

博士論文

乗用車用タイヤの
振動特性に関する研究

2013 年 11 月

松原 真己

目次

第 1 章 緒論	1
1.1 乗用車用タイヤと振動騒音問題	1
1.2 従来の研究と課題	3
1.3 本論文の目的及び構成	9
参考文献	11
第 2 章 タイヤ振動挙動の実験検証	13
2.1 緒言	13
2.2 非接地・非転動時の実験モード解析	13
2.2.1 実験モード解析	13
2.2.2 径方向モード	14
2.2.3 横並進モードと横曲げモード	16
2.3 横曲げモードに関するトレッド部の振動挙動分析	18
2.4 結言	23
参考文献	24
第 3 章 円筒シェル理論に基づくタイヤの力学モデル	25
3.1 緒言	25
3.2 タイヤの円筒シェル形状の力学モデル	25
3.3 力学的エネルギー	27
3.4 各振動モードにおける固有関数定義	27
3.4.1 横並進モードと面内振りモード	27
3.4.2 径方向モード	29
3.4.3 横曲げモード	29
3.5 Rayleigh の方法による固有振動数の導出	32
3.5.1 Rayleigh の方法	32
3.5.2 横並進モードと面内振りモード	32
3.5.3 径方向モード	33
3.5.4 横曲げモード	33
3.6 理論検証と考察	34
3.6.1 解析値と実験値の比較	34

3.6.2	タイヤ構造部材の固有振動数に対する寄与度分析	35
3.7	結言	39
	参考文献	40
第4章	回転効果に着目したタイヤ半径方向振動挙動解析	41
4.1	緒言	41
4.2	サイドウォール部表面振動計測試験	41
4.2.1	試験概要	41
4.2.2	非転動時における振動特性	43
4.2.3	転動時における振動特性	43
4.3	タイヤの力学モデル	46
4.3.1	薄肉円環モデル	46
4.3.2	運動エネルギーと第1変分	47
4.3.3	ポテンシャルエネルギーと第1変分	48
4.3.4	運動方程式	50
4.3.5	固有振動数と振動モード	51
4.4	理論検証と考察	53
4.4.1	非転動時の固有振動数	53
4.4.2	転動時の固有振動数	53
4.4.3	回転効果の影響	54
4.5	結言	58
	参考文献	59
第5章	接地拘束に着目したタイヤ半径方向振動挙動解析	61
5.1	緒言	61
5.2	実験モード解析	61
5.3	タイヤの力学モデル	65
5.3.1	薄肉円筒モデル	65
5.3.2	運動方程式	66
5.3.3	パラメータ同定	67
5.4	接地拘束時のタイヤ振動挙動解析	68
5.4.1	周方向波数に着目した固有関数定義による解析	68

5.4.2 レセプタンス法を用いた解析	70
5.5 レセプタンス法における採用モード数と予測精度	78
5.6 結言	82
参考文献	83
第 6 章 接地・転動時におけるタイヤ半径方向振動挙動解析	84
6.1 緒言	84
6.2 タイヤの力学モデル	84
6.2.1 薄肉円環モデル	84
6.2.2 運動方程式	85
6.2.3 定常応答	87
6.2.4 振動数方程式	89
6.3 接地・転動時におけるタイヤ振動挙動解析	90
6.3.1 パラメータ同定	90
6.3.2 接地・転動解析	91
6.3.3 転動速度の違いによる固有振動数の変化	99
6.3.4 転動速度の違いによるモード形状変化	105
6.4 結言	110
参考文献	112
第 7 章 結論	113
7.1 研究成果	113
7.2 今後の展望	116
謝辞	118

第1章 緒論

1.1 乗用車用タイヤと振動騒音問題

経済の発展に伴いモータリゼーションが急速に進展し、自動車による多大な便益を享受している。自動車の運動は、路面へ働きかける力と、路面からの反力によって成立している。その唯一のインターフェイスがタイヤである。タイヤは、車両の重量を支える、駆動力、制動力を発生する、進行方向を変える、衝撃を緩和するという基本性能を有している。

タイヤ構造の変遷を図 1.1 に示す⁽¹⁾。タイヤとホイールが一体構造である車輪の出現は紀元前 2600 年頃に遡る。初期車輪は木の板を組み合わせて、樽の蓋のような円形に加工し、中心部に軸を通す構造であった。ローマ時代になってから現在の自転車の車輪構造に近い構造が出現する。大部分は木材のままであったが、路面と接触する部分に鉄の輪を熱膨張圧入することで木製輪に比べ耐久性が大幅に向上した。19 世紀に入り、鉄の輪の外周にさらにゴムを巻いたものが考案された。これが車輪＝ホイール＋タイヤの原型になったものと考えられる。

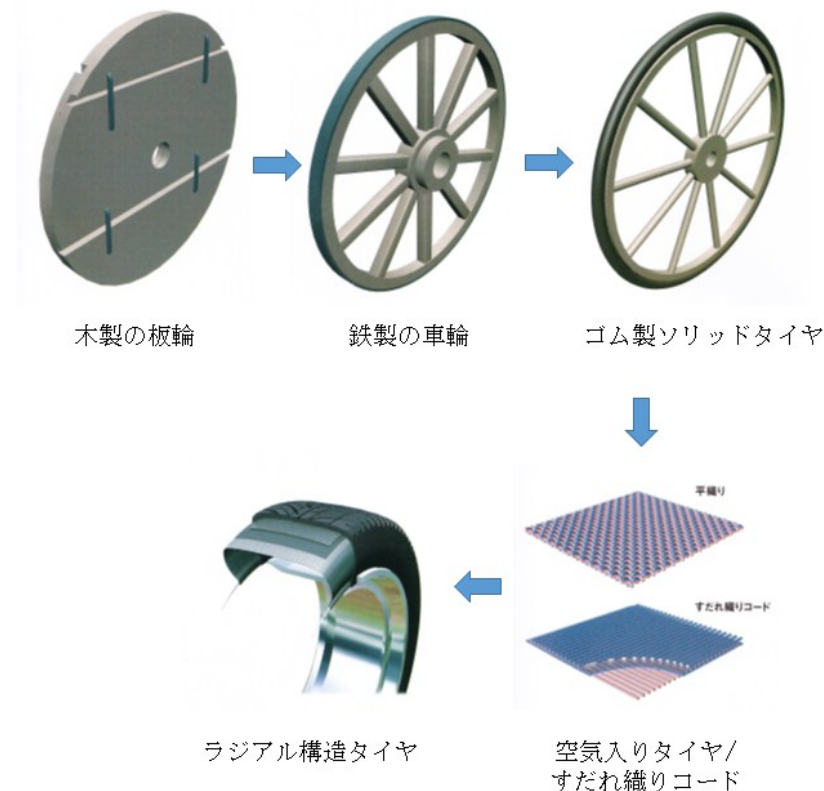


Fig.1.1 Tire transition ⁽¹⁾

1845年にイギリスのトムソンが空気入りタイヤの特許を取得, 1888年にダンロップが新しい構造の空気入りタイヤを考案・実用化した。平織り, すだれ織りのプライに薄いゴムを挟む構造が用いられバイアスタイヤ, ラジアルタイヤが開発された。現在は耐久性や転がり抵抗等で優位にあるラジアルタイヤが乗用車用タイヤとして主流となっている。

図 1.2 にラジアルタイヤの構造を示す。タイヤの構成材料はゴム, スチールコード, ナイロンコード等からなる⁽²⁾。トレッド部は路面と接するところであり, トレッドパターンと呼ばれる溝を有する。タイヤが転動するときに路面と接触する重要な部分であり, ベルト, プライを保護するとともに, 湿潤路面上でもタイヤと路面間の摩擦係数を確保し, 有効な駆動力, 制動力を路面に伝達させる部分である。ベルト部は半径方向に圧縮する役割をしており, 内圧を保持しタイヤ形状を形成するものである。その為, 一般的にスチールとゴムからなる積層複合材構造であり, 高剛性である。サイドウォール部は, 走行中に屈曲, 伸縮を受け大変形する部分である。ビード部はスチールコードを何重にも巻き重ねたリング状のものでプライの両端を固定し, 内圧を保持する役割をしている。このようにタイヤは複合材料構造体であり, 内圧を保持する圧力容器といえる。

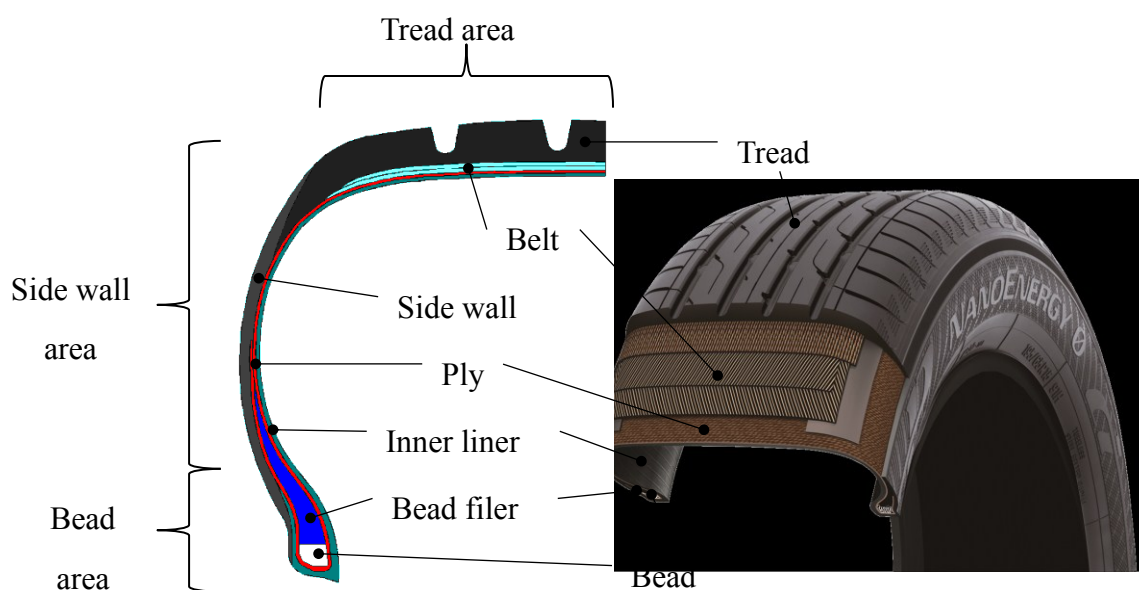


Fig.1.2 Tire structure

近年の乗用車に求められる燃費向上要求は非常に厳しくなっており世界各国で燃費に関する規制が施行され, 今後もさらなる燃費規制が検討されることが予測されている。そのため, 自動車開発においてはエンジン等のパワートレイン系の効率向上, 車体系部品の軽量化が進

んでいる⁽³⁾。また、ハイブリッド車、電気自動車の開発も進められている。同様にタイヤ業界においても燃費に関して自主基準の策定が行われている。日本国内においては一般社団法人日本自動車タイヤ協会による転がり抵抗性能を 5 段階で評価するラベリング制度が 2010 年より導入され、2012 年から欧州、韓国においても同様のラベリング制度がスタートしている⁽⁴⁾。このような制度導入等、タイヤ業界はタイヤの更なる低転がり抵抗を実現するために多大な開発努力を払っている。結果として自動車、タイヤは軽量化が進み、以前に比べ振動に対して敏感になっている。一般的な自動車の振動騒音現象を図 1.3 に示す⁽⁵⁾。このような環境の中にあっても、車室内の振動騒音品質指標である NVH (Noise, Vibration and Harshness) 性能の両立は重要な課題である。中でも、自動車単体騒音規制により自動車のエンジンや給排気系騒音の低減化が進んだことが背景となり、相対的にタイヤに起因した振動騒音問題が顕著化している⁽⁶⁾⁽⁷⁾。またハイブリッド車、電気自動車が普及していくに伴い、パワートレイン、給排気系等の振動騒音源がさらに小さくなり、相対的にタイヤの振動騒音源としての寄与度は今後も増加傾向になると予想される⁽⁸⁾。

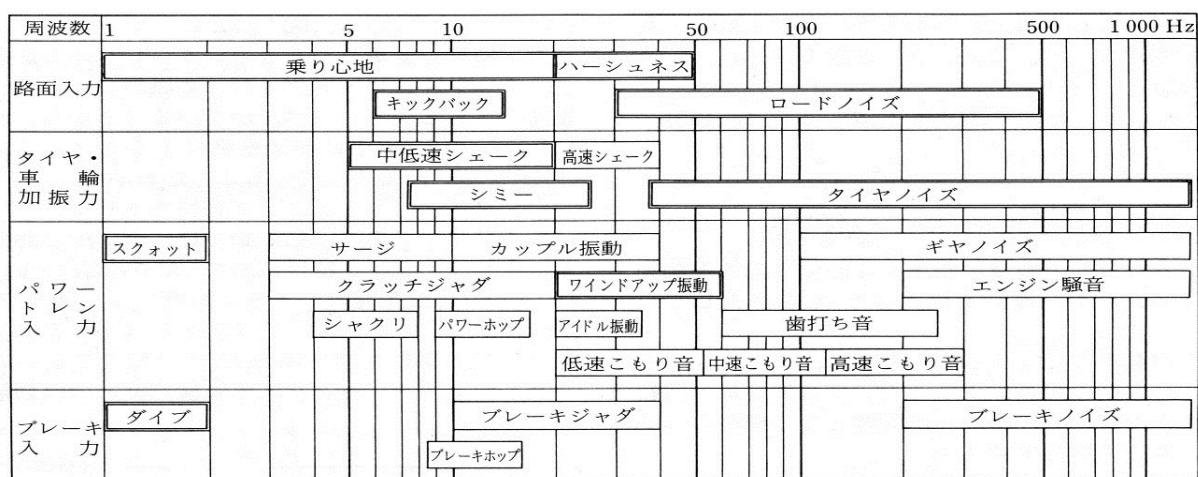


Fig.1.3 Phenomenon of sound and vibration problem at a passenger car⁽⁵⁾

1.2 従来の研究と課題

代表的な NVH 性能のひとつにロードノイズがある。ロードノイズとは、荒い路面走行時における路面とタイヤの接触に起因する現象であり、路面の凹凸により励起されたタイヤ振動が、車軸、サスペンション、ボディを介して車室内騒音となる。その為、タイヤ振動特性が大きく影響を与えることが明らかにされており、タイヤを部分構造として組み込んだ車両の NVH 性能予測に関する研究がなされている⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。振動騒音低減の観点からホイール・サス

ペンション系とタイヤの連成振動を考えた場合、車体メーカーは図 1.4 に示す上下方向，左右方向，前後方向，トー方向の車軸振動を励起させるタイヤ振動モードを解析できるタイヤモデルを求めている⁽¹¹⁾。タイヤメーカーはホイール・サスペンション系とタイヤの固有振動数が連成しないように，各振動モードの固有振動数を任意にコントロールするため，タイヤ剛性の設計指針を提示できるタイヤモデルを必要としている。これまで車室内騒音への寄与が大きい上下方向，前後方向車軸振動に起因するタイヤ半径方向振動が着目されてきた^{(9)・(12)}。しかしながらサスペンションやラバーブッシュの改良及び NVH 性能予測精度向上が進んだことにより，これまで着目してこなかった左右方向，トー方向車軸振動を励起するタイヤ横方向振動についても重要度が増している⁽¹³⁾。その他に，着目すべき振動モードとしてトレッドリングが剛体振動する横並進モード，面内振りモードがある。

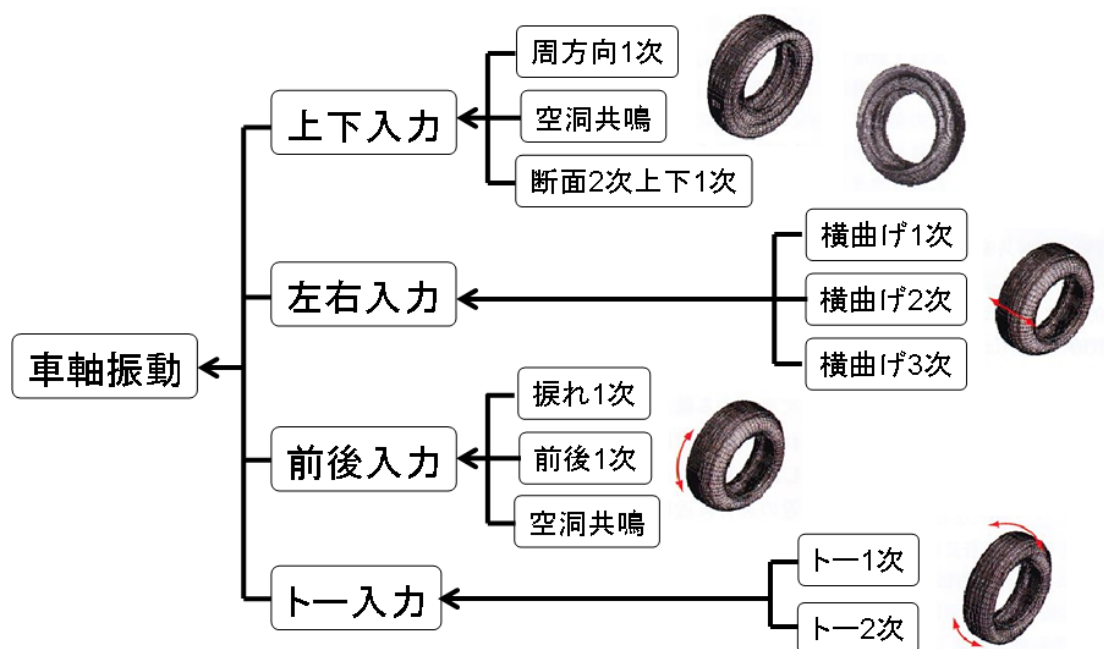
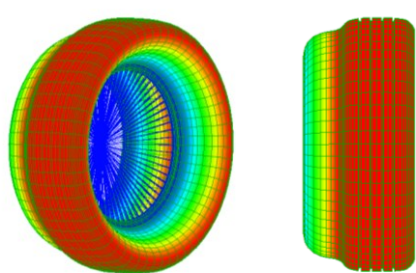


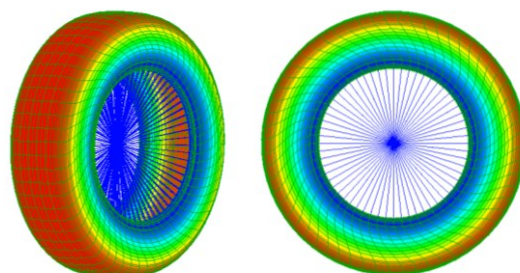
Fig.1.4 Relation nature between spindle vibration and tire mode shapes⁽¹¹⁾

有限要素法による非接地・非転動時におけるタイヤの振動解析の結果を図 1.5 に示す。タイヤサイズ 195/65R15 であり，節点数 19,270，要素数 23,109，周方向 60 分割の簡略化した有限要素モデルにより，数値解析を行った。モデルの取り扱いは I-DEAS Ver5.0(SDRC)を用い，数値解析には NX-Nastran Ver5.0 を用いた。本研究においては図 1.5 に示す通り，各振動モードに対して次のような名称を用いる。図 1.5(a)はトレッド部が横方向に剛体運動する振動モードであるから，横並進モードと呼ぶ。図 1.5(b)はトレッド部が軸回りに剛体運動し，それに伴いサイドウォール部が面内で振られる振動モードであるから，面内振りモードと呼ぶ。

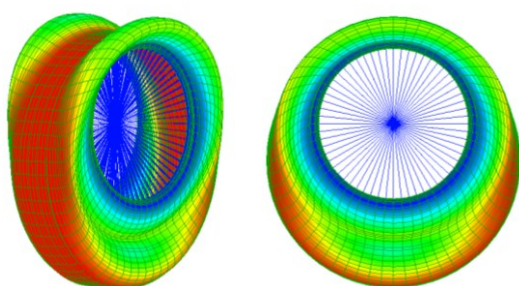
図 1.5 (c)(d)はトレッド部が径方向に振動する振動モードであるから、径方向モードと呼ぶ。図 1.5(e)(f)はトレッド部が横方向に振動する振動モードであるから、横曲げモードと呼ぶ。径方向、横曲げモードはその振動振幅の周方向の波数によって1次、2次、…と各次数のモードを有する。タイヤは軸対称構造であるため、接地することで同じ振動モードでも節と腹の位置によって車軸振動を励起する方向が変わる。車軸の上下方向と前後方向車軸振動に影響を与



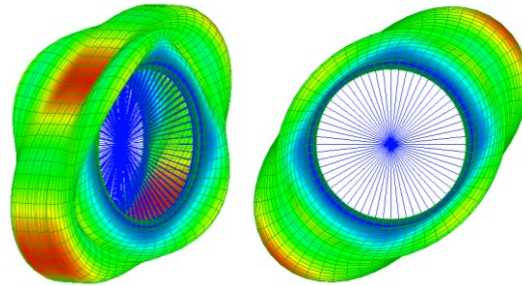
(a) Lateral translational mode



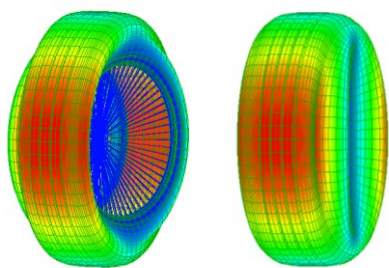
(b) In-plane torsion mode



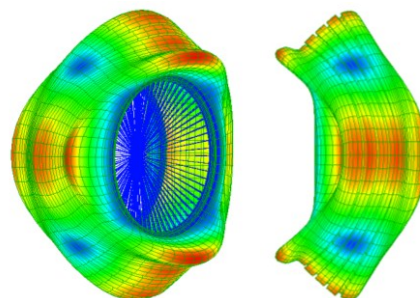
(c) 1st radial mode



(d) 2nd radial mode



(e) 1st lateral bending mode



(f) 2nd lateral bending mode



Fig.1.5 Tire mode shapes

えるタイヤの振動モードは面内振りモードと径方向モードである。車軸の横方向とトー方向車軸振動に影響を与えるタイヤの振動モードは横並進モードと横曲げモードである。

車体メーカーは運動性能のみならず NVH 性能予測技術を用い、開発中の車体に適合するタイヤ振動特性を要求品質として絞り込む⁽⁸⁾。一方、タイヤメーカーはその要求品質に適うタイヤを開発・提供しなければならない。双方ともに開発期間短縮のため、タイヤモデルを用いた振動特性予測技術は重要な位置を占めることになる。タイヤモデルは実験式モデルと物理モデルに分けることができる。前者はタイヤの測定データに対してある数式をカーブフィットさせ、数式の係数を同定し、タイヤの発生力及びモーメント、振動特性を計算するものである。代表的なものとして、Pecejka が提案した Magic Formula⁽¹⁴⁾、松岡が提案した定常波離散化タイヤモデル⁽¹¹⁾がある。タイヤの物理モデルは低自由度の力学モデルと有限要素モデルに代表される大規模数値解析用の詳細力学モデルに分けることができる。前者はタイヤ部分構造をいくつかの連続体、ばねと質量で表現するモデルである。後者は CAD データを基にタイヤ部分構造を細部まで表現するモデルである。現在、タイヤの振動解析に用いられるモデルのほとんどが有限要素モデルである。計算機の発達に伴い CAE の利用が普及しており、車両開発で問題視する振動騒音の周波数帯域が高周波側へ移動しているため高次のタイヤの振動モードを把握しなければならないという背景から利用されている。タイヤ開発者は数値シミュレーションより固有振動数、振動形状を把握することができる。しかしながら、一般的に有限要素モデルは振動形状を可視化できるが、振動形状および固有振動数の決定要因を明確に与えてくれるわけではなく、現象を理解するには熟練解析者の経験に依るところが大きい。また、車体メーカーにおける車両設計・制御設計・車両特性解析に用いるには計算コストが大きいと同時に、どの部材を変えるとタイヤの力学特性がどのように変化するかの大まかな見通しが掴みづらい。低自由度の力学モデルを用いた解析的手法は適用できる周波数範囲が限定されるという欠点を有するが、タイヤの物理的な部材特性を基にタイヤの力学特性を導いているため、タイヤの部材と力学特性との関連がわかり易く、タイヤの設計時に解析的なアプローチが可能となる⁽¹⁵⁾。このように低自由度の力学モデルはタイヤメーカーと車体メーカーの間で取り扱うことのできる共有モデルとして重要な位置を占めている。一般にタイヤの低自由度の力学モデルはばね付きのリングモデルが用いられる。このモデルはトレッド部をリング、サイドウォール部をばねとして表現したもので、制動・駆動性能、コ

ーナリング性能，乗り心地性能および NVH 性能の解析等の広範囲にわたり利用されているモデルである．特に振動問題については Tielking⁽¹⁶⁾，上玉利⁽¹⁷⁾，酒井⁽¹⁸⁾，Wei⁽¹⁹⁾等により連続体の円環ベルトを持つタイヤモデルを用いた解析が扱われている．これら研究においてはタイヤ半径方向振動を対象とし，回転効果の影響等について考察している．一方，福田ら⁽²⁰⁾は横方向振動を対象とした円筒リングモデルによる振動解析を行っている．しかしながら，サイドウォール部の剛性を4つのばね剛性で表現しており，物理的に意味のないばねを付加している．そのため，タイヤ半径方向，横方向振動の振動特性を包括し解析することが困難である．このように，低自由度の力学モデルにおける横方向振動の解析は未だ十分に行われていない．そのため，タイヤ半径方向，横方向振動の振動特性を把握できる力学モデルの構築が求められている．

一方，車体メーカーにとっては路面により励起されたタイヤ振動がホイールを通して車軸振動となるため，実稼動状態における車軸振動の予測精度は重要である．実稼動状態におけるタイヤ振動特性及び路面入力を如何に表現するかが鍵となるが，タイヤ振動特性に着目すると非接地・非転動時から接地・転動時において振動特性が変化する⁽²¹⁾．振動特性の変化の例を2つ述べる．

1 つ目は固有振動数の低下現象である．一般にタイヤの固有振動数は接地・転動することで，低下するという特異な性質を持つ．図 1.6 にタイヤ-車軸伝達特性の例を示す．この1次ピーク周波数は径方向1次モードが原因であることが知られている．接地・転動時のタイヤ振動特性の実験的把握の有効な手段がない背景から，この径方向1次の固有振動数が唯一接地・転動時のタイヤ振動特性の中で把握できる特性である．図 1.6 より非転動時から転動時にタイヤの状態が変化することで，固有振動数が低下していることがわかる．固有振動数の低下はタイヤ質量の変化が考えられないことからタイヤ剛性の変化であると考えられている．車軸振動予測を行う上で，タイヤモデルの剛性パラメータは非接地・非転動時の振動特性に対してカーブフィット等で同定した後に，突起乗り越し試験等から接地・転動時の径方向1次固有振動数の変化量を上下車軸振動より把握する．その変化量からタイヤ構造部材の剛性を均一低下させることで等価的に同定する⁽²²⁾⁽²³⁾．実験的に接地・転動時の2次以降のタイヤ振動特性を把握することができないことに起因し，このパラメータ同定は推定の域を出ない．このとき接地・転動時のタイヤモデルが正しくなければ，路面入力から直接車軸振動を求めることはできない．そのため，構築したタイヤ有限要素モデルへの路面入力の同定に関する研究がなされているが，そのほとんどが車軸振動からの逆同定を基にしたものである．

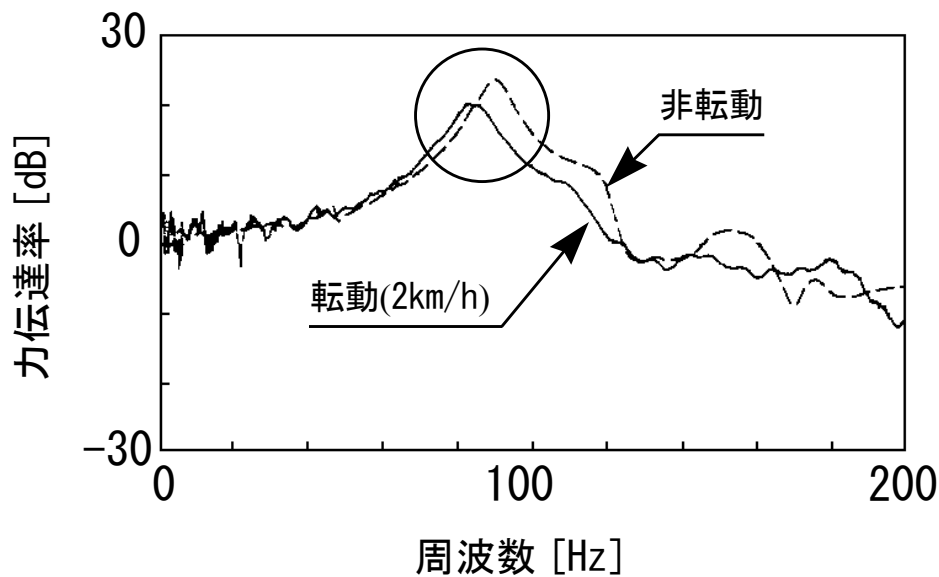


Fig.1.6 Vibration transmission characteristics between tire and spindle⁽²⁾

2 つ目は転動時における固有振動数の分離現象である．一般に振動モードは定在波として励起され，モード形状が同じであれば固有振動数も同じになる．Brinkmeter らは有限要素解析ソフト Abaqus を用いて回転解析を行った結果，同一モードが異なる周波数において移動波として励起されることを報告している⁽²⁴⁾．仮に，移動波として励起されるならば時々刻々と腹と節の位置が変化することを意味する．振動の伝搬速度が非常に速いことを考慮すると車軸およびタイヤ外側の音場に対して支配的な影響を及ぼさないことを意味するが，実際にはタイヤ振動特性が NVH 性能に大きな影響を及ぼす．

以上のことから，タイヤモデルを更に精度向上するためには，接地・転動の違いがタイヤ振動特性に与える影響について体系的に検討を行うことは重要である．一般的に接地・転動することにより回転効果の影響，接地拘束の影響，ゴム材料特性の影響が現れる．回転効果の影響については，力学モデルを用いて Tielking⁽¹⁶⁾，Wei⁽¹⁹⁾，Kim⁽²⁵⁾らが，有限要素モデルでは Brinkmeter⁽²⁴⁾，Kindt⁽²⁶⁾らが回転解析を実施している．回転することで振動モードが定在的にではなく波動的に発生することが報告されているが，回転効果であるコリオリ力，遠心力の影響については明確化していない．接地拘束の影響については，酒井⁽¹⁸⁾がモード形状に着目した解析を行っているが，接地拘束によるモード形状変化と固有振動数の変化の関係性，非接地時のモード形状の関係性について明確化していない．ゴム材料特性については佐口⁽²¹⁾がタイヤ上下動剛性の加振振幅依存性について報告しており，主因はゴム材料のペイン効果

による剛性低下であると考えられている⁽²⁷⁾。ペイン効果とは、タイヤゴム材料に添加されているカーボンがゴム物性に与える影響の一つのことで、ひずみ振幅により弾性率が変化する現象のことである⁽²⁸⁾。そのため、接地・転動時において接地部付近に発生するサイドウォール部等の変形に伴う大きなひずみによってタイヤ構造部材の剛性が変化する。しかしながら、上述のように接地・転動時のタイヤ振動特性の実験的把握の難しさによりタイヤ動剛性の低下量を定量的に見積もることは難しい。回転効果の影響、接地拘束の影響、それらが複合する接地・転動時のタイヤ振動特性を解析的に明らかにすることで、力学モデルよりタイヤ構造部材の剛性変化の定量的な推定が可能になる。

以上のことからロードノイズに起因するタイヤの振動モードについて表現できるタイヤ振動モデルを構築すること及びタイヤ振動特性に対する接地・転動の影響を解明することはロードノイズ性能向上を検討する上で役に立つものである。まとめると課題は次のとおりである。

- (1) タイヤの各振動モードを表現できる力学モデルの構築および各固有振動数に対するタイヤ各部材剛性の寄与度の解明
- (2) 回転効果、接地拘束、また両者が複合した場合について、境界条件の動力学的な変化がタイヤ振動特性に与える影響の解明

1.3 本論文の目的及び構成

本論文ではロードノイズに関するタイヤ振動特性を予測する上で重要となる、タイヤモデルの構築及び接地・転動時のタイヤ振動特性の変化要因について解明する。本章を含め7つの章で構成される。

第2章ではタイヤ振動特性の基本的な特性について実験モード解析の結果より述べる。特に横曲げモードの振動挙動について分析する。

第3章では横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードを解析できる力学モデルの構築および固有振動数をコントロールするために、タイヤ部材剛性の設計指針を示す。まず、円筒形状のタイヤの力学モデルを構築し、実験より把握した振動形状から固有関数を定義する。次に円筒シェル理論に基づき運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを導出し、Rayleighの方法より固有振動数を導出する。また導出した固有振動数の式から、タイヤ構造部材の剛性の各固有振動数に対する寄与度を算出する。

