
- 竹原 均, (1997) 『ポートフォリオの最適化』朝倉書店.
- 批々木規雄, (1999) 「下方リスクを考慮したポートフォリオ最適化モデル」『慶應経営論集』16, pp. 85-114.
- 批々木規雄, (2001) 『金融工学と最適化』朝倉書店.