第4章では回転効果がタイヤ振動特性に与える影響について解明する。特に非接地・転動

時における径方向モードに着目する．まず非転動時と転動時のタイヤ振動特性の差異を加振試験，実稼動試験より把握する．次に円環リングのタイヤの力学モデルを構築し，運動エネルギー，ポテンシャルエネルギーを導出し，Hamilton の原理より振動に関する運動方程式を導出する．実験結果と比較し，導出した理論の妥当性を検証する．最後に回転効果であるコリオリ力と遠心力がタイヤ振動特性に与える影響を示す．

第 5 章では接地拘束がタイヤ振動特性に与える影響について解明する．特に接地・非転動時における径方向モードに着目する．まず非接地時と接地時のタイヤ振動特性の差異を加振試験により把握する．実験モード解析から接地によるモード形状変化について解明する．次に接地拘束時に発生する面を簡易的に接地点による拘束と単純化し，円環リングのタイヤの力学モデルの振動に関する運動方程式とレセプタンス法から接地・非転動時の振動数方程式を導出する．実験結果と比較し，導出した理論の妥当性を検証する．最後に接地によるモード形状変化と非接地時のモード形状との関係性について示す．

第 6 章では回転効果及び接地拘束が同時に発生する場合にタイヤ振動特性に与える動力学的な影響について解明する．特に接地・転動時における径方向モードに着目する．まず第 4 章，第 5 章において構築した円環リングの力学モデルの理論を基に，接地・転動時における振動に関する運動方程式を導出する．それを基に，接地・転動によるモード形状変化と非接地・転動時のモード形状との関係性について示す．

第 7 章では本研究により得られた成果をまとめ，最後に今後の展望について示す．

参考文献

- (1) 鈴木慎一, “Motor Fan illustrated”, 株式会社三栄書房, Vol.34, pp24-25, (2009)
- (2) 株式会社ブリヂストン, “自動車用タイヤの基礎と実際”, 山海堂, pp10-11, (2006)
- (3) 穂高武, “タイヤによる低燃費化技術”, 自動車技術, Vol.67, No.4, pp39-44, (2013)
- (4) 奥田慶一郎, “現在のタイヤ産業を取り巻く環境”, 自動車技術, Vol.67, No.4, pp10-14, (2013)
- (5) 自動車技術会編, “自動車技術ハンドブック 基礎・理論編”, pp325, (1990)
- (6) 大島恵, 自動車の低騒音化への取り組み, 騒音制御, Vol.27, No.6, 399-406, (2003)
- (7) 稲葉憲二, タイヤの低騒音化への取り組み, 騒音制御, Vol.27, No.6, 407-411, (2003)
- (8) 三山栄二, 赤松博道, 景山雄介, 海老沢弘道, 森田真一, 田中克則, 塩川直希, 宮川隆之, “ロードノイズ適性化のためのタイヤ固有値コントロール技術”, 自動車技術会学術講演前刷集, No.20095194, (2009)
- (9) 柴田崇, 山内祐司, 鎌田慶宣, 菅原俊彦, 小西正隆, 池田俊之, ロードノイズ入力モデル化手法の提案と予測解析精度の検証, 自動車技術会学術講演前刷集, No.81-02, pp.1-4, (2002)
- (10) I. Kido, S. Ueyama, M. Hashioka, S. Tamamoto, M. Tsuchiyama, H. Yamaoka, “Tire and Road Input Modeling for Low-Frequency Road Noise Prediction”, SAE international Noise and Vibration Conference 2011, Paper-No.2011-01-1690, (2011)
- (11) 松岡久祥, “定常波離散化タイヤモデルによるロードノイズ解析”, 自動車技術, Vol.63, No.7, pp68-72, (2009)
- (12) 井手秀幸, “ロードノイズに及ぼすタイヤの空洞共鳴の影響について”, 日本ゴム協会誌 Vol.65, No.8, pp.457-462, (1988)
- (13) I. Kido, S. Ueyama, “Coupled Vibration Analysis of Tire and wheel for Road Noise Improvement”, SAE international Noise and Vibration Conference 2005, Paper-No.2005-01-2525, (2005)
- (14) H. S. Pacejka et al, “The Tyre as a Vehicle Component”, XXVI FISITA Congress, (1996)
- (15) 水野雅彦, “車両運動解析用タイヤモデルに関する研究”, 博士論文(名古屋大学), pp.14-16, (2010)
- (16) J. T. Tielking, “Plane vibration Characteristics of a Pneumatic Tire Mode”, SAE Paper-No.650492, (1965)
- (17) 上玉利恒夫, “ラジアルタイヤの振動特性 (第 1 報)”, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.851, Paper-No.851031, pp155-160, (1985)
- (18) 酒井秀雄, “タイヤ工学”, 株式会社グランプリ出版, pp310-318, (2001)
- (19) Y. T. Wei, L. Nasdala, H. Rothert, “Analysis of forced transient response for rotating tires using REF models”, Journal of sound and vibration, No.320, pp.145-162, (2009)

- (20) T. Saguchi, Influence of the rolling condition given to the natural frequency of a tire, JSAE Proceeding, No.9840829, (1998)
- (21) 福田裕也, 藤田活秀, 金子貢, 齊藤隆, “薄肉円筒シェル理論に基づくラグタイヤモデルに関する研究”, Dynamics&Design Conference 2009, Paper-No.259, (2009)
- (22) 高城龍吾, 佐口隆成, “高精度タイヤモデルおよび車両モデルを用いたロードノイズ解析”, 自動車技術会学術講演前刷集, No.921, pp.65-68, (1992)
- (23) N. Tsujiuchi, T. Koizumi, M. Matsubara, K. Moriguchi, I. Shima, Prediction of Spindle Force Using Measured Road Forces, SAE Noise and Vibration Conference Proceedings, Paper-No. 2009-01-2107, (2009)
- (24) M. Brinkmeter, U. Nackenhorst, O. V. Estorff and S. Petersen, “Physically based Modeling of Tire Rolling Noise by a Finite Element Approach”, inter-noise2004, (2004)
- (25) Y. J. Kim, J. S. Bolton, “Effect of rotation on the dynamics of a circular cylindrical shell with application to tire vibration”, JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, No.275, pp.605-621, (2004)
- (26) C. González Díaz, S. Vercammen, J. Middelberg, P. Kindt, C. Thiry, J. Leyssens, “Numerical prediction of the dynamic behavior of rolling tyres”, ISMA2012 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD 2012, Paper-No. isma2012_0890, (2012)
- (27) P. Kindt, F. De Coninck, P. Sas, W. Desmet, “Test setup for tire/road noise caused by road impact excitation: first outlines”, ISMA2006 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD 2006, Paper-No. isma2006_0368, (2006)
- (28) 日本ゴム学会編, “ゴム技術入門”, 丸善株式会社, pp53-56, (2004)

第2章 タイヤ振動挙動の実験検証

2.1 緒言

ロードノイズに寄与するタイヤ振動特性に関する研究は数多く行われているが、半径方向のタイヤ振動に着目した研究が主である。しかしながら、車軸振動方向によって振動励起に寄与するタイヤの振動モードが異なり、包括的なタイヤ振動特性の解明が必要である。特に、車体 NVH 性能予測における CAE の発展により、これまで着目していなかった横方向車軸振動を励起する横方向のタイヤ振動についても重要であることが明らかになり⁽¹⁾、横曲げモードの振動特性の把握が求められている。

本章では実験モード解析よりタイヤ振動特性について明らかにする。特に横曲げモードの振動挙動について分析を行う。

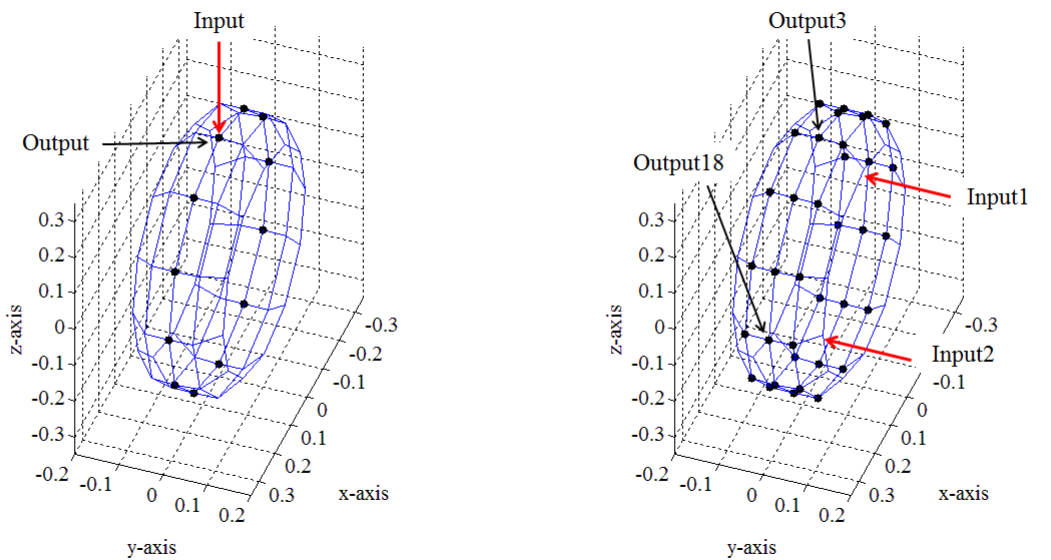
2.2 非接地・非転動時の実験モード解析

2.2.1 実験モード解析

試験タイヤには 195/65R15 の 4 本のストレート溝を有するトレッドパターンの無いラジアルタイヤを用いた。図 2.1 に試験タイヤを示す。実験は非接地で行い、ホイール中心部は全 6 自由度固定とする支持条件とした内圧は 230kPa とした。径方向モード、横曲げモードをそれぞれ励起するため、2 つの実験モード解析を行った。応答点及び加振点を図 2.2 に示す。●は応答点を表わし、→は入力箇所及び方向を表わしている。また、図 2.2(a)は径方向モードを把握するための実験概略図である。半径方向に入力を与え、トレッド部の中央点に加速度ピックアップを周方向 12 点に取り付け計測を行った。図 2.2(b)は横曲げモードを把握するための実験概略図である。横方向に入力を与え、加速度ピックアップを周方向 12 点、断面方向トレッド 3 点の計 36 点に取り付け計測を行った。なお、前後方向を x 、上下方向を z 、横方向を y とする。



Fig.2.1 Test tire



(a) Set up for radial mode

(b) Set up for lateral bending mode

Fig.2.2 Set up for experimental modal analysis

2.2.2 径方向モード

入力を **Input** の z 方向の力、応答点を **Output** の z 方向の加速度として同定した周波数応答関数を図 2.3 に示す。また、そのピーク周波数におけるモード形状を図 2.4 にまとめる。図 2.4 の破線は振動前の形状を表わし、赤の実線が振動形状を示している。図 2.3 より明確なピークが 7 次まで確認できることがわかる。図 2.4 より、1 次モードはトレッド部が剛体運動するモードであり、2 次以降はトレッド部が半径方向に変形するモードであることがわかる。1.2 節で述べたが、半径方向に振動する振動モードであり、周方向に波数をもつことから径方向モードと呼ぶ。径方向モードは、一般に車軸上下振動を励起するタイヤの振動モードとして知られている。

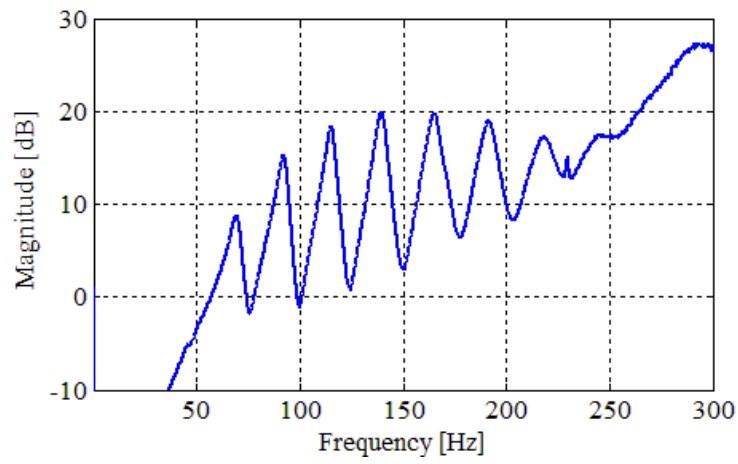
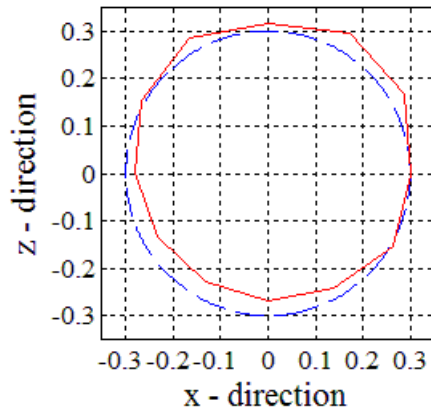
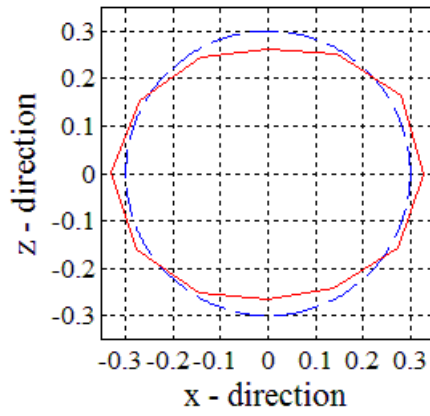


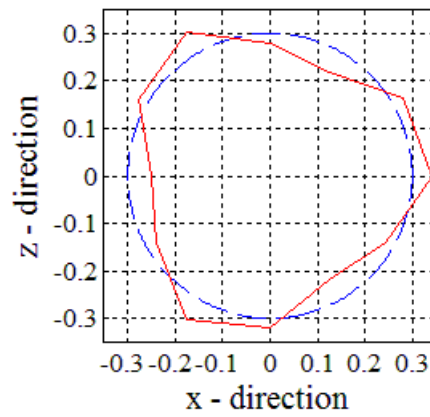
Fig.2.3 Frequency response function as against radial shaking



(a) 1st radial mode



(b) 2nd radial mode



(c) 3rd radial mode

Fig.2.4 mode shape of radial mode

2.2.3 横並進モードと横曲げモード

入力を Input1 の y 方向, 応答点を Output3 の y 方向加速度として同定した周波数応答関数と入力を Input2 の y 方向, 応答点を Output18 の y 方向加速度として同定した周波数応答関数を図 2.5 に示す. また, そのピーク周波数におけるモード形状を図 2.6, 2.7 にまとめる. 図 2.6 は横並進モード, 図 2.7 は横曲げモードである. 横並進モード, 横曲げモードの名称の決定については 2.3 節で詳しく述べる. また, 図 2.6, 2.7 における \bullet は振動前の位置座標であり, \circ が最大振幅時の振動形状の変位位置を表わす.

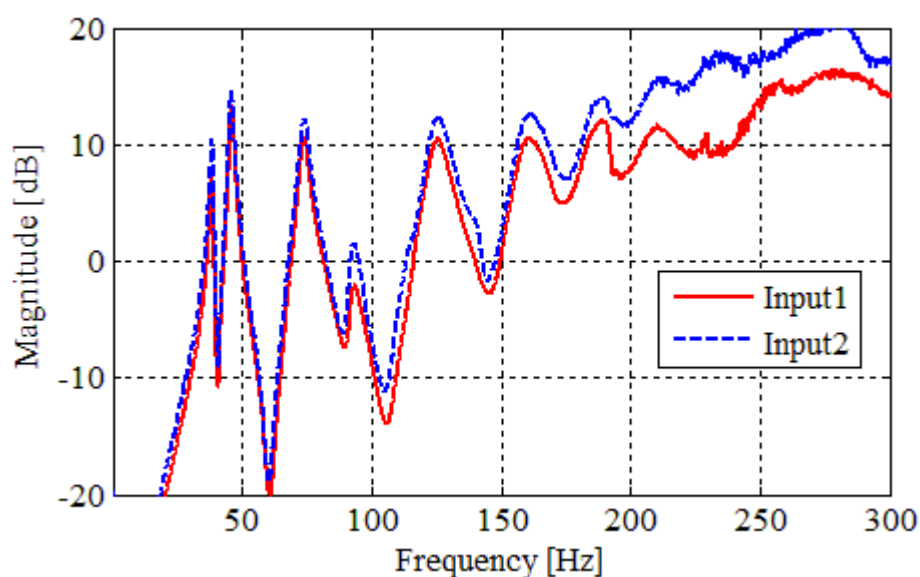


Fig.2.5 Frequency response function as against lateral shaking

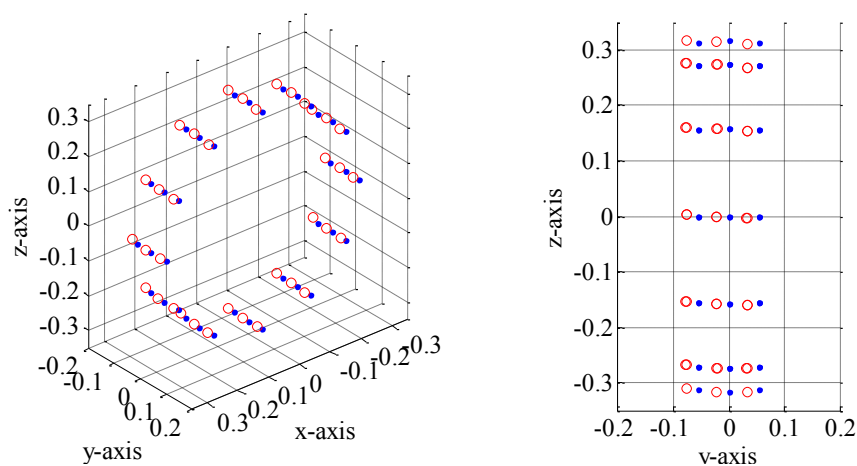
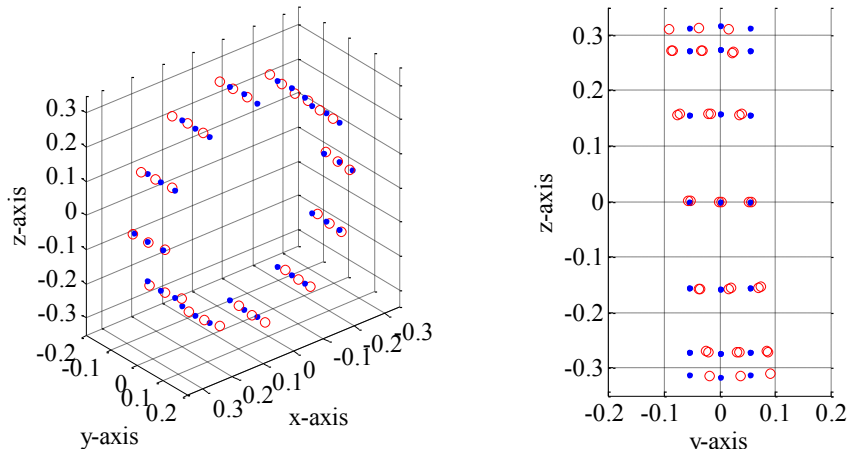
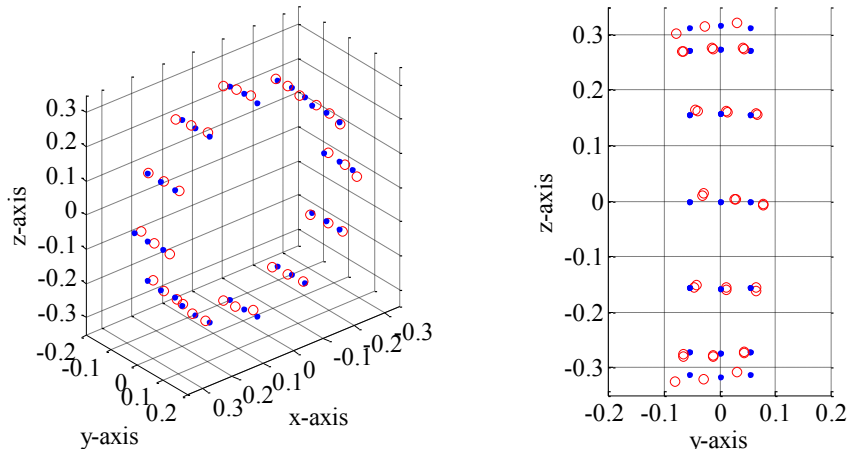


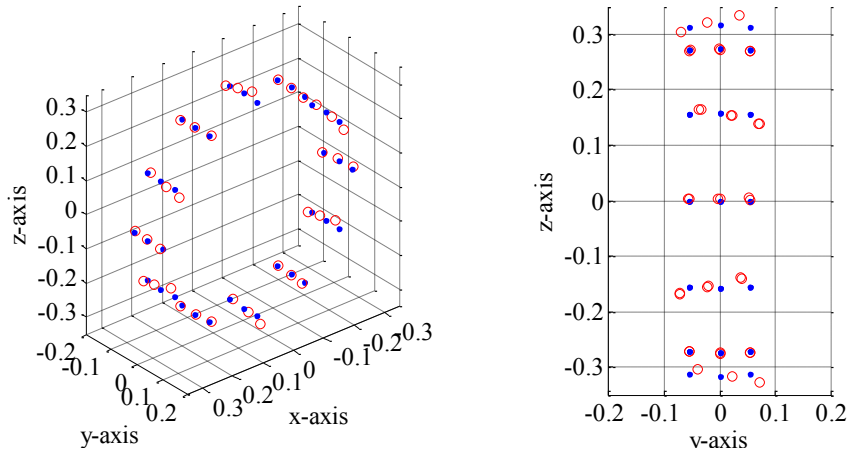
Fig.2.6 Mode shape of lateral translational mode as against 1st peak



(a) Mode shape of 1st lateral bending mode as against 2nd peak



(b) Mode shape of 2nd lateral bending mode as against 3rd peak



(c) Mode shape of 3rd lateral bending mode as against 4th peak

Fig.2.7 Mode shape of lateral bending mode

図 2.5 より, 40-50Hz に 2 つの近接したピークを持つことがわかる. さらに軸対称であることから, Input1, 2 における周波数応答関数はほぼ一致している. 図 2.6, 2.7 より, モード形状を確認すると, 1, 2 次ピークにおけるモード形状はトレッド部の剛体運動であることがわかり, 3 次以降についてはトレッド部の変形を伴うモード形状であることがわかる.

2.3 横曲げモードに関するトレッド部の振動挙動分析

y 方向振動に関して円周方向を横軸に展開したグラフを図 2.8 に示す. なお, 各振動モードについて, 振幅の最大値で正規化している. 図 2.8 より, 1 次はオフセットしたような曲線になっており, 2 次以降は周方向に波数を持つことがわかる. そこで, 本研究では 1 次の剛体運動のモードを横方向の並進モード, 2 次以降についてはその波数の小さいものから, 1 次横曲げモード, 2 次横曲げモード, 3 次横曲げモード, …と呼ぶこととする.

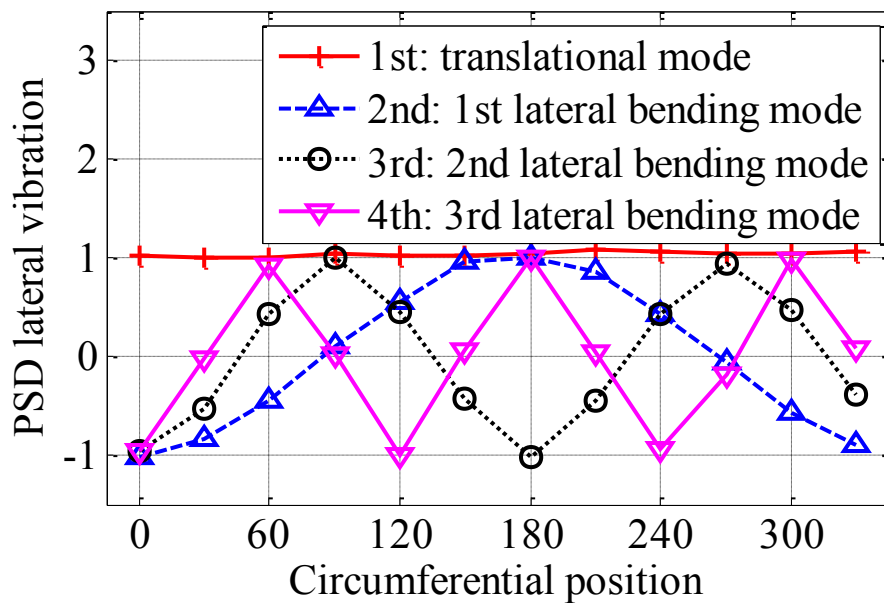


Fig.2.8 Comparison of lateral vibration between modes

トレッド断面横方向の 3 点の y 方向振動を比較したものを図 2.9 に示す. 各振動モードについて, 振幅の最大値で正規化している. 図 2.9 よりトレッド断面の y 方向振動は y 方向に依存しておらず, 同相であることがわかる. また, 波形が周期関数であることがわかる.

また, 半径方向振動についてトレッド部両端を比較したものを図 2.10 に示す. この結果から, トレッド部両端のショルダー部においては半径方向振動が逆相に振動していることがわかる. これら結果に関する考察は 2.4.3 において行う.

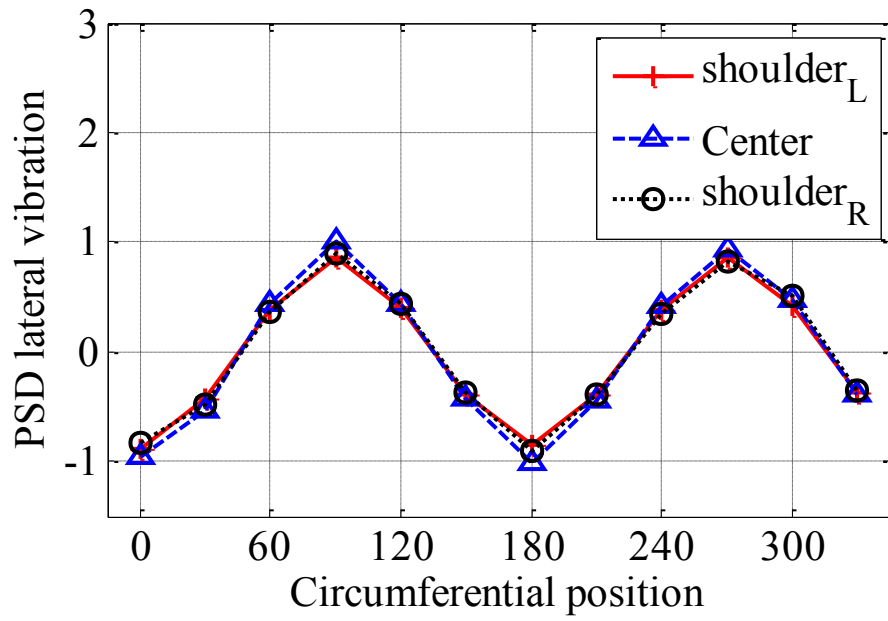


Fig.2.9 Comparison of lateral vibration of 2nd lateral bending mode

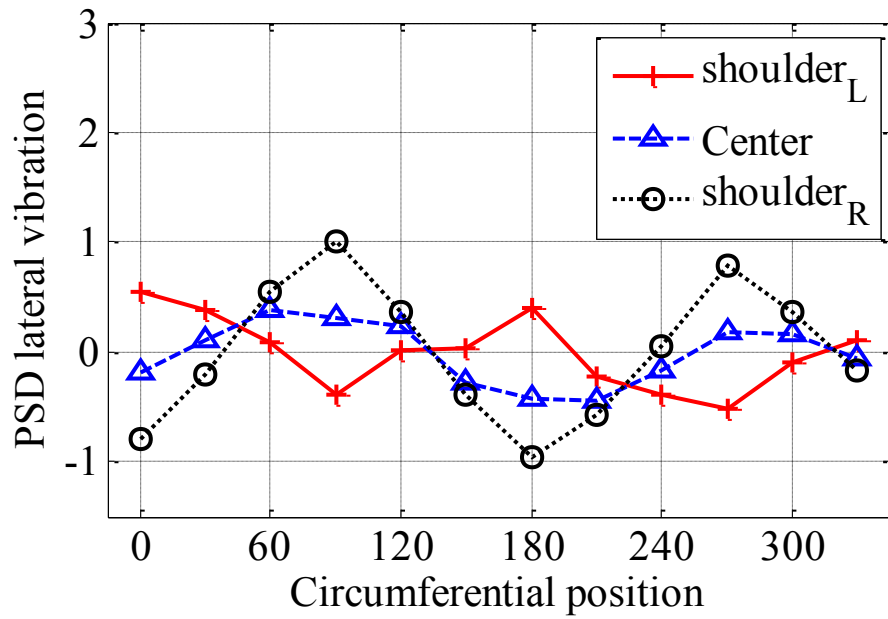


Fig.2.10 Comparison of radial vibration of 2nd lateral bending mode

半径方向と周方向振動については振動応答が小さいため、計測データのまま分析することが難しい。そこで、平滑化を行い、特徴分析を行う。方法としてはガウスクERNELを用いた局所2次回帰で平滑化を行った。任意の連続関数 $m(x)$ で説明変数 x と x^* が近傍に存在するとき局所二次式回帰は次のように表わされる⁽²⁾。

$$m(x, x^*) = \alpha_0(x^*) + \sum_{j=1}^2 \alpha_j(x^*)(x - x^*)^j \quad (2.1)$$

ここで、タイヤが円形の周期構造物であることを考慮し、角度を説明変数、振幅を目的変数とし次のように表わす。

$$A(x, x^*) = \alpha_0(\theta^*) + \sum_{j=1}^2 \alpha_j(\theta^*)(\theta_j - \theta_j^*)^j, \quad -\pi < \theta_i - \theta_j < \pi \quad (2.2)$$

実験データ $(\Theta_1, A_1), \dots, (\Theta_n, A_n)$ に基づき、重み付き誤差 2 乗和として

$$Error(\theta^*) = \sum_{i=1}^n \left[w \left(\frac{\Theta_i - \theta^*}{h} \right) \{A(\Theta_i, \theta^*) - A_i\}^2 \right] \quad (2.3)$$

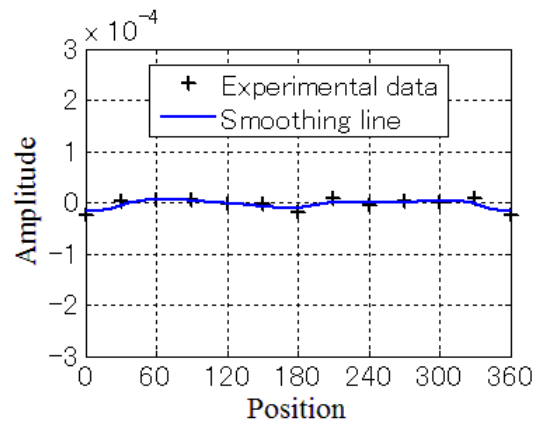
を最小化する。

ここで、重み付け関数として次式のガウス型関数を用いる。

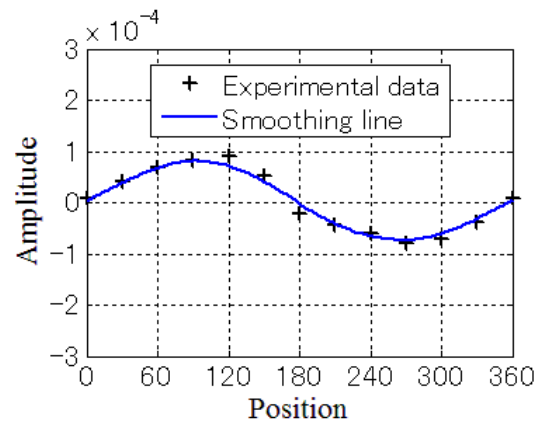
$$w \left(\frac{\Theta_i - \theta^*}{h} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_i - \theta^*}{h} \right)^2 \right) \quad (2.4)$$

平滑化した波形と実験データを図 2.11-2.13 に示す。この結果から、周方向、半径方向振動においてもそれぞれの波形が周期関数として表わされていることがわかる。さらに、周方向、半径方向振動は波長の 3/4 だけ位相がずれていることがわかる。また、半径方向振動と周方向振動の振幅比を図 2.14 に示す。また、比例定数=1 の直線を併記した。この結果から、モード次数と振幅比は概ね比例関係であることがわかる。これは、周方向、半径方向振動について不伸張変形仮定が成り立っていることを示している⁽³⁾。

また、トレッド部の剛性違いによる振動特性変化を確かめるため、ベルトのスチールコードの角度違いの試験タイヤを用意し、周波数応答関数から固有振動数を同定した。図 2.15 に径方向モード、図 2.16 に横曲げモードの固有振動数比較を示す。Tire A が前述の試験タイヤ、Tire B がベルト角度違いのタイヤである。この結果から、トレッド部の剛性を変化させてもその他の部材を含め構造が同一であれば、振動特性に変化が現れないことを確認した。これはタイヤ振動がトレッド部に依存しないことを示す。

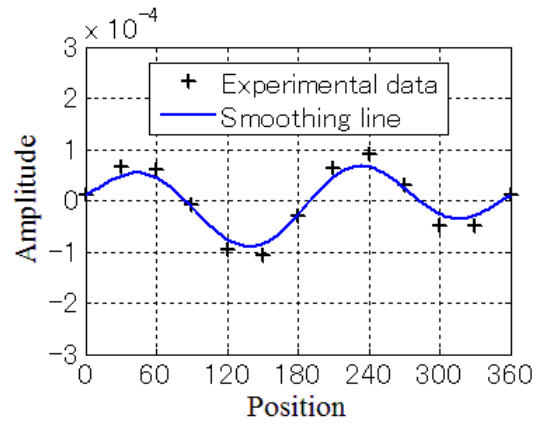


(a) Circumferential vibration

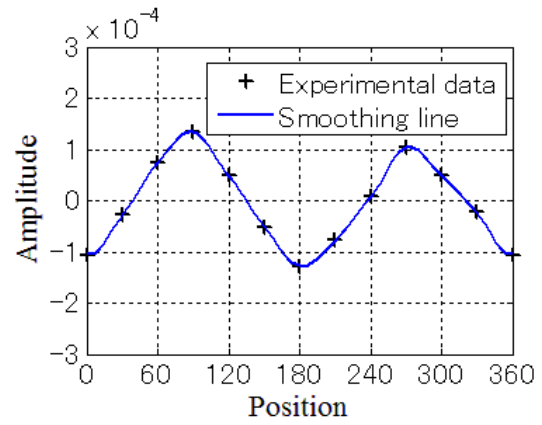


(b) Radial vibration

Fig.2.11 Comparison of vibration behavior at 1st bending mode

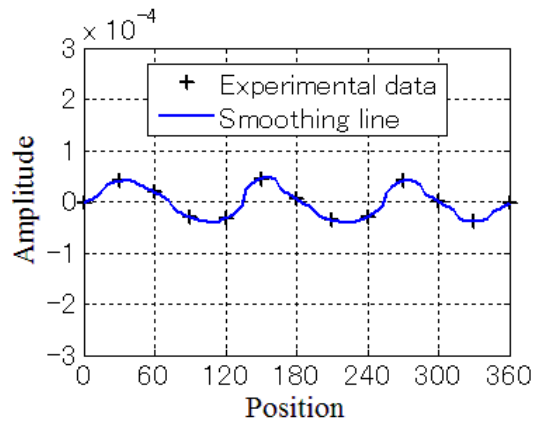


(a) Circumferential vibration

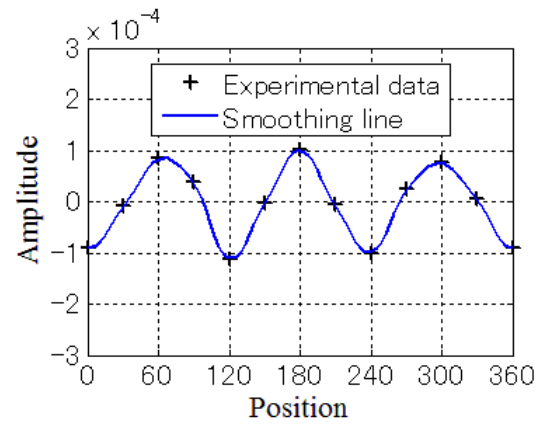


(b) Radial vibration

Fig.2.12 Comparison of vibration behavior at 2nd bending mode



(a) Circumferential vibration



(b) Radial vibration

Fig.2.13 Comparison of vibration behavior at 2nd bending mode

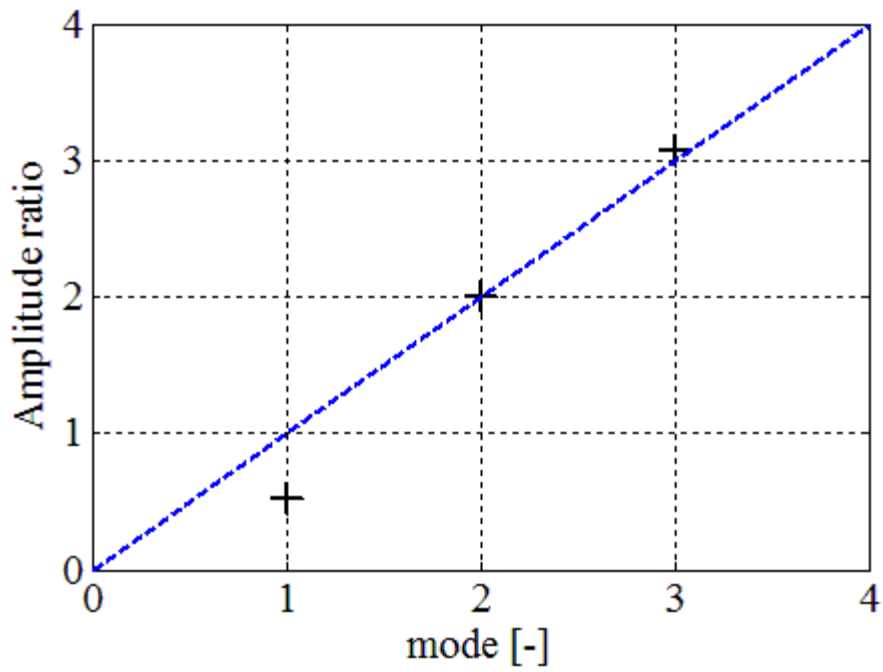


Fig.2.14 Comparison of the amplitude ratio of radial / circumferential vibration

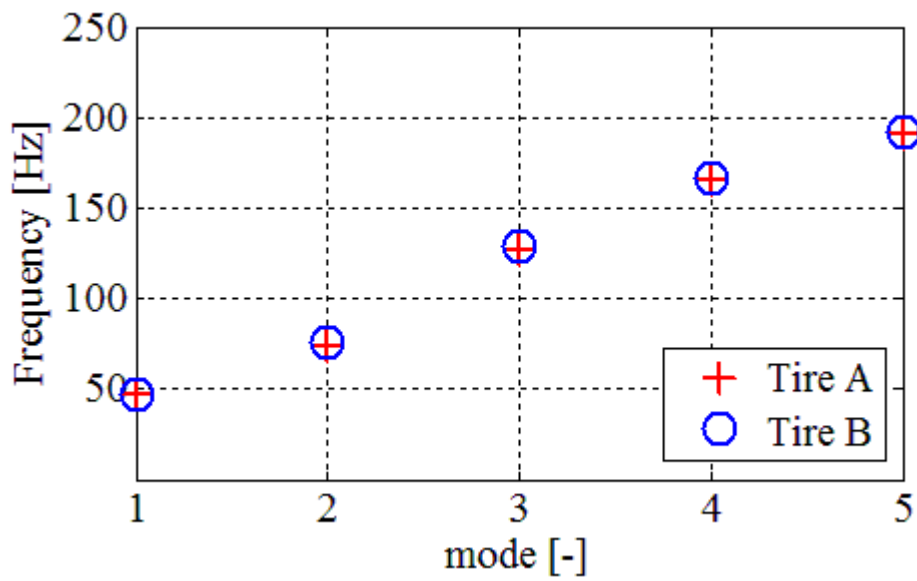


Fig.2.15 Comparison of natural frequencies as against radial mode

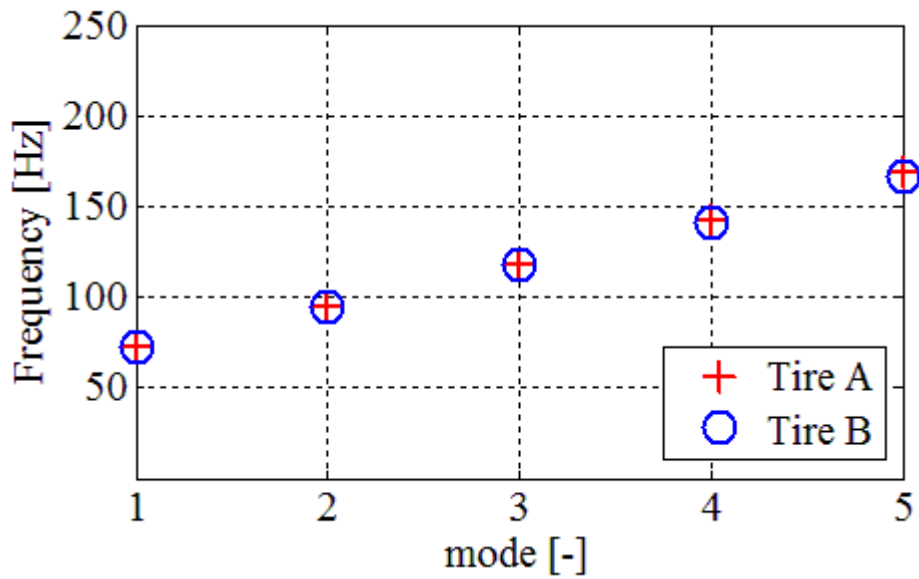


Fig.2.16 Comparison of natural frequencies as against lateral bending mode

2.4 結言

横並進モード，径方向モード，横曲げモードについて実験モード解析より振動特性を把握した．得られた知見は以下の通りである．

1. 横並進モード，径方向モード，横曲げモードの振動挙動について把握した．
2. トレッド部の横方向振動の周方向波数に着目し，横並進モードと横曲げモードの分類を行った．
3. 径方向モード，横曲げモードの固有振動数に対してベルト角度違いによるトレッド剛性の差異の影響が表れないことを確認した．

参考文献

- (1) I. Kido, S. Ueyama, “Coupled Vibration Analysis of Tire and wheel for Road Noise Improvement”, SAE international Noise and Vibration Conference 2005, Paper-No.2005-01-2525, (2005)
- (2) 竹澤邦夫, “みんなのためのノンパラメトリック回帰（第 2 版）上”, 吉岡書店, pp163-178, (2003)
- (3) 小泉 孝之, 辻内 伸好, 松原 真己, 松山幸司, 相川将隆, 大島裕子, “回転効果に着目したタイヤ転動時における振動挙動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.777, (2011), pp.2018-2029

第3章 円筒シェル理論に基づくタイヤの力学モデル

3.1 緒言

ロードノイズに寄与するタイヤ振動特性に関する研究は数多く行われているが、半径方向のタイヤ振動に着目した研究が主である。しかしながら、車軸振動方向によって振動励起に寄与するタイヤの振動モードが異なり、包括的なタイヤ振動特性の解明が求められている。非接地・非転動時のタイヤ振動特性に着目すると、その振動特性は第1章、第2章で示したように横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードに分類できる。

振動騒音低減の観点からタイヤ、ホイール・サスペンション系とタイヤの固有振動数付近で連成振動しないように、タイヤメーカーとしては車体メーカーの要求品質に対応するようタイヤ固有振動数をコントロールすることが必要になる。一般に有限要素モデルは数値シミュレーションにより振動形状を可視化することができるが、振動形状及び固有振動数の解析的理解を与えてくれるわけではなく、現象理解にはこれまでの知見・経験の積み重ねに依るところが大きい。そこで、振動現象の発生メカニズムを明確化するためには、力学モデルを用いた解析的な手法が有効であると考えられる。しかしながら、横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードの全ての振動モードを解析的に同時に考慮する力学モデルは未だ提案されていない。

本章では横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードの全ての振動モードを解析できる力学モデルの構築および固有振動数コントロールするためのタイヤ部材剛性設計の指針を示す。まず、円筒形状のタイヤの力学モデルを構築し、不伸張変形仮定より定義したひずみの関係式から固有関数を定義する。次に円筒シェル理論に基づき運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを導出、Rayleighの方法より固有振動数を導出する。最後に、導出した固有振動数の式から、タイヤ構造部材の剛性の各固有振動数に対する寄与度を算出する。

3.2 タイヤの円筒シェル形状の力学モデル

非接地・非転動時のタイヤ振動についてモデル化を行う。トレッド部を薄肉円筒リング（以下、トレッドリング）で表現したタイヤ振動モデルを用いる。図 3.1 にタイヤ振動モデルを

示す．車軸-ホイール系はタイヤに対し高剛性であることから剛体として取り扱い，トレッドリングとホイールの間はサイドウォール部の弾性を示すばねがトレッド両端で結合されていると考える．また，ビード部はホイールと一体化していると考え．モデルの座標系は横方向を y ，周方向を θ ，半径方向を z とする． $z=0$ をトレッドリング断面の中央面とし， (y, θ, r) 方向に対応するトレッドリング断面の任意点の中央面上の微小変位を (u, v, w) とする．トレッドリングの平均半径を R ，肉厚を b ，幅を $2l$ とする．また，周方向の縦弾性係数を E ，ポアソン比を ν ，密度を ρ ， z 軸に関する断面二次モーメントを I とする．横方向，周方向，半径方向の単位周長あたりのサイドウォール部のばね定数をそれぞれ K_y ， K_θ ， K_r とする．

円筒肉厚がトレッドリング半径に比べ十分に小さいことを考慮して，横方向の歪 ε_y ，周方向の歪 ε_θ ，中央面のせん断歪 $\gamma_{y\theta}$ が 0 であると仮定する．すなわち，タイヤ振動に対して不伸張変形仮定が成り立つという条件である．このとき，中央面内の三つのひずみ成分は次の式を満たす⁽¹⁾．

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} = 0 \quad (3.2)$$

$$\gamma_{y\theta} = \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

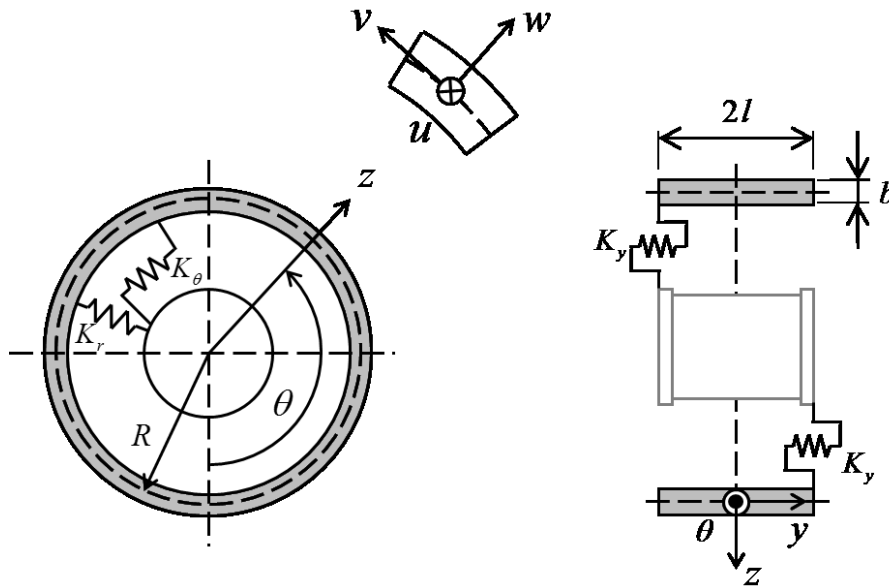


Fig.3.1 Tire vibration model based on the cylindrical shell theory

3.3 力学的エネルギー

横方向, 周方向, 半径方向に対応する速度成分より, 運動エネルギー T は次のようになる.

$$T = \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{2} \rho b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} R dy d\theta \quad (3.4)$$

トレッドリングの曲げによるポテンシャルエネルギー U_1 は次のようになる⁽¹⁾.

$$U_1 = \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{EI}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 R dy d\theta \quad (3.5)$$

トレッドリングの捩りによるポテンシャルエネルギー U_2 は次のようになる⁽¹⁾.

$$U_2 = \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{EI(1-\nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 R dy d\theta \quad (3.6)$$

トレッドリングの張力を S_0 とすると, 張力によるポテンシャルエネルギー U_3 は次のようになる⁽²⁾.

$$U_3 = \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l -\frac{S_0}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) w R dy d\theta \quad (3.7)$$

サイドウォール部のばね定数 K_u , K_θ , K_r によるポテンシャルエネルギー U_4 , U_5 , U_6 はそれぞれ次のようになる.

$$U_4 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_y u_{y=l}^2 R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_y u_{y=-l}^2 R d\theta \quad (3.8)$$

$$U_5 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_\theta v_{y=l}^2 R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_\theta v_{y=-l}^2 R d\theta \quad (3.9)$$

$$U_6 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_r w_{y=l}^2 R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_r w_{y=-l}^2 R d\theta \quad (3.10)$$

3.4 各振動モードにおける固有関数定義

3.4.1 横並進モードと面内捩りモード

横並進モードは $v=0$, $w=0$ とすると, 中央面上の微小変位は A を振動振幅とし, 角振動数を ω とおくと振動形状は次のように表わすことができる.

$$\begin{cases} u = A \sin \omega t \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

このときの振動形状について図 3.2 に示す．図 3.2 における・が振動前の座標であり，○が最大振幅時のモード形状の変位位置を表わす．

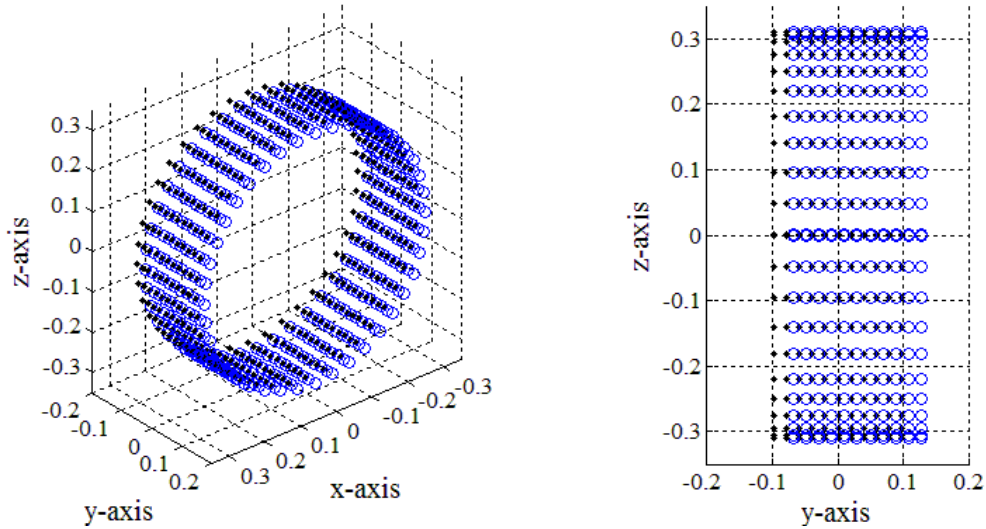


Fig.3.2 Conformation of mode shapes of lateral translational mode

また，面内振りモードは $u = 0$, $w = 0$ とすると同様に次のように表わすことができる．

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = A \sin \omega t \\ w = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

このときの振動形状について図 3.3 に示す．図 3.3 における・が振動前の座標であり，○が最大振幅時のモード形状の変位位置を表わす．

式(3.11)，(3.12)が不伸張変形仮定を満たすことは，式(3.11)，(3.12)を式(3.1)～(3.3)に代入すると容易に証明できる．図 3.2，3.3 より横並進，面内振りモードの振動形状を表現できていることがわかる．

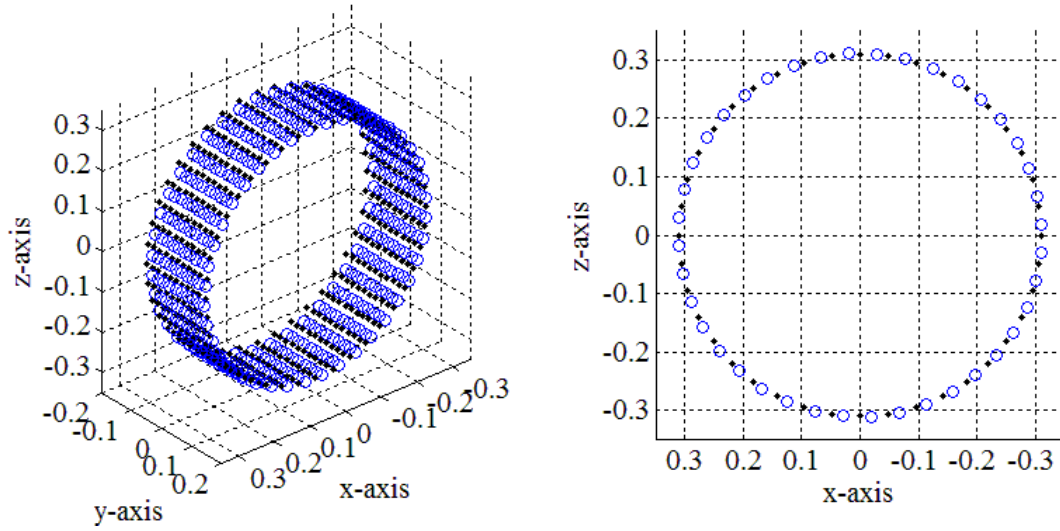


Fig.3.3 Conformation of mode shapes of in-plane torsion mode

3.4.2 径方向モード

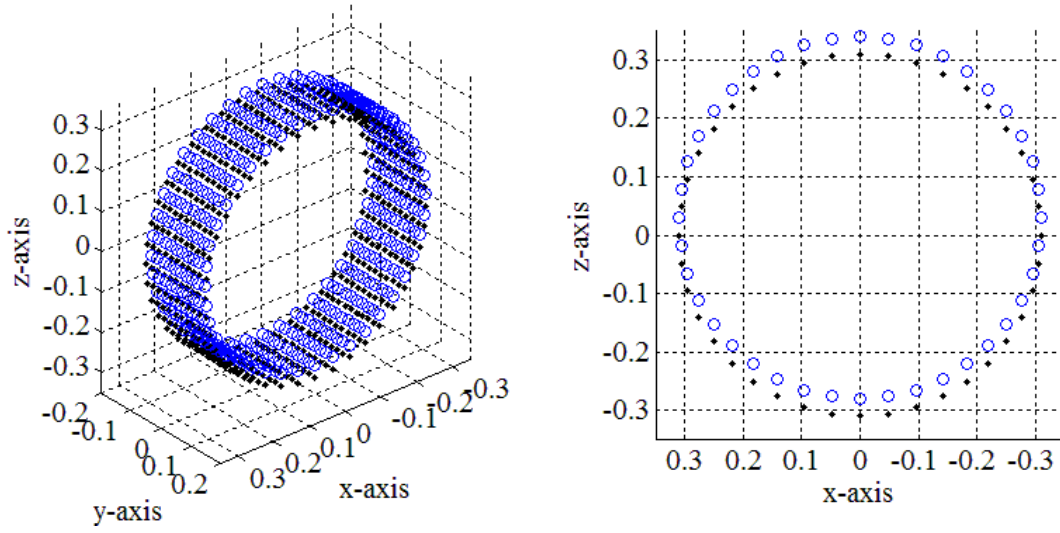
径方向モードは横方向の振動が励起されていないことを考慮して、 $u=0$ とすると、中央面上の微小変位は A を振動振幅とし、角振動数を ω とおくと振動形状は次のように表わすことができる。

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -A \sin n\theta \sin \omega t \\ w = An \cos n\theta \sin \omega t \end{cases} \quad (3.13)$$

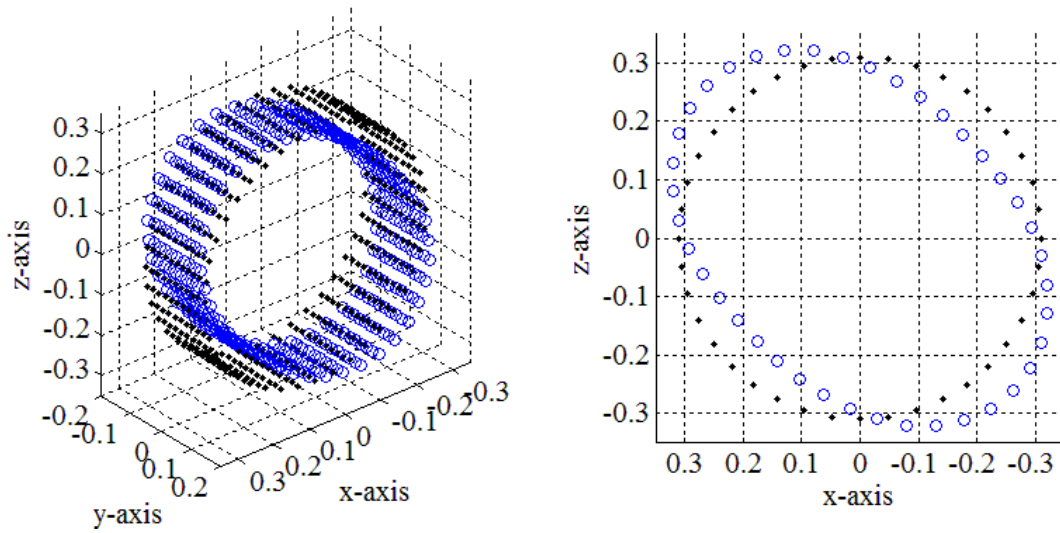
この式が不伸張変形仮定を満たすことは、式(3.13)を式(3.1)～(3.3)に代入すると容易に証明できる。 n は周方向の波数であり、非接地・非転動時の場合においてはモード次数と波数が一致する。このときの振動形状を図 3.4 に示す。図 3.4 における・が振動前の座標であり、○が最大振幅時のモード形状の変位位置を表わす。図 3.4 より径方向モードの振動形状を表現できていることがわかる。

3.4.3 横曲げモード

横曲げモードについては $u \neq 0$ とすると、中央面上の微小変位は A を振動振幅とし、角振動数を ω とおくと振動形状は次のように表わすことができる。



(a) 1st radial mode



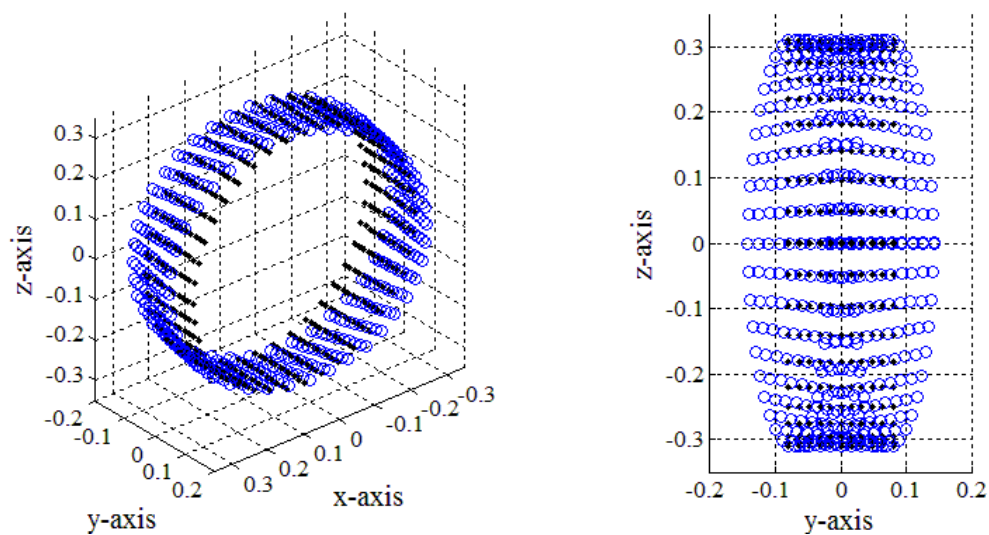
(b) 2nd radial mode

Fig.3.4 Conformation of mode shapes of radial modes

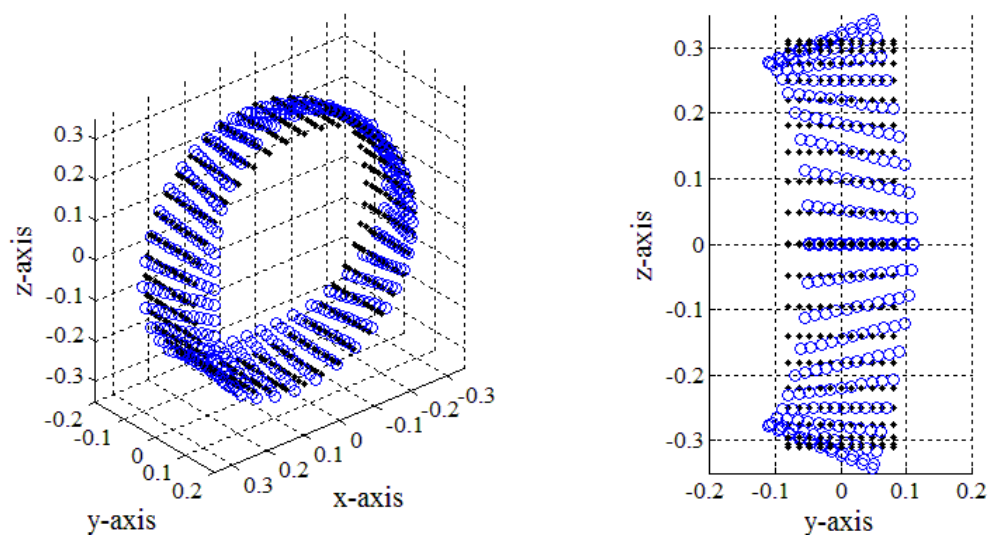
$$\begin{cases} u = \frac{RA}{n} \cos n\theta \sin \omega t \\ v = Ay \sin n\theta \sin \omega t \\ w = -nAy \cos n\theta \sin \omega t \end{cases} \quad (3.14)$$

これらの式が不伸張変形仮定を満たすことは、式(3.14)を式(3.1)～(3.3)に代入すると容易に証明できる． n は周方向の波数であり、非接地・非転動時にはモード次数と波数が一致

する．このときの振動形状を図 3.5 に示す．図 3.5 における・が振動前の座標であり，○が最大振幅時のモード形状の変位位置を表わす．図 3.5 より径方向モードの振動形状を表現できていることがわかる．



(a) 1st lateral bending mode



(b) 2nd lateral bending mode

Fig.3.5 Conformation of mode shapes of radial modes

3.5 Rayleigh の方法による固有振動数の導出

3.5.1 Rayleigh の方法

前節より各固有モードにおいて振動形状を関数表示できたことから，Rayleigh の方法を用いて固有振動数の導出を行う．仮定として，今回扱う振動系は非減衰系であり，力学的エネルギーの保存則が成り立つものとする⁽³⁾．

Rayleigh の方法は振動形状をある撓み曲線に定め，運動エネルギーの最大値とポテンシャルエネルギーの最大値が等しくなることをもとに固有振動数を求める方法である．すなわち，次式が成り立つ．

$$\frac{U_{\max}}{T_{\max}} = 1 \quad (3.15)$$

3.5.2 横並進モードと面内振りモード

横並進モードについて，まず式(3.11)を式(3.4)に代入し，運動エネルギーを導出する．

$$T_{\max} = 2\pi l \rho b A^2 R \omega^2 \sin^2 \omega t \quad (3.16)$$

次に式(3.11)を式(3.5)～(3.10)に代入し，ポテンシャルエネルギーを導出する．

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \\ &= 0 + 0 + 0 + U_4 + 0 + 0 \\ &= 2\pi K_y A^2 R \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (3.17)$$

式(3.16)，(3.17)を式(3.15)に代入すると，横並進モードの固有振動数 f_{tra} は $\omega = 2\pi f$ より次のようになる．

$$f_{tra} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_y}{l \rho b}} \quad (3.18)$$

面内振りモードについて，まず式(3.12)を式(3.4)に代入し，運動エネルギーを導出する．

$$T_{\max} = 2\pi l \rho b A^2 R \omega \sin^2 \omega t \quad (3.19)$$

次に式(3.12)を式(3.5)～(3.10)に代入し，ポテンシャルエネルギーを導出する．

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + U_5 + 0 \\ &= 2\pi K_\theta A^2 R \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (3.20)$$

式(3.19)，(3.20)を式(3.15)に代入すると，面内振りモードの固有振動数 f_{tor} は $\omega = 2\pi f$ より次のよ

うになる.

$$f_{tor} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{l\rho b}} \quad (3.21)$$

3.5.3 径方向モード

まず式(3.13)を式(3.4)に代入し, 運動エネルギーを導出する.

$$T_{\max} = \pi l \rho b A^2 (n^2 + 1) R \omega^2 \sin^2 \omega t \quad (3.22)$$

次に式(3.13)を式(3.5)~(3.10)に代入し, ポテンシャルエネルギーを導出する.

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \\ &= U_1 + 0 + U_3 + 0 + U_5 + U_6 \\ &= \left\{ \pi l \frac{EI}{R^4} A^2 n^2 (n^2 - 1)^2 R + \pi l \frac{S_0}{R^2} A^2 n^2 (n^2 - 1)^2 R + \pi K_\theta A^2 R + \pi K_r A^2 n^2 R \right\} \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (3.23)$$

式(3.22), (3.23)を式(3.15)に代入すると, 径方向モードの固有振動数 $f_{cir,n}$ は $\omega = 2\pi f$ より次のようになる.

$$f_{cir,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho b} \frac{1}{R^4} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} + \frac{S_0}{\rho b} \frac{1}{R^2} \frac{n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \frac{K_\theta}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{K_r}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{n^2}{n^2 + 1}} \quad (3.24)$$

3.5.4 横曲げモード

横曲げモードについて, まず式(3.14)を式(3.4)に代入し, 運動エネルギーを導出する.

$$T_{\max} = \pi l \rho b A^2 \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) R \omega^2 \sin^2 \omega t \quad (3.25)$$

次に式(3.14)を式(3.5)~(3.10)に代入し, ポテンシャルエネルギーを導出する.

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \\ &= \left\{ \frac{\pi l^3}{3} \frac{EI}{R^4} A^2 n^2 (n^2 - 1)^2 R + 2\pi l \frac{EI(1-\nu)}{R^2} A^2 (n^2 + 1)^2 R \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi l^3}{3} \frac{S_0}{R^2} A^2 n^2 (n^2 - 1)^2 R + \pi K_y \frac{R^2 A^2}{n^2} R + \pi l^2 K_\theta A^2 R + \pi l^2 K_r A^2 n^2 R \right\} \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (3.26)$$

式(3.25), (3.26)を式(3.15)に代入すると, 横曲げモードの固有振動数 $f_{ben,n}$ は $\omega = 2\pi f$ より次のようになる.

$$f_{ben,n} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{EI}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)^2}{3R^4} l^2 + \frac{EI}{\rho b} \frac{2(1-\nu)(n^2+1)^2}{R^2} + \frac{S_0}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)}{3R^4} l^2 + \frac{K_y}{\rho b} \frac{R^2}{n^2} \frac{1}{l} + \frac{K_\theta}{\rho b} l + \frac{K_r}{\rho b} n^2 l \right) / \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

3.6 理論検証と考察

3.6.1 解析値と実験値の比較

市販タイヤを用いて実験モード解析を実施した．タイヤサイズは 195/65R15 である．この試験より各種振動モードの固有振動数を把握した．また各固有振動数の解析値を導出するためには未知パラメータを同定する必要がある．未知パラメータは, $EI/\rho b$, $S_0/\rho b$, $K_y/\rho b$, $K_\theta/\rho b$, $K_r/\rho b$ となる．そこで, 径方向モードの固有振動数 $f_{cir,n}$ 及び横並進モードの固有振動数 f_{tra} よりパラメータを同定する．トレッドリングの平均半径 R , 幅 $2l$ はタイヤ形状より概算寸法を与えるものとする．まず, 径方向モードについては $EI/\rho b$, $S_0/\rho b$, $K_\theta/\rho b$, $K_r/\rho b$ の四つの未知パラメータで構成しており, 実験から得た固有振動数を用いて同定することができる．また, 横並進モードの固有振動数の実験値より $K_y/\rho b$ を同定することができる．すなわち, 式(3.24)に関して 4 つの方程式, 式(3.18)について 1 つの方程式が成り立つ．それら 5 つの方程式を連立し, 各未知パラメータの初期値を求める．さらに各固有振動数の実験値と解析値の二乗誤差を目的関数として, その値が最小値になるように最適化を行った．なお, 各パラメータが 0 以上になるようにペナルティ関数として目的関数に条件付けを行った．

同定した結果を用いて算出した面内振りモードと径方向モードの固有振動数と実験値の比較を図 3.6 に示す．次数が 0 のところが面内振りモードであり, 次数 1,2,... が径方向モードの次数に対応する．また, 横並進モードと横曲げモードの固有振動数と実験値の比較を図 3.7 に示す．次数が 0 のところが横並進モードであり, 次数 1,2,... が横曲げモードの次数に対応する．図 3.6, 3.7 より, 導出した解析値は実験値に良好に一致しており, 構築したモデルは振動特性を十分に表現できているといえる．

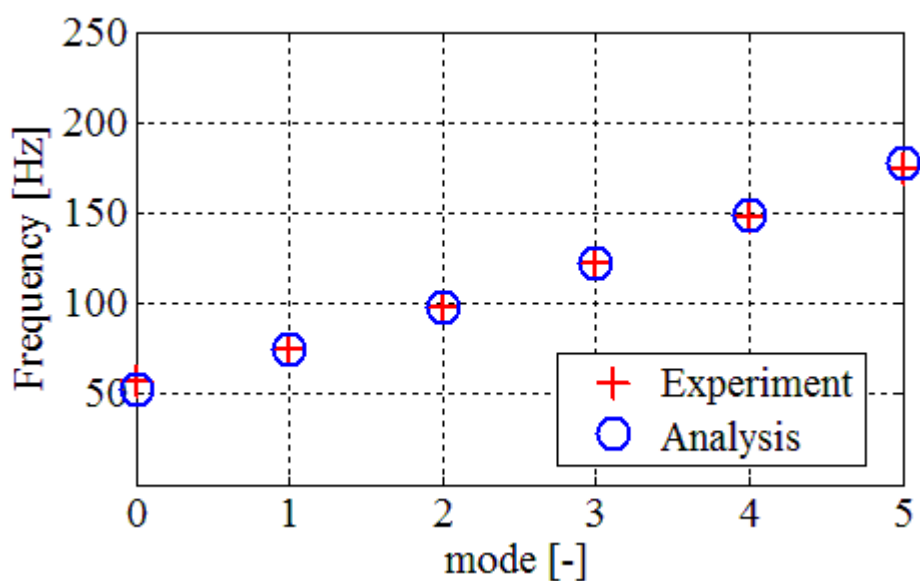


Fig.3.6 Comparison of natural frequencies of in-plane torsion and radial modes

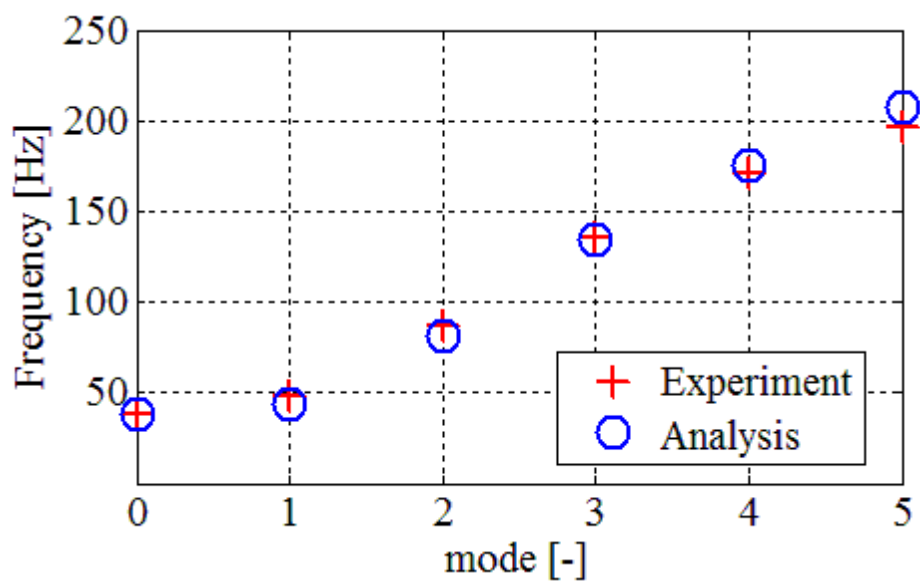


Fig.3.7 Comparison of natural frequencies of Lateral translational and lateral bending mode

3.6.2 タイヤ構造部材の固有振動数に対する寄与度分析

径方向、横曲げモードの固有振動数について、タイヤ構造部材の設計緒元の各固有振動数に対する寄与度を算出する。ここでは、上玉利の方法を用いる⁽²⁾。

径方向モードについて式(3.24)を次のように変形する.

$$(2\mathcal{F}_{cir,n})^2 = \frac{EI}{\rho b} \frac{1}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} + \frac{S_0}{\rho b} \frac{1}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \frac{K_\theta}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{1}{n^2+1} + \frac{K_r}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{n^2}{n^2+1} \quad (3.28)$$

このとき, 右辺の第1項以下をそれぞれ次のようにおく.

$$p_{1,n}(EI) = \frac{EI}{\rho b} \frac{1}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \quad (3.29)$$

$$p_{2,n}(S_0) = \frac{S_0}{\rho b} \frac{1}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} \quad (3.30)$$

$$p_{3,n}(K_\theta) = \frac{K_\theta}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{1}{n^2+1} \quad (3.31)$$

$$p_{4,n}(K_r) = \frac{K_r}{\rho b} \frac{1}{l} \frac{n^2}{n^2+1} \quad (3.32)$$

さらに, 寄与度評価関数を次のように定義する.

$$C_{i,n} = \frac{p_{i,n}}{(2\mathcal{F}_{cir,n})^2} \cdot 100 [\%] \quad (3.33)$$

同様に, 横曲げモードについて式(3.27)を次のように変形する.

$$(2\mathcal{F}_{ben,n})^2 = \left(\frac{EI}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)^2}{3R^4} l^2 + \frac{EI}{\rho b} \frac{2(1-\nu)(n^2+1)}{R^2} + \frac{S_0}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)}{3R^4} l \right. \\ \left. + \frac{K_u}{\rho b} \frac{R^2}{n^2} \frac{1}{l} + \frac{K_\theta}{\rho b} l + \frac{K_r}{\rho b} n^2 l \right) \bigg/ \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.34)$$

このとき, 右辺の各項について次のようにおく.

$$q_{1,n}(EI) = \left(\frac{EI}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)^2}{3R^4} l^2 \right) \bigg/ \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.35)$$

$$q_{2,n}(EI) = \left(\frac{EI}{\rho b} \frac{2(1-\nu)(n^2+1)}{R^2} \right) \bigg/ \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.36)$$

$$q_{3,n}(S_0) = \left(\frac{S_0}{\rho b} \frac{n^2(n^2-1)}{3R^4} l \right) \bigg/ \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.37)$$

$$q_{4,n}(K_u) = \left(\frac{K_u}{\rho b} \frac{R^2}{n^2} \frac{1}{l} \right) \bigg/ \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.38)$$

$$q_{5,n}(K_\theta) = \left(\frac{K_\theta l}{\rho b} \right) / \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.39)$$

$$q_{6,n}(K_r) = \left(\frac{K_r n^2 l}{\rho b} \right) / \left(\frac{R^2}{n^2} + \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} n^2 \right) \quad (3.40)$$

さらに，寄与度評価関数を次のように定義する．

$$C'_{i,n} = \frac{q_{i,n}}{(2\pi f_{ben,n})^2} \cdot 100 [\%] \quad (3.41)$$

それぞれの寄与度関数を図 3.8, 3.9 に示す．図 3.8, 3.9 に示される各色の領域はそれぞれ $p_1 \sim p_4$, $q_1 \sim q_6$ を表わし，■ はトレッド部の曲げ項，■ はトレッド部の振り項，■ はトレッド部の張力項，■ はサイドウォール部の横方向剛性の項，■ はサイドウォール部の周方向剛性の項，■ はサイドウォール部の半径方向剛性の項の寄与度を表わす．

図 3.8, 3.9 より，径方向モード，横曲げモードのどちらにもみられる傾向として，1 次固有振動数はサイドウォール部の剛性のみに依存していることがわかる．径方向モードではサイドウォール部の径方向と周方向剛性の項が寄与し，横曲げモードではサイドウォール部の横方向，径方向，周方向の剛性の項が寄与する．これより，トレッド部に関する項の影響が寄与していないことから，トレッドリングが剛体的に振動している振動モードであることがわかる．また，トレッドリングの曲げ，振り項の影響はモード次数に関係なくほとんど無く，モードの次数が増加すると張力項の影響も大きくなる傾向を示している．トレッド部のベルト材は通常鋼線を撚ったものであり曲げ剛性が引張り剛性に比較して高くないため⁽⁴⁾，曲げ，振り項の影響はなく，張力項の影響が支配的になる．これは 2.3 節のトレッド部の剛性が変化しても振動特性が変化しないことからわかる．これらの結果はタイヤ振動が膜の振動挙動であることを示している．また，径方向モードでは 2 次以降，横曲げモードでは 3 次以降において，張力項とサイドウォール部の半径方向剛性の項の影響が支配的になることがわかる．

以上のように，タイヤ振動は低次のモードにおいてはトレッド部の張力項，サイドウォール部の 3 方向剛性の項に大きく影響を受ける．モード次数が増加するにつれ，張力項の影響が大きくなり，最終的に張力項とサイドウォール部の半径方向剛性の項の影響が支配的になることがわかった．

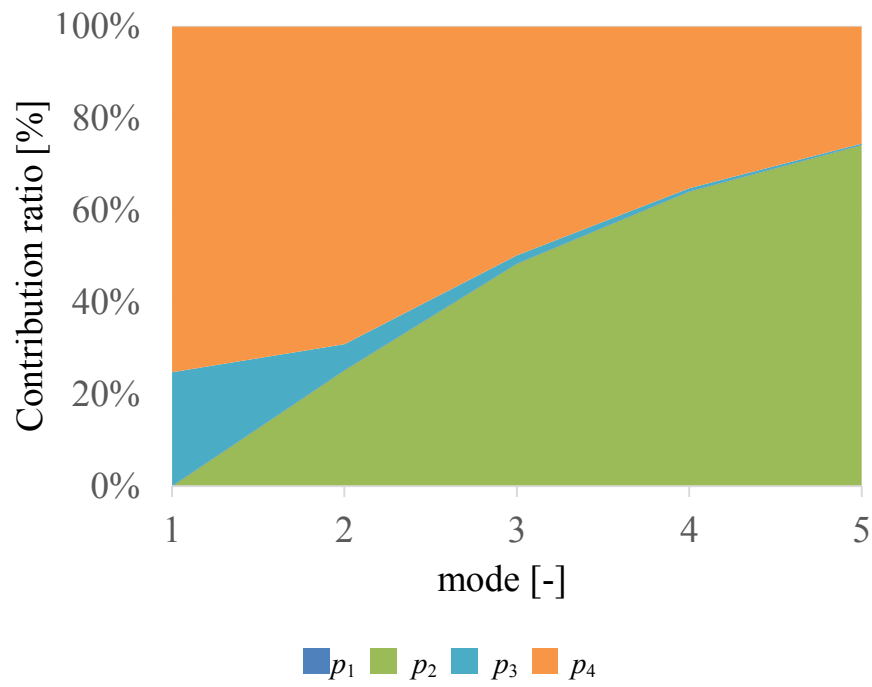


Fig.3.8 Contribution ratio of tire parameter for natural frequency of radial mode

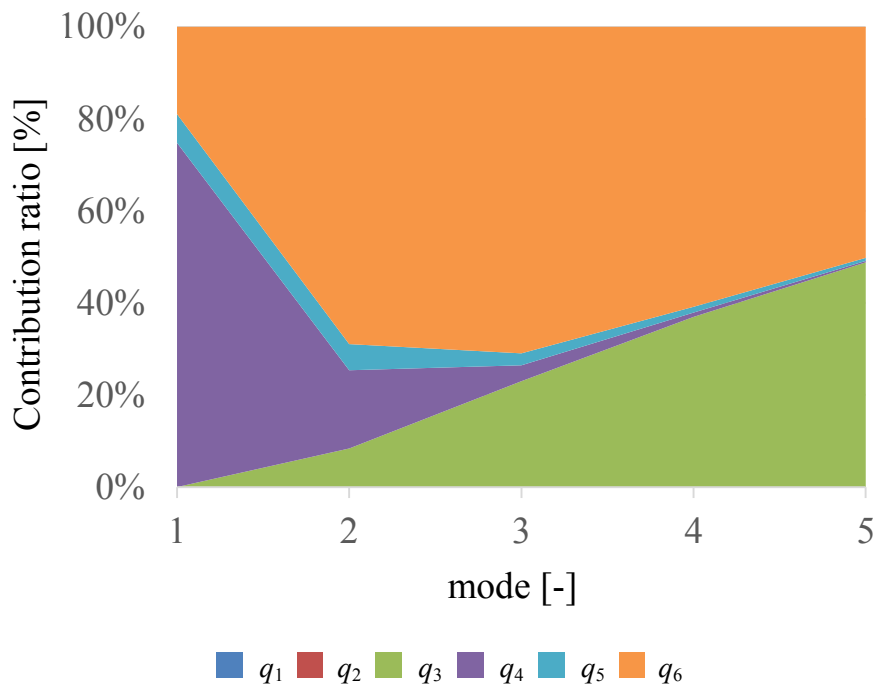


Fig.3.9 Contribution ratio of tire parameter for natural frequency of lateral bending mode

3.7 結言

横並進モード，面内振りモード，径方向モード，横曲げモードについてモデル化を行い，理論解析よりそれらの振動特性を明らかにした．得られた知見は以下の通りである．

1. 円筒シェル理論に基づき，横並進モード，面内振りモード，径方向モード，横曲げモードを評価できるタイヤの力学モデルを構築した．
2. 導出した横並進モード，面内振りモード，径方向モード，横曲げモードの固有振動数の解析値は実験値と良好に一致した．
3. タイヤ構造部材の剛性について，径方向モードと横曲げモードに対する寄与度を算出した．
4. 径方向モードと横曲げモードは曲げ，振りに関する振動の影響は無視できる．さらに径方向モードと横曲げモードの 1 次固有振動数はサイドウォール部のみの影響を受け，トレッドリングは変形しない．2 次以降については張力項の影響が強くなる．このことから，タイヤ振動は膜振動の挙動を示すことがわかる．

参考文献

- (1) S. Timoshenko, S. W Kriger, “板とシェルの理論”, ブレイン図書出版株式会社, pp.473-478, (1980)
- (2) 上玉利 恒夫, “ラジアルタイヤの振動特性 (第 1 報)”, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.851, Paper-No.851031, pp.155-160, (1985)
- (3) 中川憲治, 室津義定, 岩壺卓三, “工業振動学第 2 版”, 森北出版, pp123, (1986)
- (4) 株式会社ブリヂストン, “自動車用タイヤの基礎と実際”, 山海堂, pp10-11, (2006)

第4章 回転効果に着目したタイヤ半径方向振動挙動解析

4.1 緒言

接地・転動時にタイヤ振動特性に与える影響因子の一つである回転効果に着目する。第3章においては、タイヤを円筒シェルとしてモデル化を行った。一般に回転する円筒シェルとしてはタイヤ以外に高出力航空機エンジン、高速遠心分離機などが挙げられる⁽¹⁾。それらは円筒シェル部分の弾性振動や疲労破壊等に着目した回転時の振動特性問題が着目されている。タイヤも同様に転動状態で使用されることから転動時の振動特性把握が必要であるが、特に自動車への振動入力が問題となることから慣性座標系から振動特性を観察することが重要である。

本章では径方向モードに着目し、非転動時と転動時のタイヤ振動特性の差異を明らかにし、回転効果がタイヤ振動特性に与える影響を解明する。径方向モードを対象とするため、幅方向は無視し円環タイヤモデルを用いて、非接地・転動時の振動挙動を解析する。回転効果の一つである遠心力の影響については、初期張力、初期変位としてモデル化し、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーから、Hamiltonの原理より微小振動に関する運動方程式を導出する。実験結果と比較し、導出した理論の妥当性を検証する。最後に回転効果であるコリオリ力と遠心力がタイヤ振動特性に与える影響を解明する。

4.2 サイドウォール部表面振動計測試験

非転動時、転動時におけるタイヤ振動特性を把握するため、サイドウォール部における振動速度を非接触式で計測する。計測には Polytec 社製レーザードップラー振動計を使用し、振動速度を計測し励起した径方向モードを把握する。

4.2.1 試験概要

試験タイヤの外観を図4.1に示す。タイヤサイズ 215/70R16、空気圧 220kPa、ユニフォームティの良いスムーズタイヤを用いた。タイヤをドラム試験機に取り付け、非転動時、転動時における表面振動を計測する。そこで、非接触計測可能なレーザードップラー振動計を使用した。図4.2に試験概略図を示す。転動時においても計測可能なサイドウォール部に計測点を60点設けた。接地面に対して、タイヤ前後方向を x 、横方向を y 、上下方向を z とする。

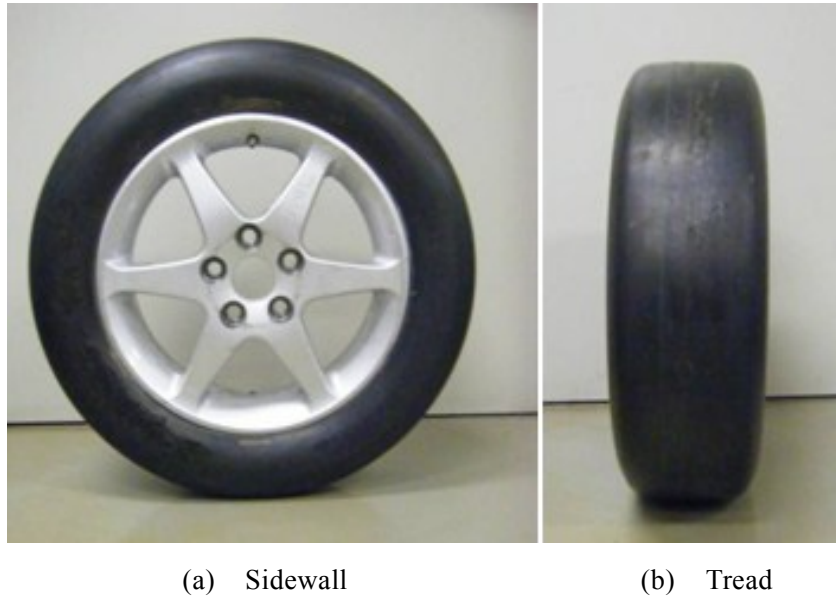


Fig.4.1 Test tire

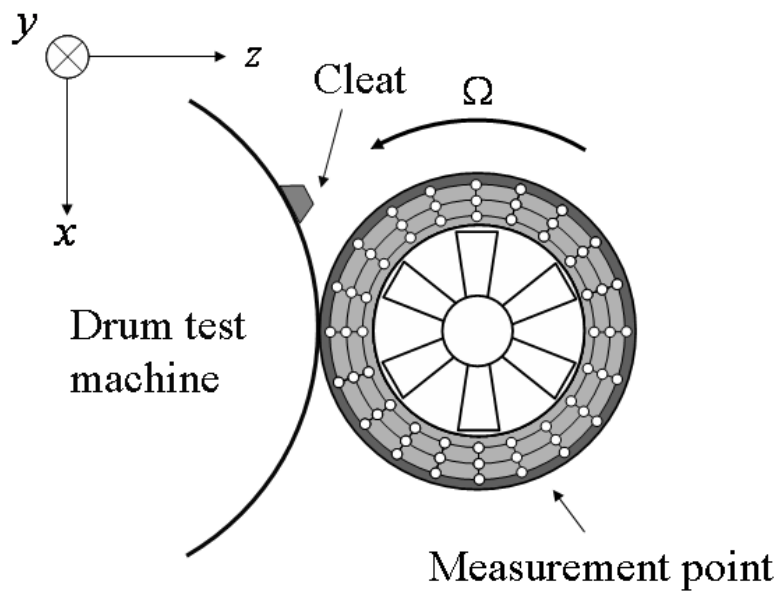


Fig.4.2 Measuring and test schematic for surface vibration

4.2.2 非転動時における振動特性

非接地、非転動時におけるタイヤ振動特性を把握するため、タイヤを車軸に固定した状態で加振試験を実施した。加振機を用いて前後方向にホワイトノイズ加振を行い、各計測点におけるタイヤ表面振動を応答として伝達関数を算出した。固有振動数における振動形状を図 4.3 に示す。タイヤはベルトの高い剛性によって、トレッド部が弾性変形する振動が主に励起される。径方向モードにおいてはサイドウォール部の幅方向振動挙動はトレッド部の周方向及び半径方向振動挙動に連成する⁽²⁾⁽³⁾。図 4.3 より、サイドウォール部の振動計測によって、径方向モードを把握できていることがわかる。1 次モードはトレッド部が剛体的に振動するモードであり、2 次モード以降はトレッド部が弾性変形するモードである。また、把握したモードは定在波として確認した。

4.2.3 転動時における振動特性

転動時におけるタイヤ振動特性を把握する方法として、動的突起乗り越し試験を用いた。本手法は図 4.2 のようにドラム試験機にタイヤを押し付けて転動させ、ドラム表面に取り付けた突起によりタイヤに動的入力を与える方法である。動的突起乗り越し試験は通常、一般車両装着時の車軸荷重でタイヤをドラムに押し付け、大変形した状態で転動さ



1st mode (82 Hz)



2nd mode (102 Hz)



3rd mode (125 Hz)



4th mode (149 Hz)

Fig.4.3 Mode shapes in the unrolling condition

せる．このとき，ゴムの加振振幅依存性によるタイヤ剛性の変化が起こり，車軸荷重に依存してタイヤ 1 次固有振動数が非転動時に比べ著しく低下する⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾．その為，タイヤ振動特性に対する回転効果の影響を明確化するためには非接地・転動状態であることが望ましい．ドラム試験機の構造上，接地せずにタイヤを転動させることができない．そこで，1 次固有振動数の低下を無視できる車軸荷重領域で試験を行った．表 4.1 に車軸荷重が 100 N の場合の非接地・非転動時，接地・非転動時，接地・転動時における 1 次固有振動数を示す．接地・転動時の 1 次固有振動数は動的突起乗り越し試験から得た車軸振動より同定した．接地・非転動時において，接地面の影響により 1 次固有振動数は増加する．しかしながら，転動すると 1 次固有振動数は非接地・非転動時と同じ値を取る．4.4.2 項，4.4.3 項で後述するが車軸振動より同定できる 1 次固有振動数は転動による回転効果の影響を受けない．そのため，接地・非転動時から接地・転動時において固有振動数が低下した原因は回転効果以外であると考えられる．さらに，1 次固有振動数の低下が起こらない車軸荷重の条件下で試験を行っていること，非接地・非転動時と接地・転動時の 1 次固有振動数が一致していることから，本試験の条件である微小接地・転動時においては接地面の影響を無視できるため，固有振動数が低下したと考えられる．そのため，微小接地・転動状態を非接地・転動状態と仮定して良い．

Table.4.1 First natural frequency in the operational condition

Situation	Natural frequency [Hz]
Unload and unrolling	82
Load and unrolling	85
Load and rolling at 10km/h	82
Load and rolling at 15km/h	82
Load and rolling at 30km/h	82

転動時におけるタイヤ振動特性を把握するため、動的突起乗り越し試験を実施した。加振にはドラム試験機に取り付けた $8W[\text{mm}] \times 3H[\text{mm}] \times 16W [\text{mm}]$ の台形断面クリートを用いた。このとき、クリートによる加振は幅方向に一様であるため、励起されるモードは径方向モードのみ仮定した⁽³⁾。またタイヤ加振力に関しては、転動時の入力同定について有効な手段がない為、本研究では突起乗り越し時においてインパルス入力が作用したものとして表面振動応答を評価した。実稼動試験の計測においては転動速度の影響を受けるため、幅方向 y の表面振動を用いて評価する。以下、評価方法について述べる。減衰系の強制振動の場合、構造体の変位応答は共振周波数で位相 90° を経ることがわかっている⁽⁶⁾。そのため、計測点の応答スペクトルの虚部のみの大きさを評価したとき、ピーク周波数が構造体の共振周波数となる。そこで、各計測点における表面振動応答スペクトルの虚部の総和を求め、ピーク周波数における振動形状を評価対象とした。径方向モードは、周方向の波数とモード次数が一致している。そのため、円周上に振動応答を空間フーリエ変換することによって波数を同定し、励起モード次数の判断を行った。明確にモード次数を判断することができたものの中に、移動波を確認した。図 4.4 に移動波の一例を示す。実線の→が転動方向、破線の→が波の進行方向を示している。タイヤの転動は反時計周りであり、タイヤの転動方向を順方向とすると後退波が低周波側、進行波が高周波側に発生し、固有振動数が分離していることが明らかになった。

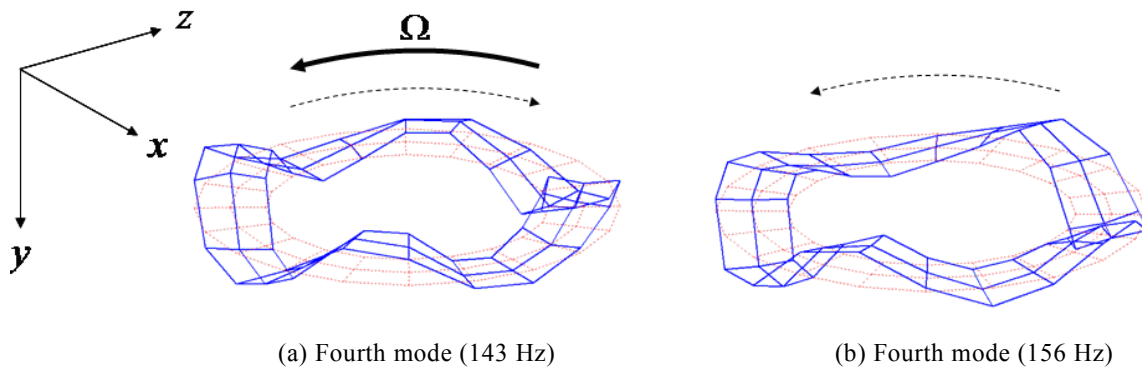


Fig.4.4 Fourth mode shape in the rolling condition(15 km/h)

4.3 タイヤの力学モデル

4.3.1 薄肉円環モデル

非接地・転動時のタイヤ振動についてモデル化を行う．第3章においては円筒シェルとしてモデル化を行ったが，径方向モードのみに着目することから円環モデルを使用する．トレッド部を薄肉円環リング（以下，トレッドリング）で表現したタイヤの力学モデルを用いる．図4.5にタイヤの力学モデルを示す．車軸-ホイール系はタイヤに対し高剛性であることから剛体として取り扱い，トレッドリングとホイールの間はサイドウォール部の弾性を示すばねで結合されていると考える．モデルの座標系は周方向を θ ，半径方向を z とする． $z=0$ をトレッドリング断面の中央面とし， (θ, z) 方向に対応するトレッドリング断面の任意点の中央面上の微小変位を (v, w) とする．トレッドリングの平均半径を R ，断面積を A とする．また，縦弾性係数を E ，密度を ρ ， z 軸に関する断面二次モーメントを I とする．周方向，半径方向の単位周長あたりのサイドウォール部のばね定数をそれぞれ K_θ ， K_r とする．なお，トレッドリングの変形は不伸張変形とみなす．このとき， v と w の関係式として次式が成り立つ⁽⁷⁾⁽⁸⁾．

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} = 0 \quad (4.1)$$

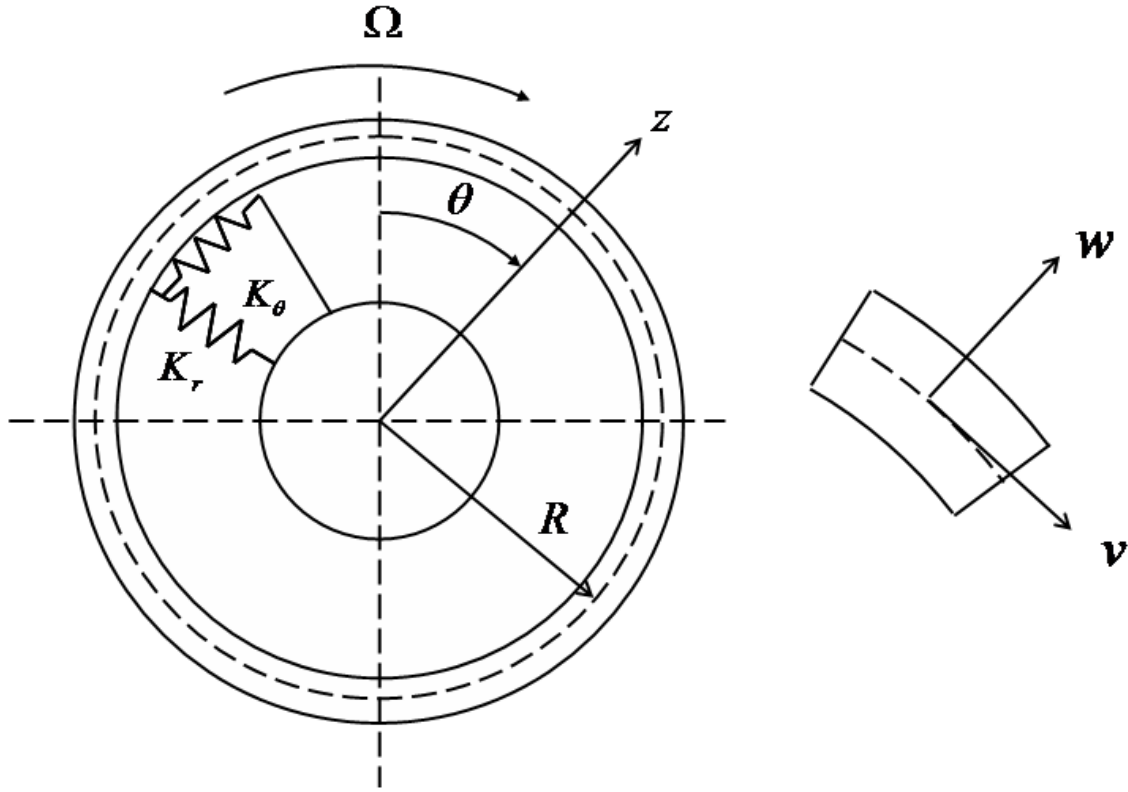


Fig.4.5 Tire model

4.3.2 運動エネルギーと第1変分

周方向，半径方向に対応する速度成分に，遠心力による初期微小変位を考慮した運動エネルギーは次のようになる⁽⁸⁾．ただし， w_0 は初期微小変位とする．

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho A \left[\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \right\}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right)^2 \right] R d\theta \quad (4. 2)$$

運動エネルギーの第1変分を時間に関して1回積分して，

$$\begin{aligned} \int_t \delta T dt &= \int_t \delta \frac{1}{2} \rho b h \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \right\}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right)^2 \right] R d\theta dt \\ &= \int_t \rho b h \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \right\} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \Omega \delta w \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} - \Omega \delta v \right) \right] R d\theta dt \\ &= \int_t \rho b h \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \right\} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right) \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Omega \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega^2 (R + w_0 + w) \right\} \delta w - \left(\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) \delta v \right] R d\theta dt \end{aligned}$$

(4. 3)

ここで、式(4. 3)の第 1 項を部分積分すると、

$$\begin{aligned}
 X_1^{(T)} &= \rho b h \int_t^{2\pi} \left\{ \frac{dv}{dt} + \Omega(R + w_0 + w) \right\} \frac{\partial \delta v}{\partial t} R d\theta dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \rho b h \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \delta v \right]_t R d\theta - \rho b h \int_t^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(R + w_0 + w) \right\} \delta v R d\theta dt
 \end{aligned} \tag{4. 4}$$

境界項での $\delta v(t) = 0$ であることと式(4. 4)より

$$X_1^{(T)} = -\rho b h \int_t^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Omega \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \delta v R d\theta dt \tag{4. 5}$$

同様に、式(4. 3)の第 2 項を部分積分すると、

$$\begin{aligned}
 X_2^{(T)} &= \rho b h \int_t^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right) \frac{\partial \delta w}{\partial t} R d\theta dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \rho b h \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right) \delta w \right]_t R d\theta - \rho b h \int_t^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Omega \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta w R d\theta dt \\
 &= -\rho b h \int_t^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Omega \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta w R d\theta dt
 \end{aligned} \tag{4. 6}$$

よって、式(4. 3)は次のようになる。

$$\int_t \delta T dt = \int_t \rho A \int_0^{2\pi} \left[- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) \delta v - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (R + w_0 + w) \right\} \delta w \right] R d\theta dt \tag{4. 7}$$

4.3.3 ポテンシャルエネルギーと第 1 変分

曲げによるポテンシャルエネルギー U_1 は次式で表される⁽⁸⁾。

$$U_1 = \int_0^{2\pi} \frac{EI}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 R d\theta \tag{4. 8}$$

このポテンシャルエネルギーの第 1 変分を求める。

$$\begin{aligned}
 \delta U_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{EI}{2R^4} 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \delta w \right) R d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w \right\} R d\theta
 \end{aligned} \tag{4. 9}$$

ここで、式(4.9)の第1項を部分積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta X_1^{(U_1)} &= \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} R d\theta \\
&= \left[\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} R \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} R d\theta \\
&= 0 - \left[\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta w \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \delta w R d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \delta w R d\theta
\end{aligned} \tag{4.10}$$

よって、式(4.8)のポテンシャルエネルギーの第1変分は次のように変形できる。

$$\delta U_1 = \int_0^{2\pi} \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w R d\theta \tag{4.11}$$

張力によるポテンシャルエネルギー U_2 は、回転することによりトレッドリングに発生する張力 $S_{rot}^{(9)}$,

$$S_{rot} = \rho A R^2 \Omega^2 \tag{4.12}$$

と内圧により発生する張力 S_{rot} を考慮すると次式のようになる⁽⁷⁾。

$$U_2 = \int_0^{2\pi} -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) w R d\theta \tag{4.13}$$

このポテンシャルエネルギーの第1変分を求める。

$$\begin{aligned}
\delta U_2 &= -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \delta w \right) w + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w \right\} R d\theta \\
&= -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \int_0^{2\pi} \left\{ w \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2w \right) \delta w \right\} R d\theta
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、式(4.13)の第1項を部分積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta X_1^{(U_2)} &= -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \int_0^{2\pi} w \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} R d\theta \\
&= -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \left[w \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right]_0^{2\pi} + \frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} R d\theta \\
&= \frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} \delta w \right]_0^{2\pi} - \frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \delta w R d\theta
\end{aligned} \tag{4.15}$$

よって、式(4.12)のポテンシャルエネルギーの第1変分は次のように変形できる。

$$\delta U_3 = \int_0^{2\pi} -\frac{S_0 + S_{rot}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w R d\theta \quad (4.16)$$

サイドウォール部周方向ばね定数 K_θ 、半径方向ばね定数 K_r によるポテンシャルエネルギーはそれぞれ次のようになる。

$$U_3 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_\theta v^2 R d\theta \quad (4.17)$$

$$U_4 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_r (w + w_0)^2 R d\theta \quad (4.18)$$

また、それぞれの第1変分は次のようになる。

$$\delta U_3 = \int_0^{2\pi} K_\theta v \delta v R d\theta \quad (4.19)$$

$$\delta U_4 = \int_0^{2\pi} K_r (w + w_0) \delta w R d\theta \quad (4.20)$$

よって、全ポテンシャルエネルギーの第1変分を時間に関して1回積分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_t \delta U dt = \int_t \int_0^{2\pi} & \left\{ \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w + K_\theta v \delta v \right. \\ & \left. + K_r (w + w_0) \delta w - \frac{S_0 + S_{rot}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w \right\} R d\theta dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3.4 運動方程式

時刻 t_1 と時刻 t_2 の間の系の運動全体とこの運動の実際の運動からの微小な仮想変位を考察することから Lagrange 方程式を導出することができる。この原理を Hamilton の原理という。系の時刻 t_1 から時刻 t_2 までの運動は次の線積分、

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (L = T - U) \quad (4.22)$$

は実際の運動の道筋に対して停留値となる。線積分の停留値という概念は通常関数の理論における一階導関数が0になるということに対応している。つまり、系に対して次式が成り立つ。

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0 \quad (4.23)$$

基礎方程式の導出においては Hamilton の原理を用いる。

式(4.23)に式(4.7), (4.21)を代入する．ここで等式が成り立つためには δv , δw の係数が0であればよい． δv に関する方程式は次式となる．

$$\rho A \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} + \Omega^2 v \right) - K_\theta v = 0 \quad (4.24)$$

δw に関する方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} \rho A \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega^2 (R + w + w_0) \right\} - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \\ + \frac{S_0 + S_{rot}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) - K_r (w + w_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

よって、式(4.1)より v に関して整理し、式(3.25)を θ に関して偏微分したものから式(4.24)を差し引くと運動方程式は次式のように得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \theta} - \frac{S_0 + S_{rot}}{\rho A R^2} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EI}{\rho A R^4} \left(\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \\ - \frac{1}{\rho A} \left(K_\theta v - K_r \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - v \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

なお、式(4.26)はトレッドリングとともに回転する回転座標系 (θ, z) から見た微小振動変位を表している．

4.3.5 固有振動数と振動モード

連続体のモードにおいて、境界での反射が存在する場合は定在波形の固有関数しか存在しないと考えられるが、円板や円環のような軸対称な連続体の場合、つまり、 θ に関しては境界での反射がなく 2π の周期性を満たせばよい場合には回転波形の固有関数が許容される⁽¹⁰⁾．そこで、式(4.26)の解を移動波として、

$$v = A \sin(n\theta + \omega t) \quad (4.27)$$

とおくと、特性方程式から固有角振動数を求めることができる．ただし、 A は振動変位振幅、 n はモード次数、 ω は角振動数とする．

$\Omega=0$ のとき、固有振動数 f_{static} は次式のように表される．

$$f_{static} = \frac{\omega_{static}}{2\pi} = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho A} \left\{ \frac{EI}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} + \frac{S_0}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \frac{n^2 K_r + K_\theta}{n^2+1} \right\}} \quad (4.28)$$

複合記号 $+$, $-$ はそれぞれ周方向を移動する後退波と進行波に対応する．このとき、振幅、周波数、波長が等しい後退波と進行波が発生するため、それらが重ね合わされモー

ドが現れる．このとき，モード形状は次式で表わされる．

$$\begin{aligned} v_{backward} + v_{foreward} &= A \sin(n\theta + |\omega_{static}|t) + A \sin(n\theta - |\omega_{static}|t) \\ &= 2A \sin n\theta \cdot \cos |\omega_{static}|t \end{aligned} \quad (4.29)$$

式(3.29)はモード形状が $\sin(n\theta)$ ，固有振動数が $|\omega_{static}|$ の単振動を表わす．このことから，非転動時にはモードが定在波として確認される．

$\Omega \neq 0$ のとき，固有振動数 f_{rot} は次式のように表される．

$$f_{rot} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2n}{n^2+1} \Omega \pm \sqrt{\frac{(n^2-1)(n^4+1)}{(n^2+1)^2} \Omega^2 + \omega_{static}^2} \right) \quad (4.30)$$

式(3.30)で示される固有振動数は回転座標系での固有振動数であるため，実験値と比較するためには慣性座標系に変換する必要がある．

慣性座標系において，タイヤ転動速度に応じてトレッドリングを移動する波動に対してドップラー効果が生ずる．回転座標系において移動波の伝播速度 V ，波長 λ について次式が成り立つ．

$$V = |f_{rot}| \lambda = |f_{rot}| \frac{2\pi R}{n} \quad (4.31)$$

ここで，移動波の固有振動数は正負により進行方向を表すがドップラー効果を考慮するため， $|f_{rot}|$ とした．慣性座標系への座標変換をすることで，トレッドリングの転動速度 V' 分の伝播速度変化が生じる．トレッドリングの転動速度 V' は

$$V' = R\Omega \quad (4.32)$$

であるから，ドップラー効果を考慮した固有振動数 $|f'_{rot}|$ の大きさは次式のように変換できる．

$$|f'_{rot}| = \frac{|V| \pm V'}{\lambda} = |f_{rot}| \pm \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (4.33)$$

よって，固有振動数の大きさは次式のようになる．

$$|f'_{rot}| = \frac{1}{2\pi} \left(\pm \frac{-n^3+n}{n^2+1} \Omega + \sqrt{\frac{(n^2-1)(n^4+1)}{(n^2+1)^2} \Omega^2 + \omega_{static}^2} \right) \quad (4.34)$$

複合記号 $+$ ， $-$ はそれぞれ後退波と進行波に対応する．

4.4 理論検証と考察

4.4.1 非転動時の固有振動数

非転動時の固有振動数の理論値は式(4.28)より求まる．ここでは共振周波数を固有振動数と仮定する．未知定数が $EI/\rho A R^4$, $S_0/\rho A R^2$, $K_\theta/\rho A$, $K_r/\rho A$ の4つであることから，実験から得た固有振動数を用いて同定することができる．同定した結果を用いて導出した固有振動数と実験から得た固有振動数の比較を図 4.6 に示す．図 4.6 より，非接地，非転動時の振動特性を推定できていることがわかる．

4.4.2 転動時の固有振動数

式(4.34)より，転動時の固有振動数は非転動時の固有振動数より算出できる．定常転動時における進行波と後退波の実験値と理論値の比較を図 4.7 に示す．+は実験値，○は理論値である．図 4.7 より実験値と理論値が一致していることがわかる．進行波と後退波の1次固有振動数は一致するが，2次以降の固有振動数は進行波と後退波で異なることがわかる．

第2節の動的乗り越し試験結果から，1次モードが定在波として励起されているか検証した．定在波の場合，節の位置が定在することから，節の位置における振動応答は0となる．試験結果は並進成分がある為，節の位置における振動応答和が0とならないが，節の位置における振動応答和は他の位置における振動応答に比べ微小であり，1次モードが定在していることを確認した．ここで1次固有振動数に着目すると，式(4.34)より，1次固有振動数 f_1 は次のようになる．

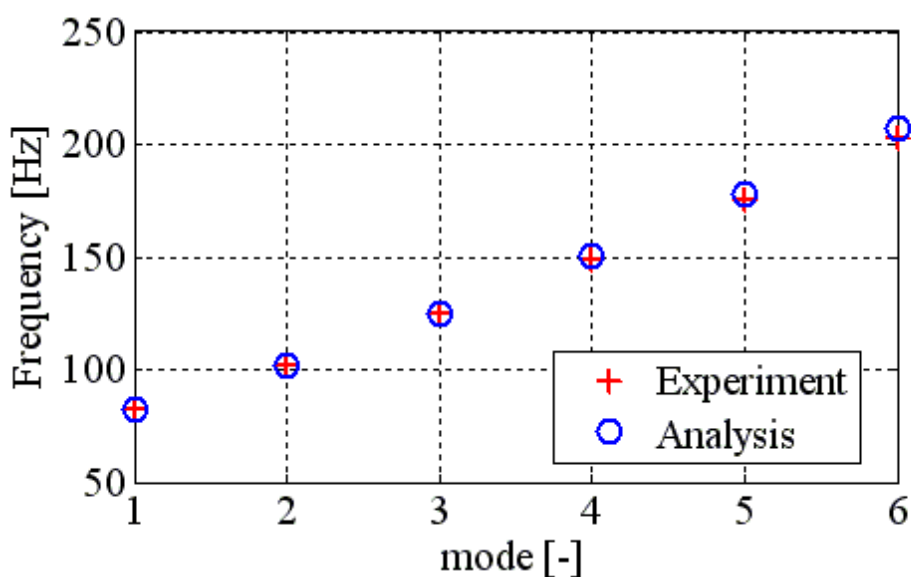


Fig.4.6 Natural frequency in the unrolling condition

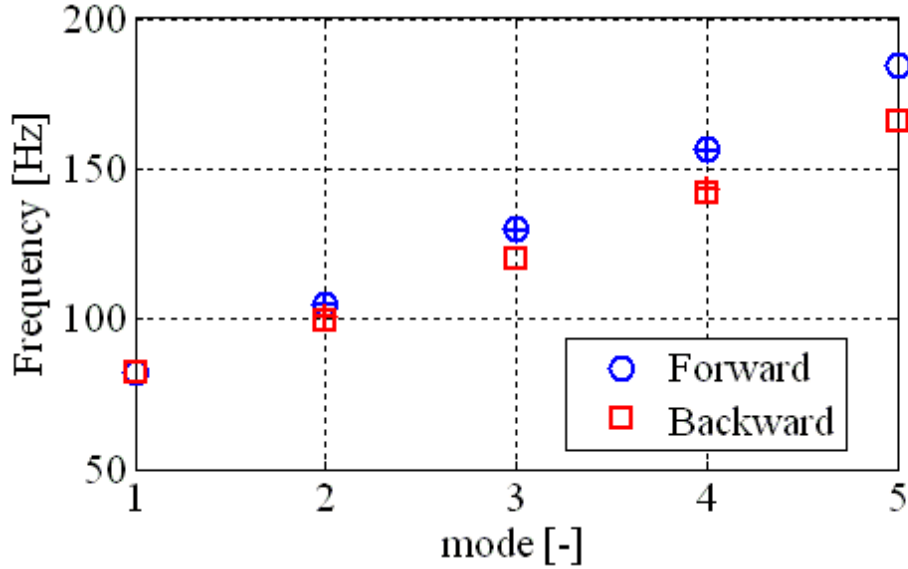


Fig.4.7 Natural frequency in the rolling condition (15 km/h)

$$f_1 = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(K_r + K_\theta)}{2\rho A}} \quad (4.35)$$

式(4.35)より転動時において，周波数，波長が等しい進行波と後退波が発生することがわかる．また，上述のように1次モードが定在波として励起されていることから，進行波と後退波の振幅が等しく励起されていることがわかった．式(4.28)より非転動時の固有振動数と一致していることから，非転動時から転動時において1次モードの振動特性が変化しないことがわかる．

4.4.3 回転効果の影響

振動特性に与えるコリオリ力，ドップラー効果，遠心力の影響を検証する．以下，慣性座標系における固有振動数について考える．図 4.8 に慣性座標系における固有振動数の式(4.34)の変化を示す．実線が進行波を表し，破線が後退波を表す．また，プロットシンボルである+，▽，□はそれぞれ1次，2次，3次の固有振動数を表す．図 4.8 より，1次モードの進行波，後退波は固有周波数が一致し，転動速度に依存せず一定値をとることがわかる．2次以降は転動速度に依存して，進行波と後退波の固有振動数が離れていく．

式(4.26)の第3項がコリオリ項であり，式(4.34)の第1項及び第2項平方根内の第1

項に影響する．なお式(4.34)の第 1 項にはコリオリ力とドップラー効果の影響が含まれ，平方根内の第 1 項にはコリオリ力と遠心力の影響が含まれる．図 4.9, 4.10 にコリオリ力の影響，式(4.26)の第 3 項の有無による固有振動数の変化の比較を示す．図 4.9, 4.10 はそれぞれ 1 次，2 次の固有振動数を表し，プロットシンボルである ∇ ， \circ はそれぞれコリオリ項有り，無しにおける固有振動数を表す．図 4.9, 4.10 より，コリオリ項無しの場合，転動速度が増加するにつれて移動波の固有振動数が過大に離れていくことがわかる．また，1 次固有振動数はコリオリ項とドップラー効果を考慮すると，進行波，後退波は固有振動数が一致し，転動速度に依存せず一定値をとる．

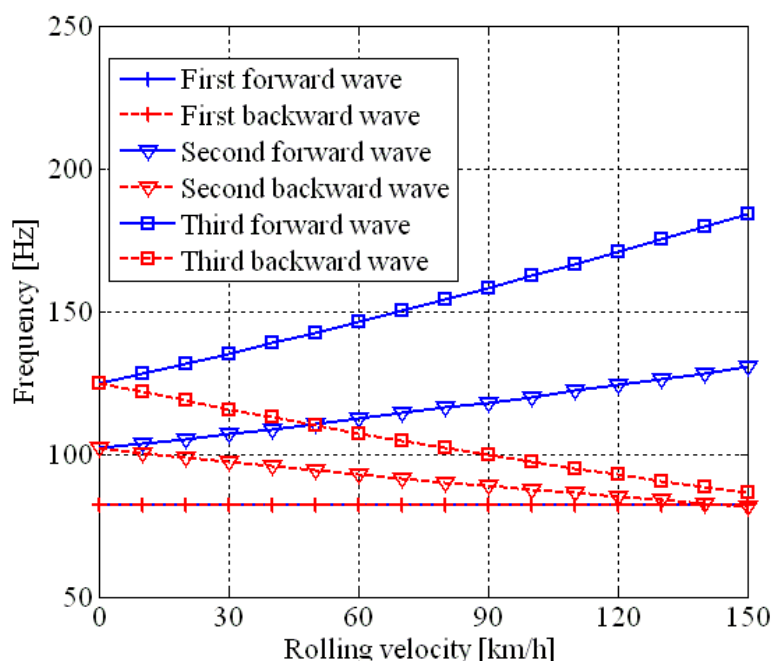


Fig.4.8 Natural frequencies of a rolling tire including the effects of the Coriolis force, the Doppler effect and centrifugal force

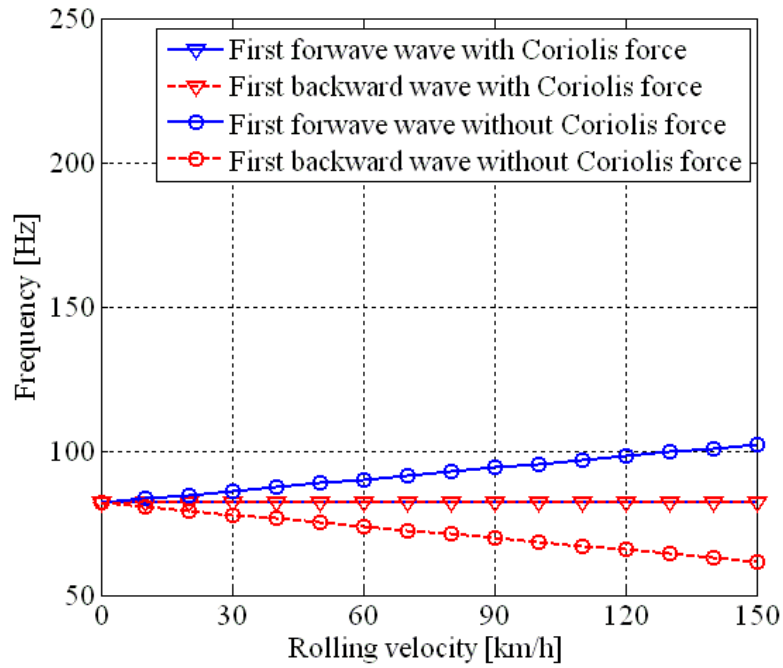


Fig.4.9 Comparison of 1st natural frequencies of a rolling tire at difference including the effects of the Coriolis force

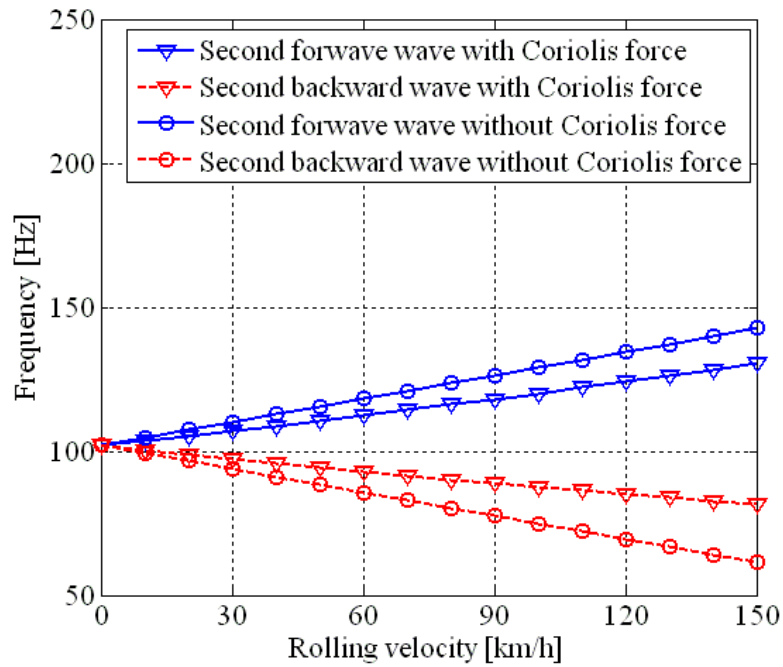


Fig.4.10 Comparison of 2nd natural frequencies of a rolling tire at difference including the effects of the Coriolis force

式(4.26)の s_{rot} を含む第 4 項, 第 7 項は遠心力項であり, 式(4.34)の第 2 項に対応する. そこで, 第 2 項のみで, 遠心力項の有無による固有振動数の変化の比較を行う. 図 4.11 に遠心力の影響の有無による固有振動数の変化の比較を示す. なお, $\Omega=0$ を代入し遠心力項が無い場合とした. 実線が遠心力項有り, 破線が遠心力項無しを表す. また, プロットシンボルである+, ∇ , \square はそれぞれ 1 次, 2 次, 3 次の固有振動数を表す. 図 4.11 より, 1 次固有振動数は遠心力の影響を受けないことがわかる. また, 2 次以降の固有振動数においては, 遠心力の影響により回転速度に依存して固有振動数が増加していることがわかる.

回転円筒シェルの振動問題においては, コリオリ力の作用によって, 二つの移動波が発生することが理論解析により明らかにされている⁽¹¹⁾⁽¹²⁾. これらの研究は高速回転時の弾性振動による疲労破壊問題に着目しているため, 回転座標系において議論されている. タイヤは車両に対して空間に固定された位置で使用・振動騒音評価されるため, タイヤ振動騒音問題は慣性座標系で議論することが重要であると考えられる. そのため, 座標変換時にドップラー効果の考慮が必要となった.

回転円板の振動問題においては, 前回り及び後ろ回りの波動モードについて取り上げられている. 回転円板は, 鉄道車輪や磁気ディスクなどにみられる機械要素の一つであり, タイヤと同様に空間に固定した位置で拘束あるいは外力をうけて振動を起こすため, 慣性座標系での理論解析が行われている⁽¹³⁾. しかしながら, 面外方向の屈曲振動を問題としているため, コリオリ力の影響を考慮する必要がない. 回転円板の振動問題の場合, 移動波の発生はドップラー効果によるものである.

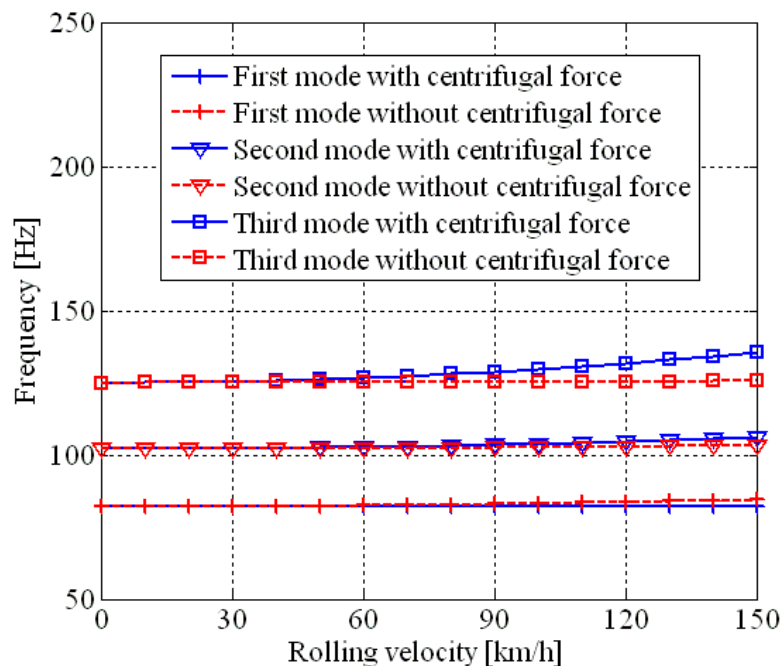


Fig.4.10 Comparison of natural frequencies of a rolling tire at difference including the effects of the centrifugal force

以上から、タイヤは慣性座標系において議論すべきであり、転動時のタイヤ振動特性に回転効果が与える影響としてコリオリ力、遠心力、ドップラー効果の考慮が必要である。コリオリ力とドップラー効果は移動波の励起と固有振動数の分離に影響を与え、遠心力は固有振動数の増加に影響を与えることがわかった。さらに、1次モードについては非転動時と比較してそれらの影響が見かけ上、現れない。

4.5 結言

転動時におけるタイヤ振動特性を実験、解析より解明した。得られた知見は以下の通りである。

1. 転動時のタイヤにおいて、異なる周波数に対して2次以降の同一モードの移動波が発生することを実測により明らかにした
2. 実験値と理論値の比較から、導出した転動時のタイヤ固有振動数の理論値と実験値が定性的に一致する

同様の傾向を示すことを確認した。

3. 慣性座標系から見たモードにおいてコリオリ力とドップラー効果は移動波の励起と固有振動数の分離に影響を与え，遠心力は固有振動数の増加に影響を与えることを解明した。
4. 慣性座標系から見た 1 次モードは遠心力の影響を受けず，コリオリ力とドップラー効果の影響がキャンセレーションすることで見かけ上，回転効果の影響が現れないことが明らかとなった。

参考文献

- (1) 鈴木 勝義, 山田 元, 成田 吉弘, 齋藤 俊, “シェルの振動入門”, コロナ社, (1996), pp.58-62, pp.142-154.
- (2) M. Brinkmeier, U. Nackenhorst, O. V. Estorff, S. Petersen, “Physically based Modelling of Tire Rolling Noise by a Finite Element Approach”, *inter-noise2004*, (2004)
- (3) 佐口 隆成, “タイヤ固有振動数に与える回転の影響について”, 自動車技術会シンポジウムテキスト, Paper-No.9840829, (1998)

- (4) 渡辺 敏幸, 富田 尚隆, 飯田 一嘉, 松永 孜, “大型ラグタイヤの騒音と振動モード”, 自動車技術会論文集, No.33, (1986), pp.86-93.
- (5) 稲葉 憲二, 山田 英史, “タイヤ道路騒音発生メカニズムの解析手法と設備”, 自動車技術, Vol.59, No.7, (2005), pp.108-114.
- (6) 長松 昭男, “モード解析入門”, コロナ社, (1993), pp.50-52.
- (7) 上玉利 恒夫, “ラジアルタイヤの振動特性 (第 1 報)”, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.851, Paper-No.851031, (1985), pp.155-160.
- (8) J. T. Tielking, “Plane vibration Characteristics of a Pneumatic Tire Mode”, *SAE paper*, Paper-No.650492, (1965)
- (9) Y.T. Wei, L. Nasdala, H. Rothert, “Analysis of forced transient response for rotating tire using REF models”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.320, (2009), pp.145-162.
- (10) 本田 善久, 松久 寛, 佐藤 進, “空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.54, No.507, (1988), pp.2610-2617.
- (11) 齋藤 俊, 遠藤 満, “回転円筒かくの振動”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.52, No.474, (1985), pp.2261-2268.
- (12) 齋藤 俊, 遠藤 満, “厚肉回転円筒殻の振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.53, No.494, (1987), pp.2073-2080.
- (13) 鳥居 孝夫, 安田 仁彦, 牧田 真治, “回転円板の非線形強制振動: 回転に同期した外力による共振”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.64, No.627, (1998), pp.4146-4152.

第5章 接地拘束に着目したタイヤ半径方向振動挙動解析

5.1 緒言

接地・転動時にタイヤ振動特性に与える影響因子の一つである接地拘束に着目する。回転円板形状物である、歯車、鉄道車輪、タービン翼車、磁気ディスク等などでは、タイヤと同様に空間に固定した位置において外力または拘束を受ける。そのため、回転中に作用する外力または拘束のモデル化が重要である。しかしながら、タイヤにおいては転動時の振動特性把握のみならず、接地・非転動時の振動特性も重要である。一例として自動車走行シミュレーション時のタイヤモデルについて述べる。自動車の操縦安定性、コーナリング性能等を機構解析ソフト等で予測・評価する場合、タイヤもモデル化されるが、2次元剛体または弾性リングモデルが使用される。そのとき、サイドウォール部の3方向剛性により決まるタイヤの基本剛性について、接地・非転動条件において力-変位関係、トルク-振り角関係から実験同定する⁽¹⁾。このことは接地時における1次固有振動数に寄与する剛性が重要であることを示している。タイヤの接地・転動解析に関してはS. C. Huang, Y. T. Weiらがレセプタンス法を用いた拘束系のモデル化を行っている。しかしながら、これらの研究においては接地拘束の影響による振動特性の変化について、十分に議論されていない。また、酒井がモード形状に着目した解析を行っているが、接地拘束によるモード形状変化と固有振動数の変化の関係性、非接地時と接地時のモード形状の関係性について明確化していない。

本章では径方向モードに着目し、非接地時と接地時のタイヤ振動特性の差異を明らかにし、接地拘束が振動特性に与える影響を解明する。まず、加振試験により、タイヤ振動挙動を把握する。実験モード解析から接地によるモード形状変化について解明する。次に、シェル理論に基づくタイヤ振動モデルを構築し、接地・非転動時における振動挙動を解明する。解析方法にはモード形状を定義する方法と非接地時の自由振動解の重ね合わせとして解くレセプタンス法を用いた。解析結果と実験結果と比較し、導出した理論の妥当性を検証する。最後に接地時のモード形状と非接地時のモード形状の関係性を示す。

5.2 実験モード解析

非接地時、接地時におけるタイヤの振動特性を把握するため、非転動状態において実

験モード解析を実施した。試験タイヤはタイヤサイズ 195/65R15, 空気圧 230 kPa のラジアルタイヤを用いた。ホイール中心部は全 6 自由度固定とする支持条件とした。接地状態はホイール中心部に 4200N の鉛直荷重を加え、路面に対してタイヤを押し付けるものとした。試験概略図を図 5.1 に示す。タイヤ上部のトレッドセンター部を z 方向にハンマリングし、加速度ピックアップによって半径方向の駆動点応答を計測した。駆動点アクセラランス（以下、周波数応答関数）を算出し、固有振動数を把握した。また、トレッド中央部周方向 12 等分の位置にタイヤ半径方向振動の応答点を設け、実験モード解析を実施することで各固有振動数におけるモード形状の把握を行った。接地面に対して、タイヤ前後方向を x , 幅方向を y , 上下方向を z とした。

非接地、接地状態における算出した周波数応答関数を図 5.2 に示す。50-200Hz の間で共振峰を持ち、接地することで共振峰を示す周波数が大きくなることがわかる。共振峰における周波数を固有振動数と仮定し、接地、非接地状態における固有振動数の比較を図 5.3 に示す。この結果より、接地にすることにより固有振動数が増加すること、さらにモード次数が増加するにつれて増加幅も大きくなることがわかる。

実験モード解析より把握した非接地、接地状態におけるモード形状をそれぞれ図 5.4, 5.5 に示す。接地時において接地部に対応する振動応答点（↑で示す）については、振動が発生しないものとしてプロットした。ラジアル構造のタイヤはトレッド部周方向にベルトと呼ばれる部材がある為、半径方向振動が顕著に現れる径方向モードが励起される。非接地時においては周方向波数とモード次数が一致しているが、接地時においてはそれが成り立たないことがわかる。接地時における周方向角度を横軸に、半径方向振動応答を縦軸にとったグラフを図 5.6 に、そのグラフに対してフーリエ級数展開を行った結果を図 5.7 に示す。図 5.7 より、1 次モードでは波数が 1.5 になり、2 次モードでは波数が 2.5 になるというように、接地することで各次数のモードにおいて周方向波数が 0.5 ずつ増加していることがわかる。

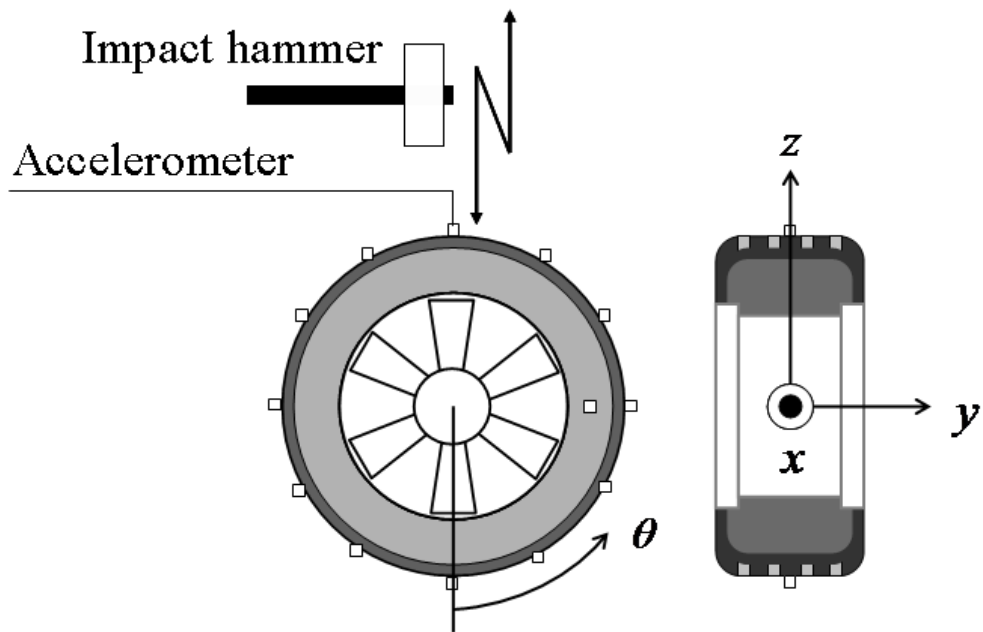


Fig.5.1 Measuring and test schematic

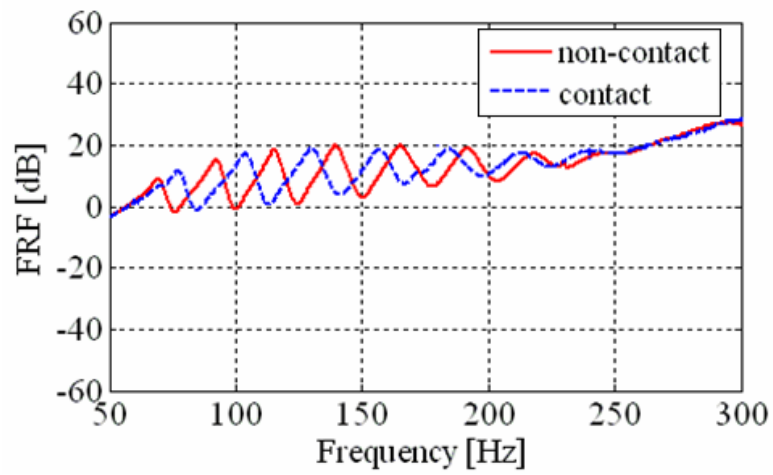


Fig.5.2 Comparison of frequency response function between on the non-contact and contact condition

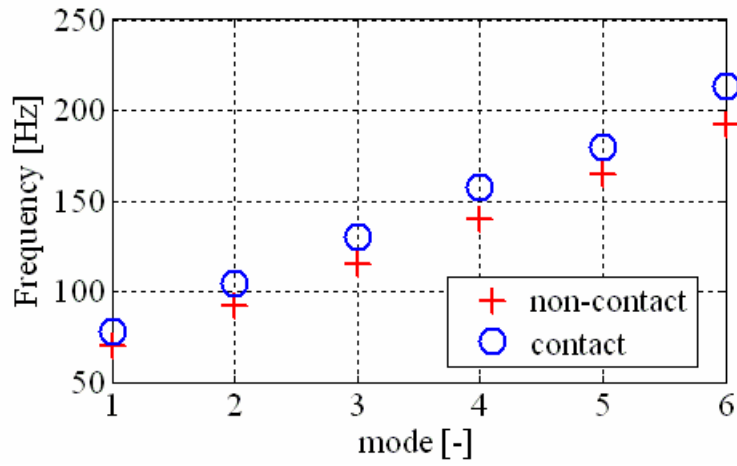


Fig.5.3 Comparison of natural frequency between on the non-contact and contact condition

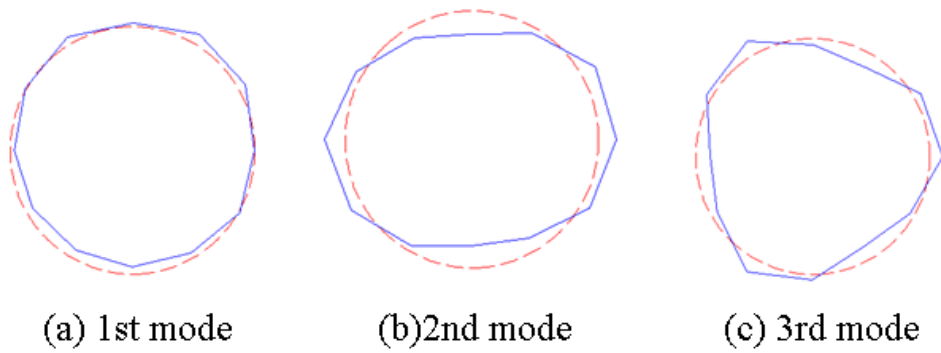


Fig.5.4 Mode shapes on the non-contact condition based on experiment

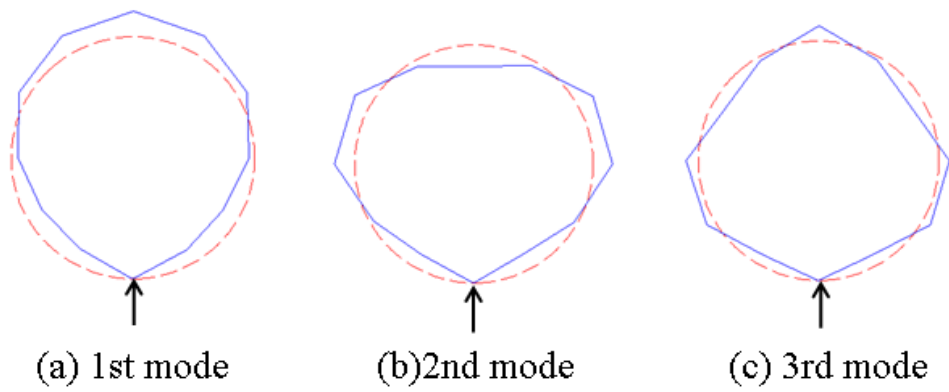


Fig.5.5 Mode shapes on the contact condition based on experiment

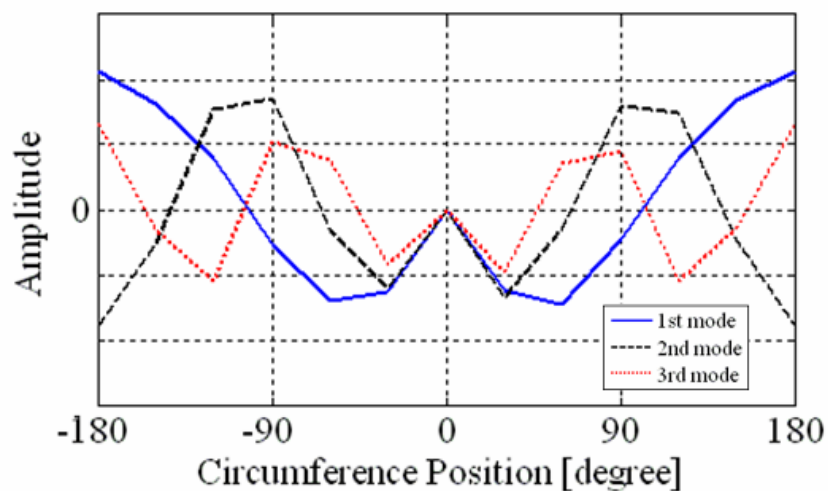


Fig.5.6 Radial vibration at the tread on the contact condition

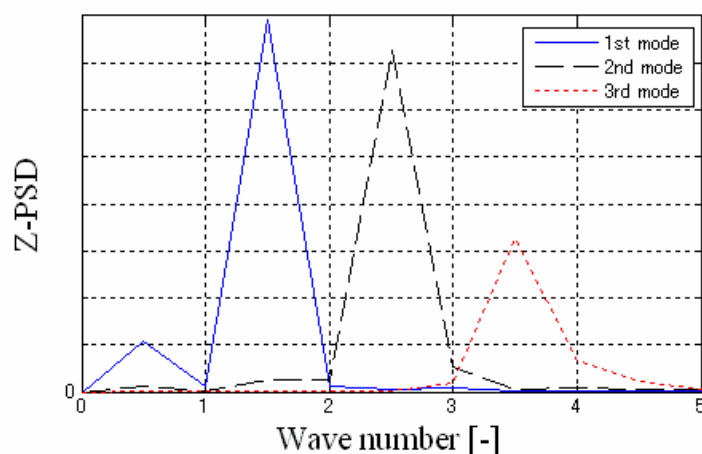


Fig.5.7 Circumferential wave number by fourier space transform

5.3 タイヤの力学モデル

5.3.1 薄肉円筒モデル

第 4 章で使用した同じものを使用する．ただし， θ の取り方が変更している．再度モデルについて記述する．

トレッド部を薄肉円環（以下，トレッドリング）で表現したタイヤ振動モデルを用いる．図 5.8 にタイヤ振動モデルを示す．車軸-ホイール系はタイヤに対し高剛性であることから剛体として取り扱い，トレッドリングとホイールの間はサイドウォール部の弾性を示すばねで結合されていると考える．モデルの座標系は周方向を θ ，半径方向を z とす

る. $z=0$ をトレッドリング断面の中央面とし, (θ, z) 方向に対応するトレッドリング断面の任意点の中央面上の微小変位を (v, w) とする. トレッドリングの平均半径を R , 断面積を A とする. また, 縦弾性係数を E , 密度を ρ , z 軸に関する断面二次モーメントを I とする. 周方向, 半径方向の単位周長あたりのサイドウォール部のばね定数をそれぞれ K_θ , K_r とする. なお, トレッドリングの変形は不伸張変形とみなす. このとき, v と w の関係式として次式が成り立つ⁽²⁾⁽³⁾.

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} = 0 \quad (5.1)$$

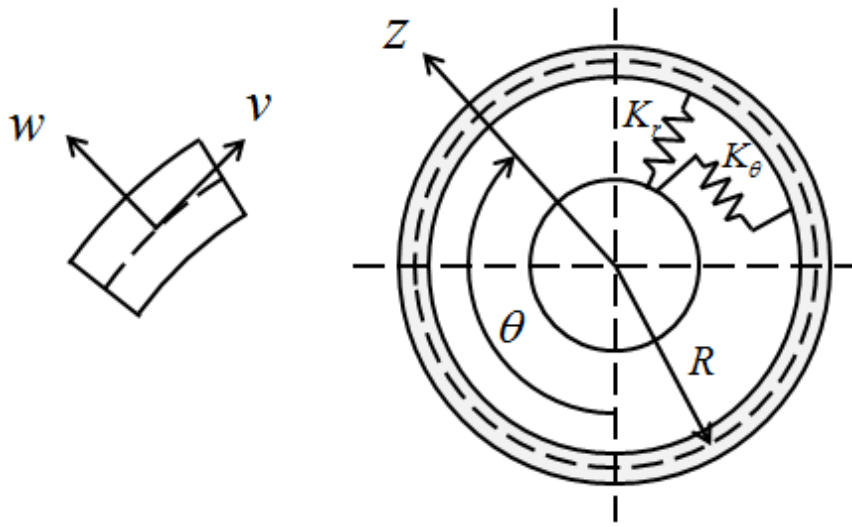


Fig.5.8 Tire model

5.3.2 運動方程式

周方向, 半径方向に対応する運動エネルギーは次のようになる.

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho A \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta \quad (5.2)$$

曲げによるポテンシャルエネルギー U_1 , 張力によるポテンシャルエネルギー U_2 , サイドウォール部周方向ばね定数 K_θ , 半径方向ばね定数 K_r によるポテンシャルエネルギー U_3 , U_4 はそれぞれ次のようになる. ここで, 内圧により発生する張力を S_0 とする.

$$U_1 = \int_0^{2\pi} \frac{EI}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 R d\theta \quad (5.3)$$

$$U_2 = \int_0^{2\pi} -\frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) w R d\theta \quad (5.4)$$

$$U_3 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_\theta v^2 R d\theta \quad (5.5)$$

$$U_4 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} K_r w^2 R d\theta \quad (5.6)$$

Hamilton の原理より，微小振動に関する基礎方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{S_o}{\rho A R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EI}{\rho A R^4} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ - \frac{1}{\rho A} \left(K_\theta w - K_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.3.3 パラメータ同定

非接地・非転動時のタイヤ固有振動数を用いて未知パラメータの同定を行う．非接地・非転動時において励起されるモードは定在波となる．そこで，運動方程式の解すなわち固有関数を次のようにおく．

$$w = V \sin(n\theta) \cos(\omega t) \quad (5.8)$$

ただし， V は振動変位振幅， n は円周方向波数， ω は角振動数とする．式(4.8)は，モード形状が $\sin(n\theta)$ ，固有振動数が ω の単振動を表す．式(5.8)を式(5.7)に代入し，特性方程式より固有振動数を求めることができる．固有振動数は次式で表わすことができる．

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\rho A} \left\{ \frac{EI}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} + \frac{S_o}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \frac{n^2 K_r + K_\theta}{n^2+1} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

非接地時におけるモード次数と円周方向波数が対応することから，振動試験の固有振動数を用いてパラメータを同定することができる．同定した結果を基に算出した固有振動数と試験結果の比較を図 5.9 に示す．また対応する主なモード形状を図 5.10 に示す．図 5.4 及び図 5.9，5.10 の比較より，非接地・非転動時の振動特性を表現できていることがわかる．

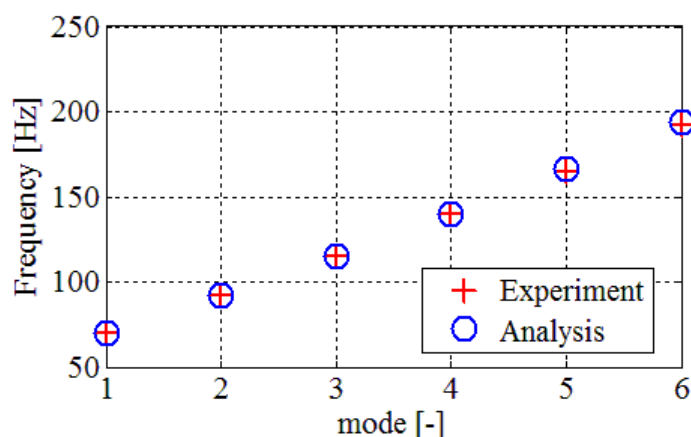


Fig.5.9 Comparison of natural frequency on the non-contact condition

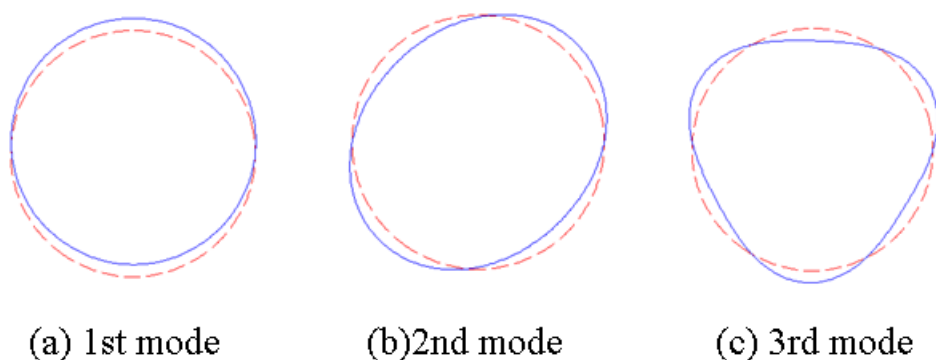


Fig.5.10 Conformation of mode shapes on the non-contact condition

5.4 接地拘束時のタイヤ振動挙動解析

5.4.1 周方向波数に着目した固有関数定義による解析

タイヤは接地することで、接地部分は半径方向振動変位が拘束されると考えられる。非接地時にはモード形状に関する境界条件はないが、接地時には $\theta=0, 2\pi$ の点において半径方向振動は拘束される。そこで、 $\theta=0, 2\pi$ において振動が励起されない、すなわち、モードの節となるように固有関数を仮定する。 w に着目し、式(5.10)のように固有関数を定義した。

$$w = -V \sin(n\theta) \cos(\omega t) \quad (5.10)$$

式(5.10)を式(5.7)に代入し、特性方程式より固有振動数を求めることができる。固有振動数は次式となる。

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\rho A} \left\{ \frac{EI}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} + \frac{S_o}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \frac{n^2 K_r + K_\theta}{n^2+1} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

ここで、式(5.11)は式(5.9)と同様であることがわかる．前節 2 より，振動モードは接地することで，モード次数が 1, 2, 3,...に対して周方向波数が 1.5, 2.5, 3.5,...となることがわかった．固有関数における n は周方向波数を表わしていることから，接地時の各モード次数に対して対応する波数を n に代入する． $n=1.5, 2.5, 3.5$ を代入することで接地時の固有振動数を予測した．実験値との比較を図 5.11 に示す．また，式(5.10)からモード形状を図 5.12 に示す．図 5.5 および図 5.11, 5.12 の比較より，接地・非転動時の振動特性を表現できていることがわかる．ここで図 5.6 を見ると接地部付近の腹のピーク値は，接地部反対側付近の腹のピーク値に対して小さい．また，式(5.1)と式(5.10)より， v の固有関数は \cos 関数のモード形状になる． $n=1.5, 2.5, 3.5, \dots$ のとき $\theta=0, 2\pi$ において v は連続とならない．その為，実際には式(5.10)はモード形状を正確に表現できる関数ではない．しかしながら，次節の固有振動数，モード形状の実験結果と解析結果の比較から，振動特性の差異を評価するには十分な近似であると考ええる．この方法により，波数を定義することで非接地・非転動時の固有振動数の式から接地・非転動時の固有振動数を簡易評価できることが明らかとなった．

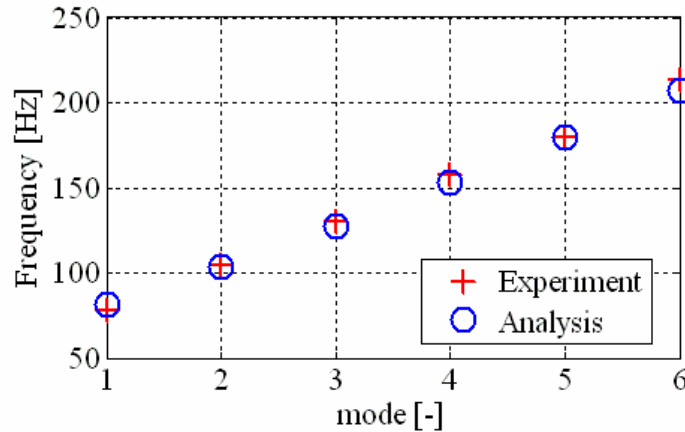


Fig.5.11 Comparison of natural frequency on the contact condition

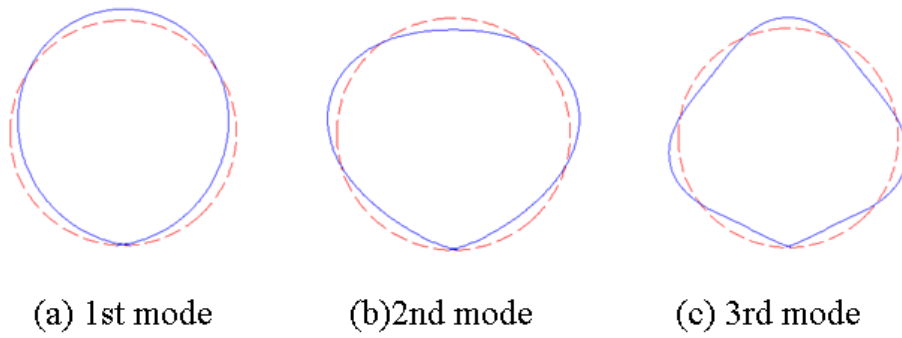
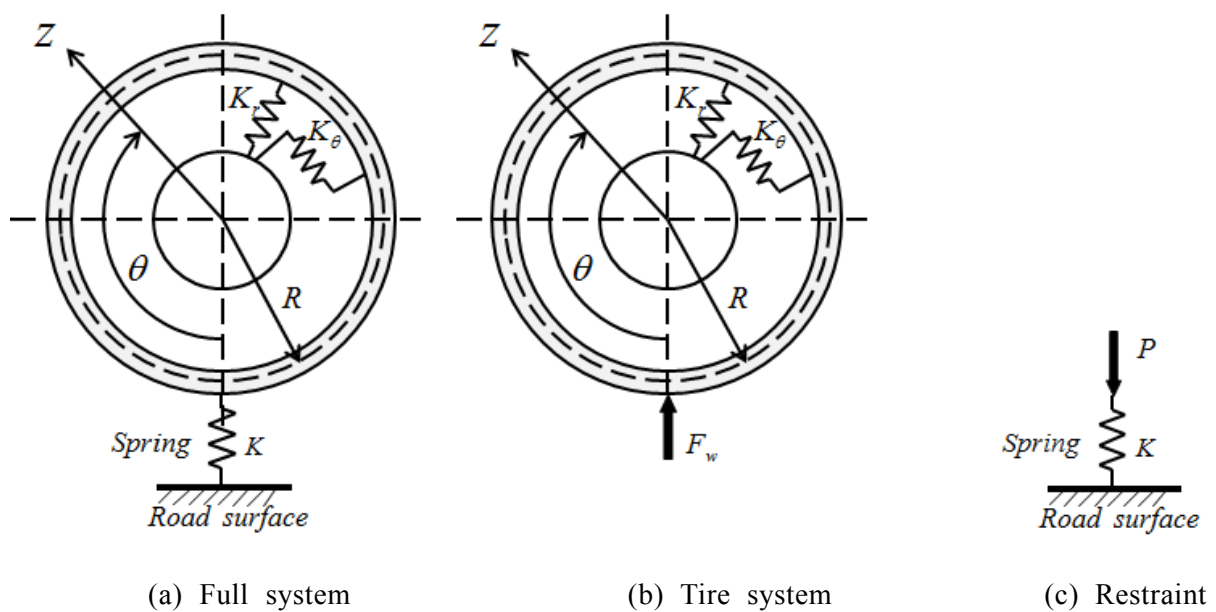


Fig.5.12 Conformation of mode shapes on the contact condition

5.4.2 レセプタンス法を用いた解析

一般的に、回転円板や回転歯車などの機械要素は空間に固定された一点で拘束を受けており、それらの振動問題を取り扱う際には拘束系の特性も考慮に入れなければならない。タイヤも同様に、実稼動時において路面からの拘束を受けて回転しているため、拘束系の特性を考慮する必要がある。レセプタンス法によりタイヤなどの振動系と路面である拘束系との接続点におけるつり合いから連成系の振動数方程式を導出することができる。本モデルにおけるレセプタンス法の概略図を図 5.13 に示す。図 5.13(a)はタイヤと拘束系を合わせた連成系を表し、図 5.13(b)はタイヤと拘束系から作用する外力、図 5.13(c)は拘束系とタイヤから作用する外力をそれぞれ示している。路面からタイヤへの拘束力の大きさを F_w 、タイヤから路面への拘束力の大きさを P 、路面のばね剛性を K とする。



system

Fig.5.13 Receptance method outline

外力項のエネルギー W は半径方向変位 w を用いて次式のようになる.

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{F_w}{R} w R d\theta \quad (5.12)$$

ここで, Hamilton の原理,

$$\delta \int_t (U - T - W) dt = 0 \quad (5.13)$$

より, 各エネルギーの第 1 変分から外力が作用する場合の運動方程式を導出することができる. 運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{S_o}{\rho A R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EI}{\rho A R^4} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ - \frac{1}{\rho A} \left(K_\theta w - K_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

式(5.14)の解を自由振動の重ね合わせで定義する.

$$w(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n(t) \cos(n\theta) + \beta_n(t) \sin(n\theta) \} \quad (5.15)$$

式(5.15)を運動方程式(5.14)に代入し, $\cos(n\theta)$ との内積を考える. このとき, 三角関数の直交性を利用すると次のようになる.

$$\ddot{\alpha}_n + Y_n \alpha_n = - \frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \cos(n\theta) d\theta \quad (5.16)$$

ただし,

$$Y_n = \frac{S_o}{\rho A R^2} \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \frac{EI}{\rho A R^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} + \frac{1}{\rho A} \frac{K_\theta + n^2 K_r}{n^2 + 1} \quad (5.17)$$

同様に $\sin(n\theta)$ との内積を考えると, 次式のようになる.

$$\ddot{\beta}_n + Y_n \beta_n = - \frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \sin(n\theta) d\theta \quad (5.18)$$

式(5.16), (5.18)より, 以下に示す α_n, β_n に関する微分方程式が得られる⁽⁴⁾.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \cos(n\theta) d\theta \\ -\frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \sin(n\theta) d\theta \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

路面からの拘束力 F_w が座標上の 1 点 θ_0 で作用する場合、振幅を F とするとディラックのデルタ関数を用いて次のように表せる。

$$F_w = -F \cos \omega t \cdot \delta(\theta - \theta_0) \quad (5.20)$$

式(5.20)を式(5.19)に代入すると、外力項は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \{ \cos(\omega t - n\theta_0) + \cos(\omega t + n\theta_0) \} \\ \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \{ \sin(\omega t - n\theta_0) - \sin(\omega t + n\theta_0) \} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

なお、未知パラメータについては、5.3.3 項のデータを用いた。

ここで、 α_n, β_n を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} \alpha_n &= a_n \cos(\omega t - n\theta_0) + b_n \cos(\omega t + n\theta_0) \\ \beta_n &= -a_n \sin(\omega t - n\theta_0) + b_n \sin(\omega t + n\theta_0) \end{aligned} \quad (5.22)$$

式(5.22)を t で微分し、式(5.21)に代入すると

$$\begin{aligned} -a_n \omega^2 \cos p - b_n \omega^2 \cos q + X(a_n \omega \cos p - b_n \omega \cos q) \\ + Y_n(a_n \cos p + b_n \cos q) &= -F(\cos p + \cos q) \\ a_n \omega^2 \sin p - b_n \omega^2 \sin q - X(a_n \omega \sin p + b_n \omega \sin q) \\ + Y_n(-a_n \sin p + b_n \sin q) &= F(\sin p - \sin q) \end{aligned} \quad (5.23)$$

ただし、

$$p = \omega t - n\theta_0, \quad q = \omega t + n\theta_0 \quad (5.24)$$

式(5.23)を α_n, β_n について解くと、

$$a_n = b_n = \frac{-n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \quad (5.25)$$

よって、 α_n, β_n は式(5.22)、式(5.24)より、

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{-n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t - n\theta_0) + \frac{-n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t + n\theta_0) \\ \beta_n &= -\frac{-n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \sin(\omega t - n\theta_0) + \frac{-n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \sin(\omega t + n\theta_0)\end{aligned}\quad (5.26)$$

式(5.15)に代入すると、半径方向の定常応答が次式で得られる。

$$w(\theta, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t + n(\theta - \theta_0)) + \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t - n(\theta - \theta_0)) \right] \quad (5.27)$$

三角関数の加法定理より、次のように式変形できる。

$$w(\theta, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (5.28)$$

さらに、円周方向変位 v は式(5.1)の不伸張変形の仮定より次式で表される。

$$v(\theta, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \cos(\omega t) \sin n(\theta - \theta_0) \quad (5.29)$$

タイヤが路面から受ける拘束力の大きさを F とすると、拘束点での半径方向変位の振幅 W_0 は次式で表せる。

$$W_0 = F_w \gamma_0 \quad (5.30)$$

γ_0 は拘束点におけるタイヤのレセプタンスを表す。式(4.28)より、タイヤのレセプタンスは次式で与えられる。

$$\gamma_0 = \frac{w(\theta_0, t)}{-F \cos(\omega t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R (Y_n - \omega^2)} \quad (5.31)$$

一方、路面である拘束系については、タイヤから受ける力の振幅を P 、タイヤとの拘束点における変位の振幅を W_R とし、レセプタンスを γ_R とすると次の関係が成立する。

$$W_R = P \gamma_R \quad (5.32)$$

拘束点における接続条件は、振動系および拘束系の変位の一致および作用反作用の関係から次のように表せる。

$$W_0 = W_R, \quad F_w + P = 0 \quad (5.33)$$

以上より、

$$(\gamma_0 + \gamma_R)F = 0 \quad (5.34)$$

拘束力が作用する場合、 $F \neq 0$ となるので、

$$\gamma_0 + \gamma_R = 0 \quad (5.35)$$

式(4.35)が拘束力の作用する場合の連成系の振動数方程式となる．ここで，拘束系がばねであると考えと，拘束系のレセプタンス γ_R は，

$$\gamma_R = K^{-1} \quad (5.36)$$

となる⁽⁵⁾．路面の場合，タイヤに対して剛性が十分高いため， $K=\infty$ と考えることができる．つまり，拘束系のレセプタンスは $\gamma_R=0$ となる．式(5.35)について角振動数 ω を振動数 f に変換し，次のようなる．

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1) \{Y_n - (2\pi f)^2\}} = 0 \quad (5.37)$$

上式が本モデルの振動数方程式である．ここで， γ はタイヤと拘束系のレセプタンスの和とし，全系のレセプタンスと定義する．全系のレセプタンス γ を図示したときのグラフと x 軸との交点が接地・非転動時の固有振動数となる． Σ の中を次のようにおく．

$$\gamma_n = \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1) \{Y_n - (2\pi f)^2\}} = \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{1}{\{Y_n - (2\pi f)^2\}} \quad (5.38)$$

式をグラフ化したものを図 5.14 に示す．また，式は漸近線を有するため図に併記した．漸近線は次のように導出をおこなった．まず，漸近線を一次関数で次のように表わす．

$$\gamma_n = c_1 f + c_2 \quad (5.39)$$

$$f_n = c_3 \gamma + c_4 \quad (5.40)$$

式(5.38)について $f=f_n$ とおき，次のように式変形する．

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1) \gamma}} \quad (5.41)$$

よって，式(5.39)，(5.40)について未知定数 c_1, c_2, c_3, c_4 は次式により求めることができる．

$$c_1 = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{f} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1) \{Y_n - (2\pi f)^2\} f} \approx 0 \quad (5.42)$$

$$c_2 = \lim_{f \rightarrow \infty} (\gamma_n - c_1 f) = \lim_{f \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1) \{Y_n - (2\pi f)^2\}} \right\} \approx 0 \quad (5.43)$$

$$c_3 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left\{ Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)\gamma} \right\} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2} \approx 0 \quad (5.44)$$

$$c_4 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (f_n - c_3 \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left\{ Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)\gamma} \right\}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{Y_n} \quad (5.45)$$

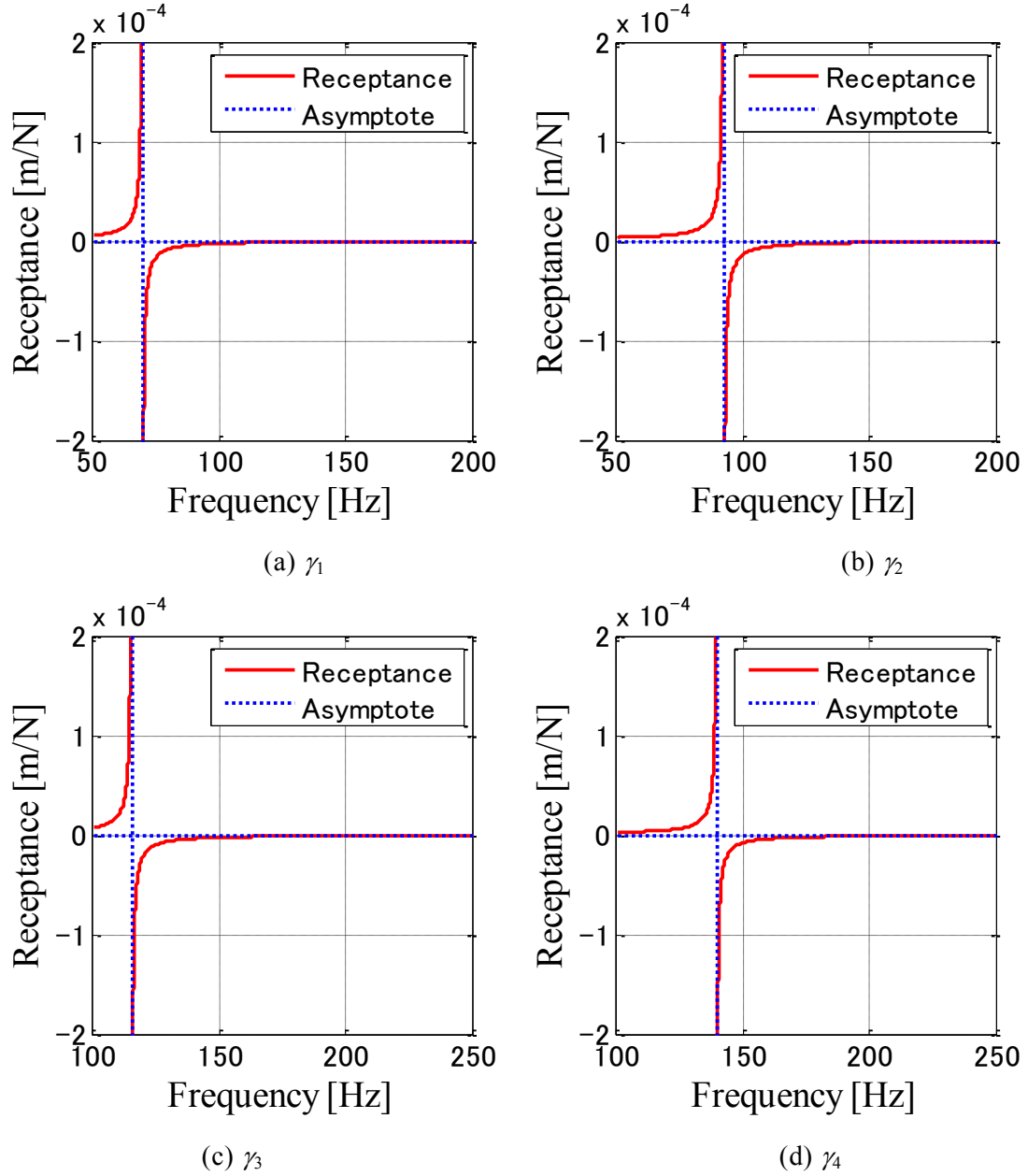


Fig.5.14 Receptance γ_n as against 'n' number

よって、各 n に対するレセプタンスは漸近線を有しており、次式となる。

$$\gamma_n = 0 \quad (5.46)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{Y_n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho A} \left\{ \frac{EI}{R^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} + \frac{S_0}{R^2} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \frac{n^2 K_r + K_\theta}{n^2+1} \right\}} \quad (5.47)$$

式(5.47)より，は非接地・非転動時の固有振動数の式(5.9)と同一であることがわかる．すなわち，各 n に対するレセプタンスは非接地・非転動時の n 次モードに関連付けることがわかる．そこで γ_n を非接地・非転動時の n 次モードのレセプタンスと定義する．図 5.14 より 1 つのレセプタンスでは x 軸との交点を持たない為，解が存在しない．図 4.15 に $n=1\sim7$ における式を図示する．また，各 1~3 次モードのレセプタンスも併記する． x 軸との交点を○または●で併記した．図 5.15 より x 軸との交点は 6 つとなる．図 5.15 より，各 n 次モードのレセプタンスが重ね合わさることで， x 軸との交点を有することがわかる．この x 軸との交点における値が接地・非転動時の固有振動数を表わす．交点を有する曲線は近傍前後のモードのレセプタンスの影響を強く受け，交点から離れた位置にあるモードのレセプタンスの影響は小さくなる．また，採用する非接地・非転動時のモード次数により同定される接地・非転動時の固有振動数は変化する．図 5.16 に採用モード次数を変化した場合の接地・非転動時の固有振動数の変化を示す．この結果より，レセプタンス法において採用モード範囲は予測精度に大きく影響を与えることがわかった．

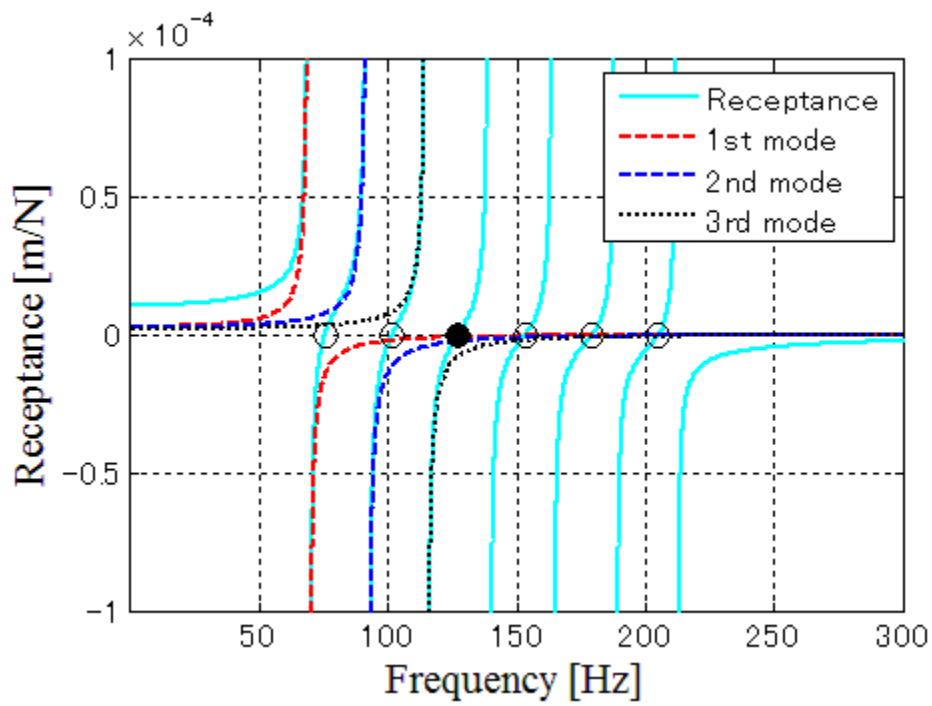


Fig.5.15 Summation of receptance γ_n as against 1 to 7 number

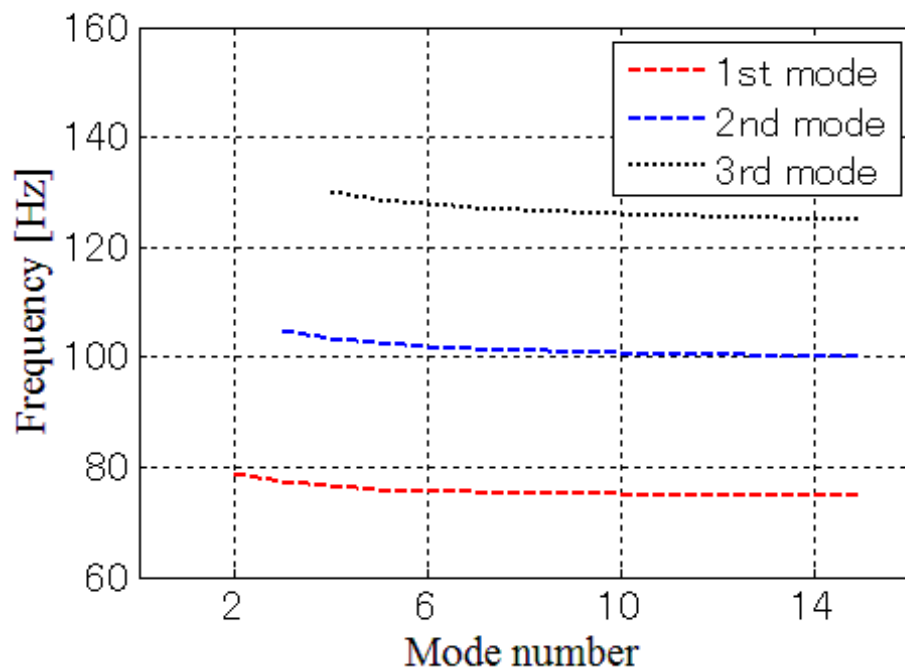


Fig.5.16 Natural frequency as against difference of summation mode number

5.5 レセプタンス法における採用モード数と予測精度

レセプタンス法により機械系と拘束系を含む全系の固有振動数を求める解析は本田ら、S. C. Huang 等により行われてきたが、タイヤのように比較的低周波において減衰が大きい場合減衰が全系の固有振動数に与える影響の考察は行われていない。そこでレセプタンス法における採用モード数による全系の固有振動数に与える影響について検証する。

各接地・非転動時の固有振動数に対する非接地・非転動時のモードの影響の仕方について図 5.15 を基に考える。●で表わされた 3 つ目の x 軸との交点に着目すると、3 次の x 軸より下側のレセプタンスと 4 次の x 軸より上側のレセプタンスの影響を強くうけ、5 次以降のレセプタンスについては x 軸より上側に影響を与える。逆に 2 次以下のレセプタンスは x 軸より下側に影響を与える。すなわち、接地・非転動時のある固有振動数に対して非接地・非転動時の高次モードは固有振動数を低くするような影響を与え、低次モードは固有振動数を高くするような影響を与えることを意味する。ここで、図 5.2 に着目すると、周波数応答関数は非接地時について明瞭なピークが 7 次まで、接地時には 6 次まで確認することができる。それ以降の高次については減衰が大きいため明確なピークを持たないことがわかる。モードは自由振動における振動形状であり、減衰が大きいことはモードそのものが励起されにくいことを示す。上述のように接地・非転動時のモードは近傍前後の非接地・非転動時のモードにより主に評価されることを考えると、非接地・非転動時において 8 次モードが卓越していないことが接地・非転動時の 7 次モードが励起されていない主因であると考えられる。以上のことを考慮して各種予測手法について比較検証を行う。

Method 1: 本研究における固有関数定義による予測, f_n^{a1}

Method 2: レセプタンス法による予測（交点近傍 2 つのモードを採用の場合), f_n^{a2}

Method 3: レセプタンス法による予測（1~7 次までの励起モードを採用した場合), f_n^{a3}

Method 4: レセプタンス法による予測（1~14 次までの高次モードを採用した場合), f_n^{a4}

ここで、 n 次の固有振動数に対する評価関数 $Error_n$ を次のように相対誤差として定義する。

$$Error_n = \frac{\sqrt{(f_n^{\text{exp}} - f_n^a)^2}}{f_n^{\text{exp}}} \times 100 \quad (5.48)$$

ここで、 f_n^{exp} は接地・非転動時における n 次の固有振動数の実験値、 f_n^a は各種予測手法における n 次の固有振動数の解析値となる。なお、 $a = a1 \sim a4$ を示す。各種解析手法に

による固有振動数の解析値を表 1, 評価関数の比較を図 5.17 に示す. この結果より, Method3 が最も精度が良い. すなわち, 接地・非転動時の固有振動数予測においては非接地・非転動時において卓越したピークをもつモードを採用し, 近似する方法の予測精度が高いといえる. また, Method1 と Method2 を比較するとほぼ同じ精度と考えることができる. 固有関数定義による Method1 はレセプタンス法における近傍 2 つのモード次数を採用する Method2 と同等であると考えることができ, 簡易評価では解析準備に要する時間の点で Method1 の方が優位である. Method4 については低次の固有振動数に対する予測精度が悪化する傾向にある. 本研究においては非減衰系を仮定して固有振動数を導出しているため, 採用モード範囲によって決められたモードは全て励起されていることになり, その影響度は式(5.38)の係数部により一意的決定される. しかしながら実験から同定した周波数応答関数は実際には減衰系であり高次モードは減衰の影響により励起されていないと考えられる. その為, 励起されていない高次のモードも採用する Method4 は結果として, 固有振動数の予測精度が悪化した. また全ての解析手法について高次になると予測精度が悪化する傾向があるが, これは接地拘束が本来, 面で拘束されていることを点で再現しているためと考えられる. 表 5.1 を確認すると全てに 2 次固有振動数以降の解析値は実験値に対して小さい値をとっている. 面拘束されることで, 拘束されている面は振動が励起されないことになり, 見かけ上の振動伝達部分である周長が小さくなる. これは励起されるモードの波長が短くなることを意味し, 固有振動数が増加することになる. その為, 本手法においては点拘束を想定していることから解析値が小さい傾向を示した.

Table.5.1 Comparison of natural frequencies between experiment and analysis

	Experiment [Hz]	Analysis [Hz]			
		method 1	method 2	method 3	method 4
1 st mode	77.5	81.1	79.0	75.5	74.8
2 nd mode	104.0	103.5	103.7	101.6	100.4
3 rd mode	130.3	127.2	127.7	127.2	125.3
4 th mode	157.3	151.8	152.2	153.3	150.6
5 th mode	184.8	176.5	176.8	179.4	175.8
6 th mode	213.0	200.7	200.9	205.2	200.3

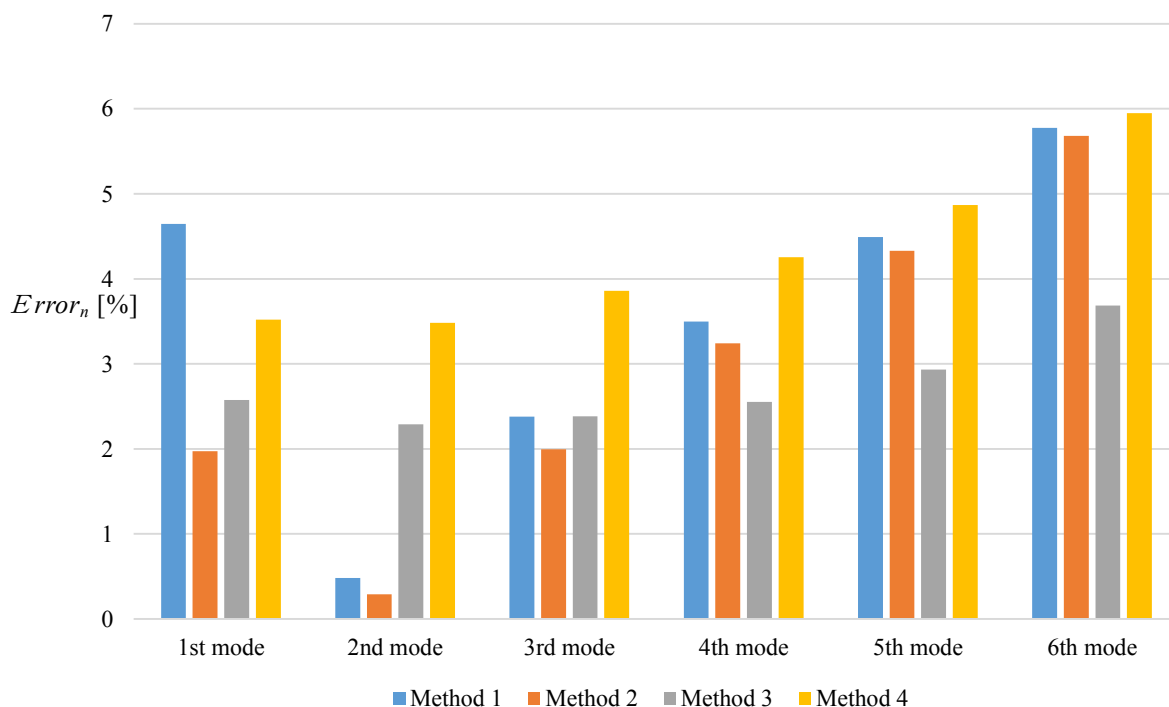


Fig.5.17 Comparison prediction accuracy of analytical methods

次にモード形状について検証する．図 5.18 に各種方法におけるモード形状を示す．図 5.18 より，モード形状はほぼ同一と考えることができる．しかしながら，**Method1** については接地点において連続性を有さないこと，モード形状を定義してしまう方法であるから，接地・転動時における振動挙動解析を実施することができないという短所を有する．以上のことから，非接地・非転動時における卓越ピーク次数を把握の上，レセプタンス法の採用モード次数を決定する **Method3** の固有振動数の予測精度は高く，また簡易方法としては固有関数定義する **Method1** でも見通しの良い固有振動数予測をすることができる．

	Method1	Method2	Method3	Method4
	Eigen function	Receptance by 2 modes	Receptance by 1-7 th mode number	Receptance by 1-14 th mode number

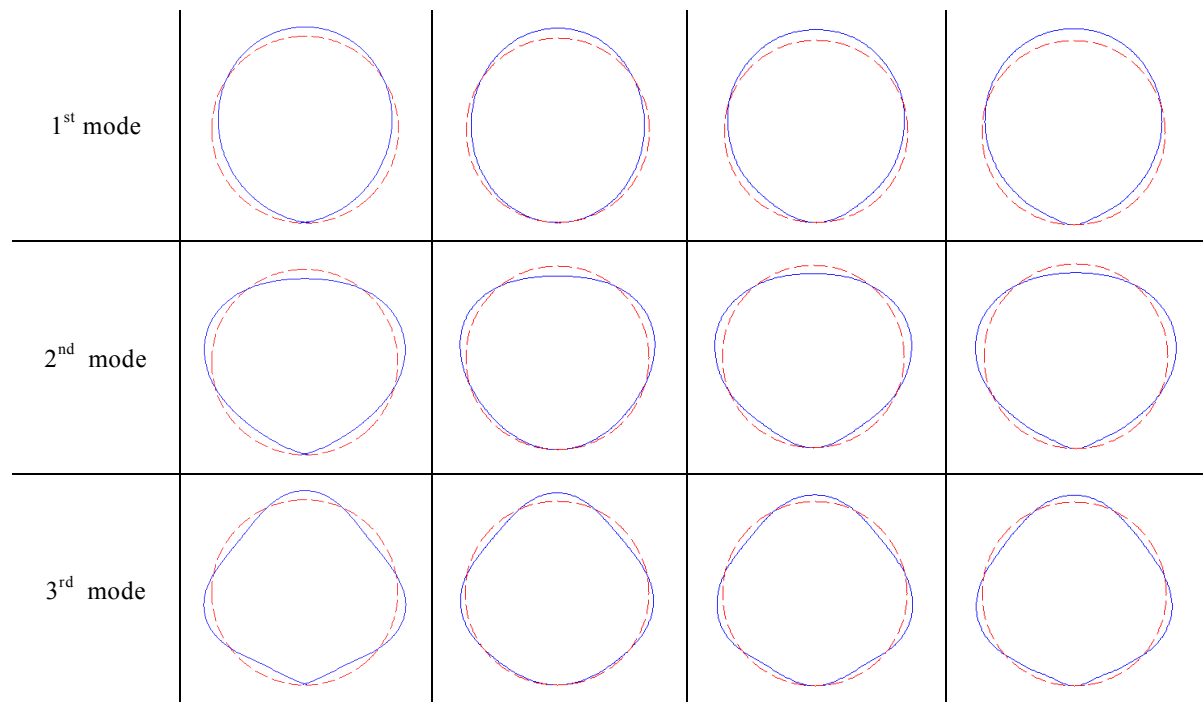


Fig.5.18 Comparison mode shapes of analytical

5.6 結言

接地・非転動時におけるタイヤ振動特性を実験，解析より解明した．得られた知見は以下の通りである．

1. 接地・非転動時の振動特性変化は接地面拘束によるモード形状変化によるものである．非接地時の固有振動数 $1, 2, 3, \dots$ 次に対して周方向波数が $1, 2, 3, \dots$ となるのに対して，接地時には，周方向波数が $1.5, 2.5, 3.5, \dots$ となる．
2. 接地・非転動時の固有振動数は非接地・非転動時の固有振動数に周方向波数（固有関数）を定義することで簡易評価できる．
3. レセプタンス法より，接地・非転動時のモード形状および固有振動数は非接地・非転動時の自由振動解の重ね合わせで評価できる．
4. 周方向波数に着目した固有関数定義による解析では，定義した固有関数の性質上，モード形状に不連続部分が存在するが，レセプタンス法では非接地・非転動時の自由振動解の重ね合わせで表現するため，連続性を有する．
5. 固有振動数予測精度に対して 4 種の方法で比較した結果，レセプタンス法の非接地・非転動時の周波数応答関数における卓越ピークに基づき採用モード数を決定する方法が優位であった．また，固有関数定義による方法はレセプタンス法における近傍 2 つのモードを採用する方法と同程度の精度であることがわかり，簡易評価として十分であるとわかった．
6. 接地・非転動時の固有振動数の解析値は接地拘束を点拘束でモデル化しているため，実験値に対して小さい値となる．

参考文献

- (1) 株式会社ブリヂストン, “自動車用タイヤの基礎と実際”, 山海堂, pp101-118, (2006)
- (2) 上玉利 恒夫, “ラジアルタイヤの振動特性 (第 1 報)”, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.851, Paper-No.851031, pp.155-160, (1985)
- (3) J. T. Tielking, “Plane vibration Characteristics of a Pneumatic Tire Mode”, *SAE paper*, Paper-No.650492, (1965)
- (4) S. C. Huang, W. Soedel, “Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem, *Journal of Sound and Vibration*”, Vol.118, No.2, pp.253-270, (1987)
- (5) 本田 善久, 松久 寛, 佐藤 進, “空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.54, No.507, pp.2610-2617, (1988)

第 6 章 接地・転動時におけるタイヤ半径方向

振動挙動解析

6.1 緒言

接地・転動時にタイヤ振動特性に与える影響因子である回転効果及び接地面拘束の影響が複合する場合に着目する．固有振動数低下現象に着目した場合，タイヤ構造部材の剛性を定量的に同定することは実稼動時のタイヤ振動特性再現のために重要である．そのため，剛性同定過程において回転効果及び接地面拘束が同時に発生する場合に力学的にどのような影響を与えるのか明らかにし，その影響分を差し引いたものから材料特性を同定するよう考慮しなければならない．

本章では径方向モードに着目し，接地・転動時におけるタイヤ振動挙動解析を実施する．セプタンス法をタイヤモデルに適用し，接地・非転動時の振動解析を行った．その結果，レセプタンス法によりタイヤの振動特性を十分評価できることが明らかとなった．そこで本研究では同じくレセプタンス法を用いた接地・転動時の振動解析を行い，転動時の振動特性を解析的に明らかにする．次にタイヤ振動モデルを導入し，接地・転動時の運動方程式の導出とレセプタンス法の適用を行う．そして，構築したモデルを基に接地・転動時の振動解析を行い，その結果について示す．

6.2 タイヤの力学モデル

6.2.1 薄肉円環モデル

力学モデルは第 4, 5 章と同様のものを使用する．再度モデルについて記述する．

トレッド部を薄肉円環（以下，トレッドリング）で表現したタイヤ振動モデルを用いる．図 5.1 にタイヤ振動モデルを示す．車軸-ホイール系はタイヤに対し高剛性であることから剛体として取り扱い，トレッドリングとホイールの間はサイドウォール部の弾性を示すばねで結合されていると考える．モデルの座標系は周方向を θ ，半径方向を z とする． $z=0$ をトレッドリング断面の中央面とし， (θ, z) 方向に対応するトレッドリング断面の任意点の中央面上の微小変位を (v, w) とする．トレッドリングの平均半径を R ，断面積を A とする．また，縦弾性係数を E ，密度を ρ ， z 軸に関する断面二次モーメントを I とする．周方向，半径方向の単位周長あたりのサイドウォール部のば

ね定数をそれぞれ K_θ , K_r とする. なお, トレッドリングの変形は不伸張変形とみなす.
このとき, v と w の関係式として次式が成り立つ⁽¹⁾⁽²⁾.

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} - \frac{w}{R} = 0 \quad (6. 1)$$

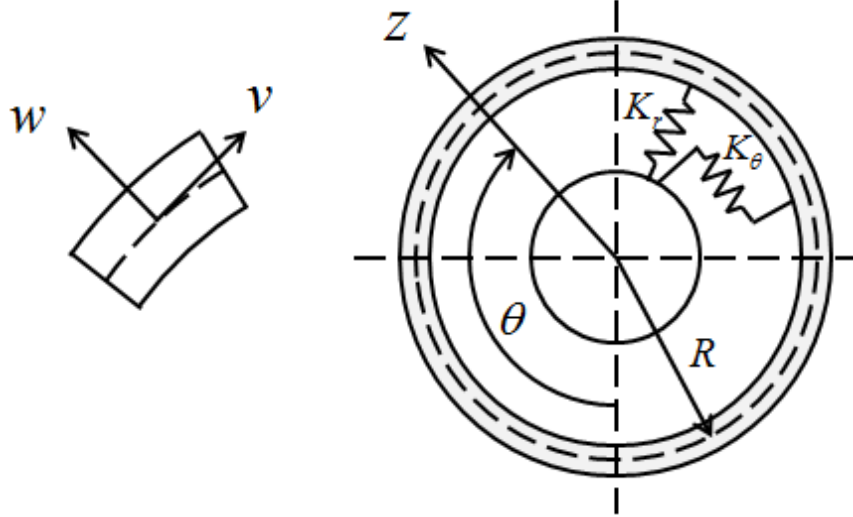


Fig.6.1 Tire model

6.2.2 運動方程式

周方向, 半径方向に対応する速度成分に, 遠心力による初期微小変位 w_0 を考慮した運動エネルギーは次のようになる.

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho A \left[\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(R + w_0 + w) \right\}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega \right)^2 \right] R d\theta \quad (6. 2)$$

ポテンシャルエネルギーは円筒シェル理論に基づき, 曲げ, 張力について考慮し, サイドウォール部のばねの弾性エネルギーを加えると次式となる.

$$U = \int_0^{2\pi} \left[\frac{EI}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 - \frac{S_0 + S_{rot}}{2R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) w + \frac{1}{2} K_\theta v^2 + \frac{1}{2} K_r (w + w_0)^2 \right] R d\theta \quad (6. 3)$$

ここで, S_0 は内圧により発生する張力, S_{rot} は回転によりトレッドリングに発生する張力を表し, 以下の式で表される⁽³⁾.

$$S_{rot} = \rho A R^2 \Omega^2 \quad (6. 4)$$

また、路面から半径方向の拘束力 F_w が作用する場合を考える．図 6.2 に本モデルにおける概略図を示す．外力のエネルギー W は半径方向変位 w を用いて次式のように表せる．

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{F_w}{R} w R d\theta \quad (6. 5)$$

導出した各エネルギーの第一変分と Hamilton の原理を用いて運動方程式を導出する．運動エネルギーの第一変分を式(6. 6)，ポテンシャルエネルギーの第一変分を式(6. 7)，外力のエネルギーの第一変分を式(6. 8)にそれぞれ示す．

$$\begin{aligned} \int_t \delta T dt = \int_t \rho A \int_0^{2\pi} & \left[- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) \delta v \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (R + w_0 + w) \right\} \delta w \right] R d\theta dt \end{aligned} \quad (6. 6)$$

$$\begin{aligned} \int_t \delta U dt = \int_t \int_0^{2\pi} & \left\{ \frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w + K_\theta v \delta v \right. \\ & \left. + K_r (w + w_0) \delta w - \frac{S_0 + S_{rot}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \delta w \right\} R d\theta dt \end{aligned} \quad (6. 7)$$

$$\int_t \delta W dt = \int_t \int_0^{2\pi} \frac{F_w}{R} \delta w R d\theta \quad (6. 8)$$

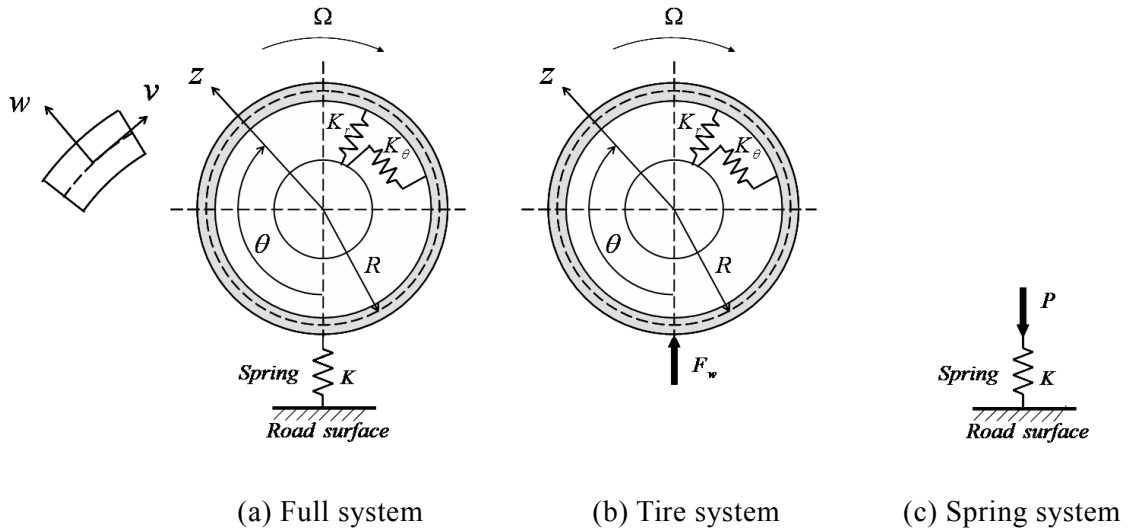


Fig.6.2 Tire-constrain system

また, Hamilton の原理を式(6. 9)に示す.

$$\delta \int_t (U - T - W) dt = 0 \quad (6. 9)$$

半径方向変位 w に関して整理すると運動方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 4\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} - \frac{S_o + S_{rot}}{\rho A R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EI}{\rho A R^4} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ - \frac{1}{\rho A} \left(K_\theta w - K_r \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.2.3 定常応答

路面から外力が作用しているものとして, 第 5 章と同様にレセプタンス法を用いる. 運動方程式(6.10)の解を自由振動の重ね合わせとして次のように定義する. このとき, α_n , β_n はそれぞれ \sin 形状と \cos 形状のモード形状, n はモード形状の周方向波数に対応する.

$$w(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n(t) \cos(n\theta) + \beta_n(t) \sin(n\theta) \} \quad (6.11)$$

式(6.11)を運動方程式(6.10)に代入し, $\cos(n\theta)$ との内積を考える. このとき, 三角関数の直交性を利用すると次のようになる.

$$\ddot{\alpha}_n - X_n \dot{\beta}_n + Y_n \alpha_n = - \frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \cos(n\theta) d\theta \quad (6.12)$$

ただし, X_n , Y_n は次の通りである.

$$X_n = \frac{4n\Omega}{n^2 + 1} \quad (6.13)$$

$$Y_n = \frac{S_o + S_{rot}}{\rho A R^2} \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \frac{EI}{\rho A R^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} + \frac{1}{\rho A} \frac{K_\theta + n^2 K_r}{n^2 + 1} - \Omega^2 \quad (6.14)$$

同様に $\sin(n\theta)$ との内積を考え, 三角関数の直交性を利用すると次式となる.

$$\ddot{\beta}_n + X_n \dot{\alpha}_n + Y_n \beta_n = - \frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \sin(n\theta) d\theta \quad (6.15)$$

式(6.12), (6.15)より, 以下に示す α_n , β_n に関する 2 階の連立微分方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -X_n \\ X_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_n \\ \dot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \cos(n\theta) d\theta \\ -\frac{1}{\rho A \pi R (n^2 + 1)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F_w}{\partial \theta^2} \sin(n\theta) d\theta \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

路面からの拘束力 F_w が座標上の 1 点 θ_0 で作用する場合, 振幅を F とするとディラックのデルタ関数を用いて次式のように表せる.

$$F_w = -F \cos(\omega t) \delta(\theta - \theta_0 + \Omega t) \quad (6.17)$$

式(6.17)を式(6.16)に代入すると, 外力項は以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -X_n \\ X_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_n \\ \dot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \{ \cos(\omega_+ t - n\theta_0) + \cos(\omega_- t + n\theta_0) \} \\ \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \{ \sin(\omega_+ t - n\theta_0) - \sin(\omega_- t + n\theta_0) \} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

なお, ω_+ , ω_- は次式とする.

$$\omega_+ = \omega + n\Omega, \quad \omega_- = \omega - n\Omega \quad (6.19)$$

式(6.18)より, α_n , β_n について解くと以下ようになる.

$$\alpha_n = -\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega_+ t - n\theta_0)}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} - \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega_- t + n\theta_0)}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \quad (6.20)$$

$$\beta_n = \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\sin(\omega_+ t - n\theta_0)}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} - \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\sin(\omega_- t + n\theta_0)}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \quad (6.21)$$

式(6.20), (6.21)を式(6.11)に代入すると, 半径方向の定常応答が次式で得られる.

$$w(\theta, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega_+ t + n(\theta - \theta_0))}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} + \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega_- t - n(\theta - \theta_0))}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \right] \quad (6.22)$$

回転座標系 (θ, t) より, 慣性座標系 (ψ, t) に変換する. $\psi = \theta + \Omega t$, $\theta_0 = \psi_0$ の関係および慣性座標系の角振動数として $\omega_k = \omega \pm n\Omega$ を導入すると, 式(6.22)は次のようになる.

$$\begin{aligned} w(\psi, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} & \left[\frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega t + n(\psi - \psi_0))}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} \right. \\ & \left. + \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R (n^2 + 1)} \frac{\cos(\omega t - n(\psi - \psi_0))}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

さらに, 円周方向変位 v は式(6.1)の不伸張変形の関係より次式で表される.

$$v(\psi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nF}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \frac{\sin(\omega t + n(\psi - \psi_0))}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} - \frac{nF}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \frac{\sin(\omega t - n(\psi - \psi_0))}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \right] \quad (6.24)$$

6.2.4 振動数方程式

タイヤが路面から受ける拘束力を $F \cos(\omega t)$ とすると、拘束点での半径方向変位の振幅 W_0 は次式で表せる。

$$W_0 = F \gamma_0 \quad (6.25)$$

γ_0 は拘束点におけるタイヤのレセプタンスを表す。式(6.23)より、タイヤのレセプタンスは次式で与えられる。

$$\gamma_0 = \frac{w(\psi_0, t)}{-F \cos(\omega t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \left(\frac{1}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} + \frac{1}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \right) \quad (6.26)$$

一方、路面である拘束系については、タイヤから受ける力の振幅を P 、タイヤとの拘束点における変位の振幅を W_R とし、レセプタンスを γ_R とすると次の関係が成立する。

$$W_R = P \gamma_R \quad (6.27)$$

拘束点における接続条件は、振動系および拘束系の変位の一致および作用反作用の関係から次のように表せる。

$$W_0 = W_R, \quad F + P = 0 \quad (6.28)$$

式(6.25)、式(6.27)、式(6.28)より、次の関係式が導出できる。

$$(\gamma_0 + \gamma_R)F = 0 \quad (6.29)$$

拘束力が作用する場合、 $F \neq 0$ となるので、連成系の振動数方程式は次のようになる。

$$\gamma_0 + \gamma_R = 0 \quad (6.30)$$

ここで、拘束系がばねであると考え、拘束系のレセプタンス γ_R は次式のようになる⁽⁴⁾。

$$\gamma_R = K^{-1} \quad (6.31)$$

路面の場合、タイヤに対して剛性が十分高いと考えられるため、 $K = \infty$ と考えることができる。つまり、拘束系のレセプタンスは $\gamma_R = 0$ となる。よって、式(6.26)より振動数方程式は以下のようになる。

$$\gamma_0 + \gamma_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \left(\frac{1}{Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2} + \frac{1}{Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2} \right) = 0 \quad (6.32)$$

上式が本モデルの振動数方程式であり，モード形状は式(6.23)，(6.24)より得られる．

6.3 接地・転動時におけるタイヤ振動挙動解析

6.3.1 パラメータ同定

本節では，運動方程式に存在する曲げ項，張力項，円周方向および半径方向ばね項の4項について非接地・非転動時の固有振動数を用いてパラメータ同定を行う．式(6.18)の外力項を0とすると次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_n \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -X_n \\ X_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_n \\ \dot{\beta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

式(6.33)を解くことで，次のように転動時の固有振動数を導出できる．

$$f_{rot} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2n}{n^2 + 1} \Omega \pm \sqrt{\frac{(n^2 - 1)(n^4 + 1)}{(n^2 + 1)^2} \Omega^2 + \omega_{static}^2} \right) \quad (6.34)$$

ここで，転動角速度 $\Omega=0$ とすると非転動時の固有振動数は以下のような式になる．

$$f_{static} = \frac{\omega_{static}}{2\pi} = \pm \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\rho A} \left\{ \frac{EI}{R^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} + \frac{S_o}{R^2} \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \frac{n^2 K_r + K_\theta}{n^2 + 1} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.35)$$

次に，振動試験の固有振動数を用いて曲げ項，張力項，ばね項に関してパラメータ同定を実施した．実験データは第5章のものを参照した．同定した結果を基に算出した固有振動数と試験結果の比較を図6.3に示す．図6.3より非接地・非転動時の振動特性を表現できていることがわかる．

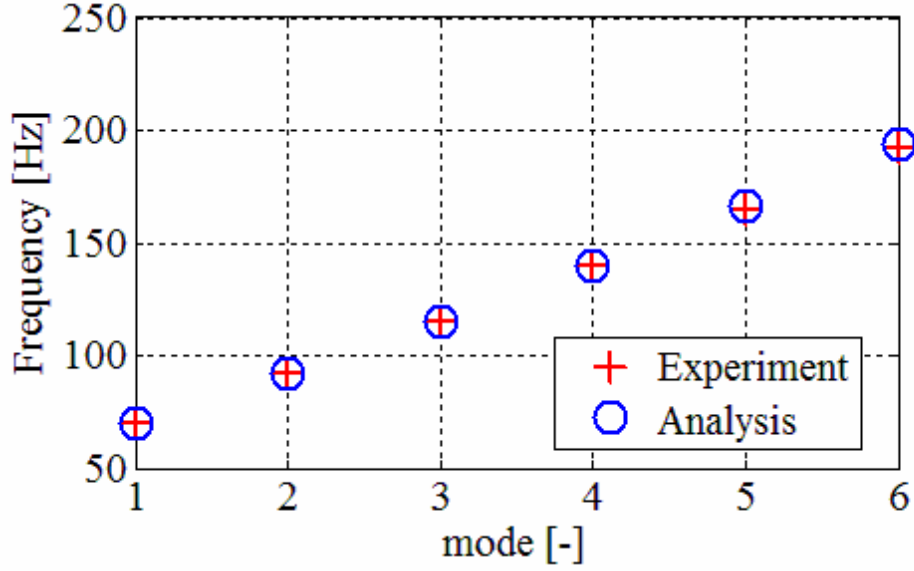


Fig.6.3 Comparison of natural frequency of radial mode in non-contact and unrolling condition

6.3.2 接地・転動解析

本項では 6.2 節で導出した定常応答および振動数方程式を基に接地・転動時の固有振動数とモード形状を算出する．なお，本節では転動速度 30km/h の解析結果について述べる．転動時の振動数方程式である式(6.32)を角振動数 ω から振動数 f へ変換すると次式のようになる．

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \left(\frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f + n\Omega) - (2\pi f + n\Omega)^2} + \frac{1}{Y_n - X_n(2\pi f - n\Omega) - (2\pi f - n\Omega)^2} \right) = 0 \quad (6.36)$$

ここで γ をタイヤと拘束系のレセプタンスの和とし，全系のレセプタンスとする．式(6.36)をグラフ化した際の x 軸との交点が，接地・転動時の固有振動数の解析値となる．式(6.36)をグラフ化したものを図 6.4 に示す．図 6.4 よりレセプタンスおよび周波数に関して曲線が漸近線を有していることがわかる．

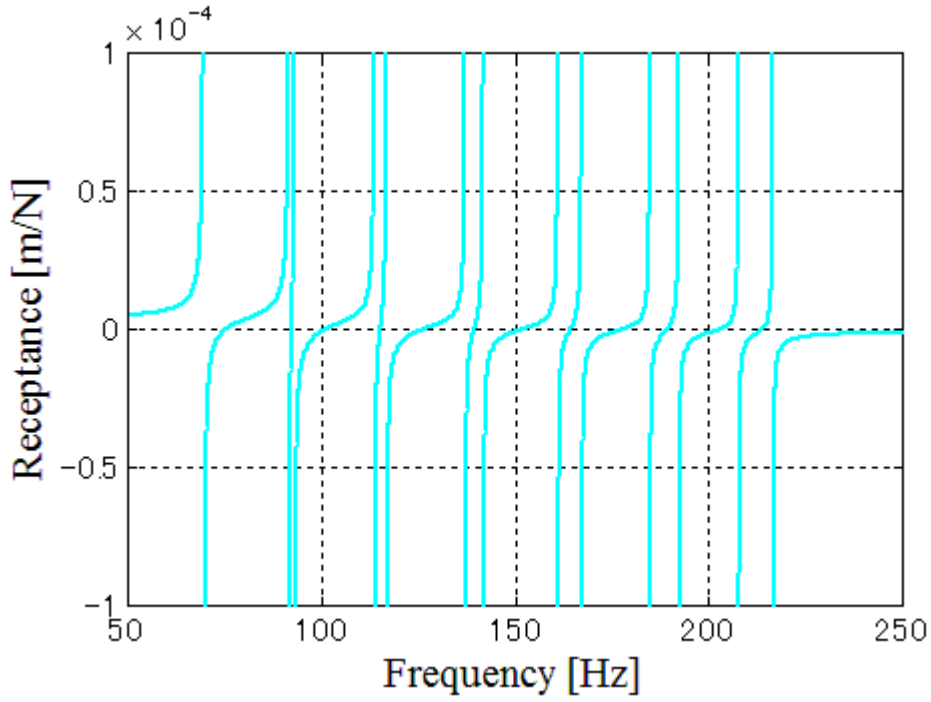


Fig.6.4 Graphic method for natural frequency on contact and rolling condition at 30km/h

そこで、式(6.36)の第 n 次の項に着目し、次のようにおく．

$$\gamma_n = \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)} \left(\frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f + n\Omega) - (2\pi f + n\Omega)^2} + \frac{1}{Y_n - X_n(2\pi f - n\Omega) - (2\pi f - n\Omega)^2} \right) \quad (6.37)$$

式(6.37)は第一項および第二項についてそれぞれ漸近線を有すると考えられる．そこでレセプタンスおよび周波数に関する各漸近線を次のように算出する．まず，漸近線を一次関数として次のように表す．

$$\gamma_{n1} = c_1 f + c_2 \quad (6.38)$$

$$\gamma_{n2} = c_3 f + c_4 \quad (6.39)$$

$$f_{n1} = c_5 \gamma + c_6 \quad (6.40)$$

$$f_{n2} = c_7 \gamma + c_8 \quad (6.41)$$

次に式(6.37)の第一項のみを考慮すると，式(6.37)は次式のように式変形できる．

$$f_{n1} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)\gamma}} \right) - \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (6.42)$$

同様に第二項について考えると，式(6.37)は次式のように式変形できる．

$$f_{n2} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)\gamma}} \right) + \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (6.43)$$

よって未知定数 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ は次のように求めることができる。

$$c_1 = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n1}}{f} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)f} \left\{ \frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f + n\Omega) - (2\pi f + n\Omega)^2} \right\} \approx 0 \quad (6.44)$$

$$c_2 = \lim_{f \rightarrow \infty} (\gamma_{n1} - c_1 f) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)} \left\{ \frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f + n\Omega) - (2\pi f + n\Omega)^2} \right\} \approx 0 \quad (6.45)$$

$$c_3 = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n2}}{f} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)f} \left\{ \frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f - n\Omega) - (2\pi f - n\Omega)^2} \right\} \approx 0 \quad (6.46)$$

$$c_4 = \lim_{f \rightarrow \infty} (\gamma_{n2} - c_3 f) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)} \left\{ \frac{1}{Y_n + X_n(2\pi f - n\Omega) - (2\pi f - n\Omega)^2} \right\} \approx 0 \quad (6.47)$$

$$c_5 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{f_{n1}}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)\gamma}} \right) - \frac{n\Omega}{2\pi} \right\} \approx 0 \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} c_6 &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (f_{n1} - c_5 \gamma) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)\gamma}} \right) - \frac{n\Omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n} \right) - \frac{n\Omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$c_7 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{f_{n2}}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)\gamma}} \right) + \frac{n\Omega}{2\pi} \right\} \approx 0 \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} c_8 &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (f_{n2} - c_7 \gamma) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n - \frac{n^2}{2\rho A \pi R(n^2+1)\gamma}} \right) + \frac{n\Omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{X_n}{2} + \sqrt{\frac{X_n^2}{4} + Y_n} \right) + \frac{n\Omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (6.51)$$

よって漸近線は式(6.13), 式(6.14)より X_n, Y_n を代入し, ドップラー効果を考慮すると次式のようになる⁽⁵⁾。

$$\gamma_{n1} = \gamma_{n2} = 0 \quad (6.52)$$

$$f_{n1} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-n^3 + n}{n^2 + 1} \Omega + \sqrt{\frac{(n^2 - 1)(n^4 + 1)}{(n^2 + 1)^2} \Omega^2 + \omega_{static}} \right) \quad (6.53)$$

$$f_{n2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n^3 - n}{n^2 + 1} \Omega + \sqrt{\frac{(n^2 - 1)(n^4 + 1)}{(n^2 + 1)^2} \Omega^2 + \omega_{static}} \right) \quad (6.54)$$

式(6.53), (6.54), 及び式(4.39)より, 漸近線は慣性座標系における非接地・転動時の固有振動数であることがわかる. また, 式(6.53)は後退波, 式(6.54)は進行波の固有振動数を表す式である. ここで, 式(6.37)の各モードのレセプタンスと式(6.52), (6.53), (6.54)で表される漸近線を併記したものを図 6.5 に示す. 図 6.5 を見ると, $n=1$ のグラフは周波数に関して漸近線が 1 つ存在していることがわかる. 一方, $n=2, 3$ に関しては周波数に関してそれぞれ漸近線が 2 つ存在する. 図 6.5(a)の $n=1$ の場合, 非接地・転動時の固有振動数を慣性座標系で評価した場合, 式(6.53), (6.54)より 1 次モードはタイヤが回転することで発生するコリオリ力の影響を受けず, 固有振動数が 1 つとなり, レセプタンス $\gamma_n=0$ との交点を持たない. また, 図 6.5(b),(c),(d)より $n=2, 3, 4$ においてはそれぞれ 1 つの交点を持っている. 式(6.36)の振動数方程式および漸近線の導出から, 接地・転動時の固有モードは非接地・転動時の固有モードの重ね合わせとして評価される為, $n=2, 3, 4$ においては各モードの進行波および後退波の重ね合わせにより接地・転動時の固有モードが励起されたと考えられる. つまり, 接地・転動時のある固有モードが励起される為には, その卓越周波数の近傍前後に存在する非接地・転動時の固有モードが最も重要であるといえる. また, 第 5 章において述べたように図 5.2 の周波数応答関数において, 非接地・非転動時においては周方向波数 7 の 7 次モード, 接地・非転動時においては周方向波数 6.5 の 6 次モードまで卓越したピークが現れていることがわかる. 以上を踏まえ, 接地・転動時の振動解析を行う際に採用する非接地・転動時モード範囲は周方向波数 1-7 とする. すなわち, 式(6.37)における $n=1-7$ とする.

転動速度 30km/h の固有振動数の解析結果を表 6.1 に示す. 表中の括弧内の値は後述する各固有振動数における振動形状の周方向波数を示している. また, 表 6.1 に併記した他の転動速度における解析結果については 6.3.3 項において述べる. 接地・非転動時から接地・転動時へ変化するとき, 1 次固有振動数は低下することがこれまでの研究で報告されているが, 今回の解析では 1 次固有振動数の低下は起こらなかった. この原因については 6.3.4 において後述する.

次に式(6.23), (6.24)の定常応答より, 各固有振動数におけるモード形状を算出する.

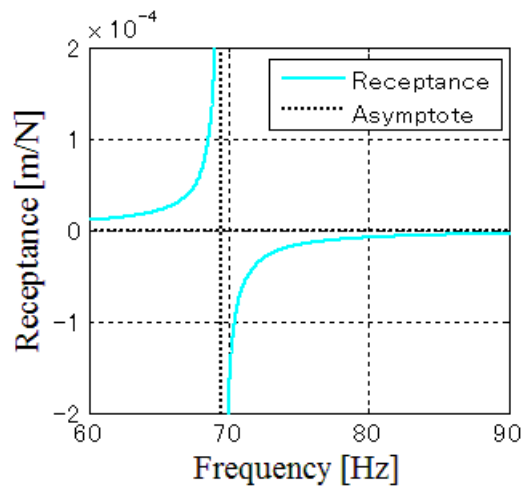
3 次までの解析結果を図 6.6 に示す．図 6.6 は各モードにおける転動の様子を示している．黒の矢印および灰色の矢印はそれぞれタイヤの転動方向と波の移動方向を表す．また，各次数のモードの周方向波数を併せて示した．ここで各モードの周方向波数について検討する．接地・非転動時においては路面拘束の影響で非接地時と比較し半波長分波数が増加した⁽⁶⁾．つまり，1 次，2 次，3 次モードに対応する波数は 1.5，2.5，3.5 となる．一方，接地・転動時においては非転動時のような波数の対応はみられない．1 次モードの周方向波数は 1.5 であるが，2 次モード以降は 2，2.5，3 と増加していくことがわかった．これは接地・転動時の固有モード近傍に存在する非接地・転動時のモードによるものと考えられる．非接地モードの重ね合わせで評価しているため，接地・転動 1 次の近傍に存在するモードは非接地・転動 1 次と 2 次の後退波である．一方，接地・転動 2 次の近傍モードは非接地・転動 2 次後退波と 2 次進行波であることから波数は 2 となり，接地・転動 3 次は非接地・転動 2 次進行波と 3 次後退波であることから波数は 2.5 となった．以上より，接地・転動時のモード形状における周方向波数はレセプタンスとの交点の近傍前後に存在する非接地・転動時の固有モードに影響を受けることが明らかとなった．

モード形状の転動方向について検討する．本手法では接地時の振動特性を非接地時の固有モードの重ね合わせで評価している．そこで，重ね合わせに寄与する非接地時の固有モードについて進行波と後退波の成分を式(6.23)の係数値を基に検討する．式(6.23)より係数を次のように定義する．

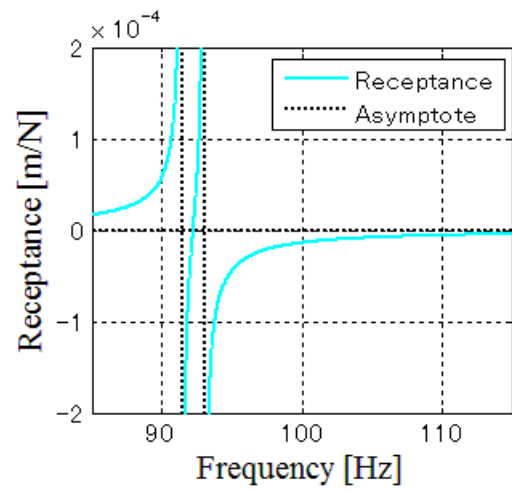
$$Coefficient\ t1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)(Y_n + X_n \omega_+ - \omega_+^2)} \right| \quad (6.55)$$

$$Coefficient\ t2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2 F}{2\rho A \pi R(n^2 + 1)(Y_n - X_n \omega_- - \omega_-^2)} \right| \quad (6.56)$$

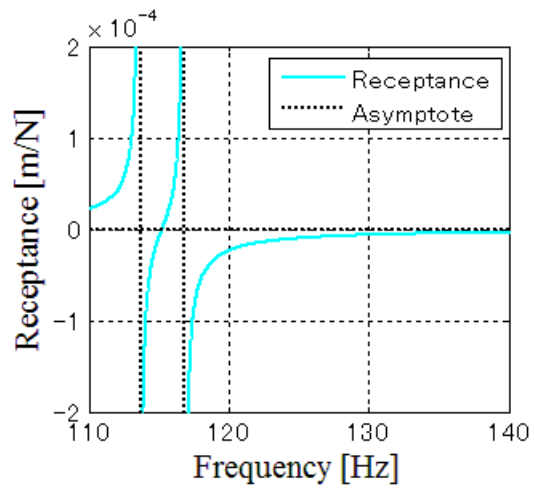
式(6.55)，式(6.56)はそれぞれ後退波と進行波の成分を表す．表 6.2 に接地・転動時の各モードに寄与する進行波および後退波成分をまとめたものを示す．表 6.2 より，接地・転動 1 次から 3 次において各成分の合計値はすべて後退波成分 *Coefficient1* が進行波成分 *Coefficient2* を上回っている．よって，30km/h における各モード形状は見かけ上，後退波が励起されたと考えられる．また，接地時の固有振動数の近傍に存在する非接地時のモードの係数値は相対的に他のモードの係数値を上回っており，近傍モードの寄与が大きいことがわかる．



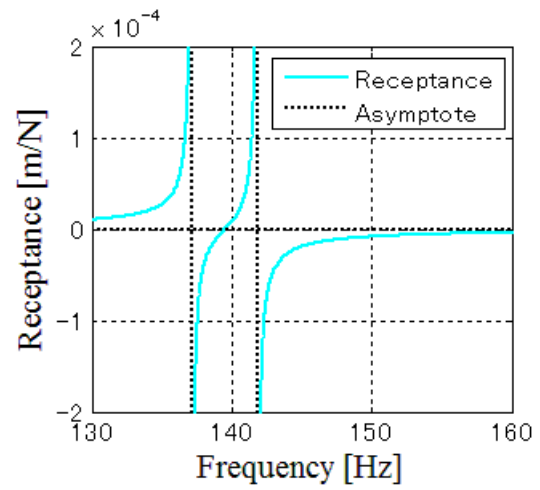
(a) γ_1



(b) γ_2



(c) γ_3



(d) γ_4

Fig.6.5 Receptance and asymptote as against 'n' number

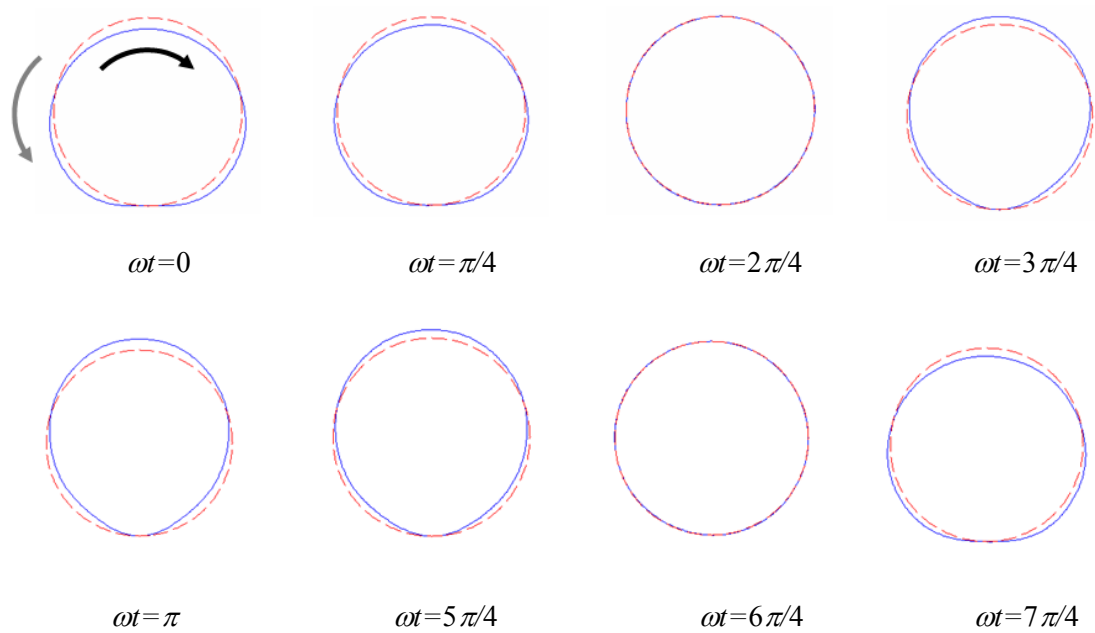


Fig.6.6 Analytical result of 1st mode 75.5Hz as wave number=1.5 on contact and rolling condition at 30km/h

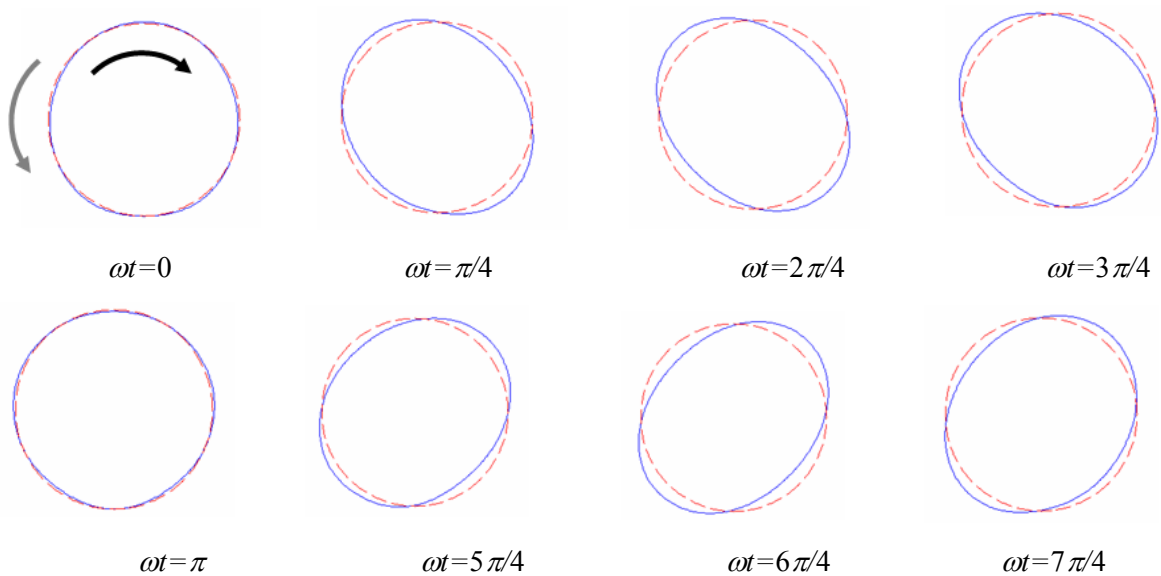


Fig.6.7 Analytical result of 2nd mode 92.2Hz as wave number=2 on contact and rolling condition at 30km/h

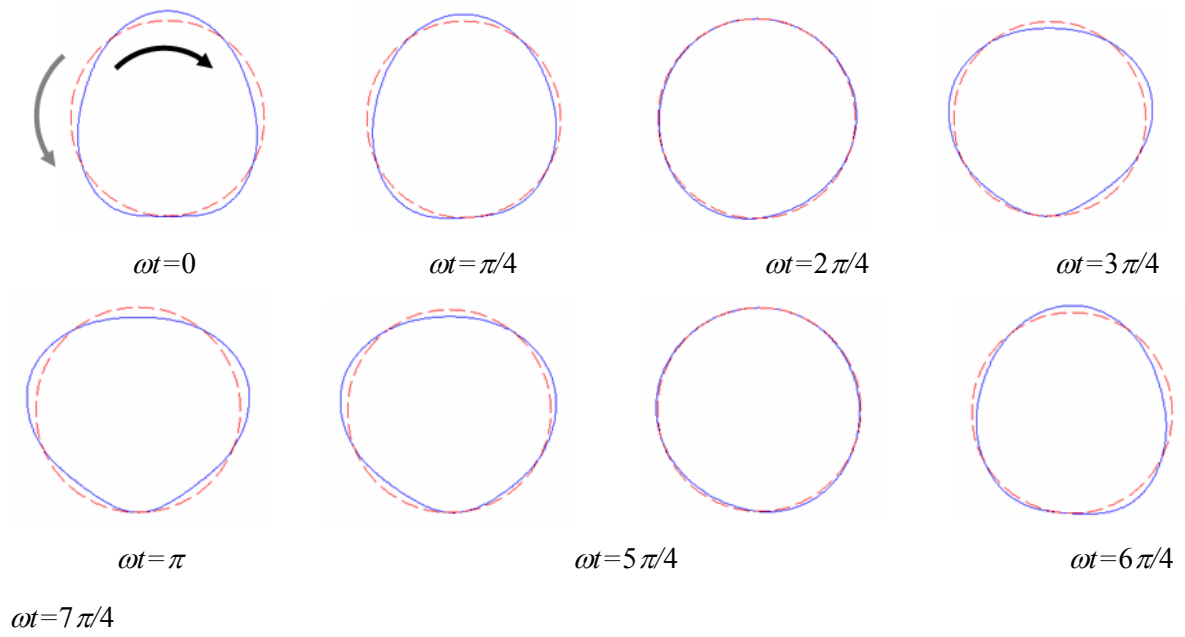


Fig.6.8 Analytical result of 3rd mode 101.6 Hz as wave number=2.5 on contact and rolling condition at 30km/h

Table.6.1 Analytical values of natural frequency and wave number on the contact and rolling condition

Mode number	0km/h	30km/h	50km/h	70km/h	90km/h	110km/h
1 st	75.5 (1.5)	75.5 (1.5)	75.5 (1.5)	75.5 (1.5)	75.4 (1.5)	75.4 (1.5)
2 nd	101.6 (2.5)	92.2 (2.0)	92.1 (2.0)	92.0 (2.0)	91.9 (2.0)	91.7 (2.0)
3 rd	127.2 (3.5)	101.6 (2.5)	101.6 (2.5)	101.5 (2.5)	101.5 (2.5)	101.4 (2.5)
4 th	153.3 (4.5)	115.2 (3.0)	115.1 (3.0)	114.9 (3.0)	114.7 (3.0)	114.4 (3.0)
5 th	179.4 (5.5)	127.1 (3.5)	127.0 (3.5)	126.7 (3.5)	126.5 (3.5)	126.2 (3.5)
6 th	205.2 (6.5)	139.5 (4.0)	139.5 (4.0)	139.5 (4.0)	139.5 (4.0)	139.3 (4.0)

Table.6.2 Coefficient value of forward wave and backward wave at 30km/h

Mode Number	Contact 1 st		Contact 2 nd		Contact 3 rd	
	Coefficient1	Coefficient2	Coefficient1	Coefficient2	Coefficient1	Coefficient2
Non-contact 1 st	0.1466	0.1466	0.0348	0.0348	0.0231	0.0231
Non-contact 2 nd	0.0803	0.0654	0.6499	0.5181	0.0928	0.1438
Non-contact 3 rd	0.0326	0.0280	0.0556	0.0414	0.1042	0.0610
4 th	0.0185	0.0164	0.0240	0.0199	0.0299	0.0232
5 th	0.0121	0.0109	0.0142	0.0123	0.0161	0.0135
6 th	0.0087	0.0079	0.0097	0.0086	0.0105	0.0091
7 th	0.0066	0.0061	0.0072	0.0064	0.0076	0.0067
Total	0.3054	0.2813	0.7954	0.6415	0.2842	0.2804

6.3.3 転動速度の違いによる固有振動数の変化

本節では転動速度の違いによる振動特性の違いについて検討する．転動速度は30km/h, 50km/h, 70km/h, 90km/h, 110km/h とした．各転動速度におけるレセプタンスを図 6.4 および図 6.9~6.12 に示す．また，グラフより算出した固有振動数を表 6.1 にまとめて示している．まず，表 6.1 より転動速度の違いによる固有振動数の変化は微小であることがわかる．一方，図 6.4, 6.9~6.12 より転動速度別に比較すると曲線の間隔に変化が現れている．特に180Hzから200Hz付近で曲線間隔の変化を確認できる．これはコリオリ力により分離する非接地・転動時の固有振動数が速度に依存しているため，変化したと考えられる．図 6.13~6.16 に $n=1\sim7$ までの重ね合わせと5次モードから7次モードまでのレセプタンスを速度別で示した．図 6.15, 6.16 における5次から7次モードのレセプタンスは180Hzと200Hzで曲線が前後していることがわかる．これは高次モードの後退波が低次モードの進行波より低い周波数で励起されることを意味する．一例として図 6.17 に非接地・転動時における5次モードから7次モードの

固有振動数の変化を示す．図 6.17 より転動速度に依存して進行波と後退波が発生する固有振動数の差が大きくなっていることがわかる．さらに 90km/h では 6 次モードの進行波と 7 次モードの後退波が，110km/h では 5 次モードの進行波と 6 次モードの後退波が近い値となり，加えて，110km/h では 7 次モードの後退波が 6 次モードの進行波より低い周波数で励起されることがわかる．

次に，転動速度の違いで固有振動数の変化が微小である理由をグラフの特性から検討する．図 6.18(a)に転動速度違いおよび図 6.18(b)に採用モード数の違いによる固有振動数の変化を示す．図 6.18 より，転動速度違いにおける固有振動数の変化はほぼ見られないが，採用モード数の違いにおいては固有振動数がモード数の増加に伴い低下していることがわかる．採用モード数が固有振動数の予測精度に影響を及ぼす傾向は非転動時と同様である．第 5 章で述べたように，接地・転動時のある固有振動数に対して高次モードはグラフの特性上，固有振動数を低下させる影響を及ぼす．一方，転動速度の違いにおいては，図 6.13~6.16 に示したように接地・転動時のある固有モードに近傍する非接地・転動時のモードに変化は見られるが，低次の非接地の進行波と高次の非接地の後退波の影響が打ち消しあうために，結果として固有振動数に対する影響は微小であることがわかる．つまり，重ね合わせ曲線の間隔に違いは現れるが，レセプタンス $\gamma=0$ との交点に及ぼす影響は微小であることがわかる．以上より，転動速度の違いは接地・転動時の近傍に存在する非接地・転動時のモードに対して影響を及ぼすが，固有振動数に対する影響は小さいといえる．

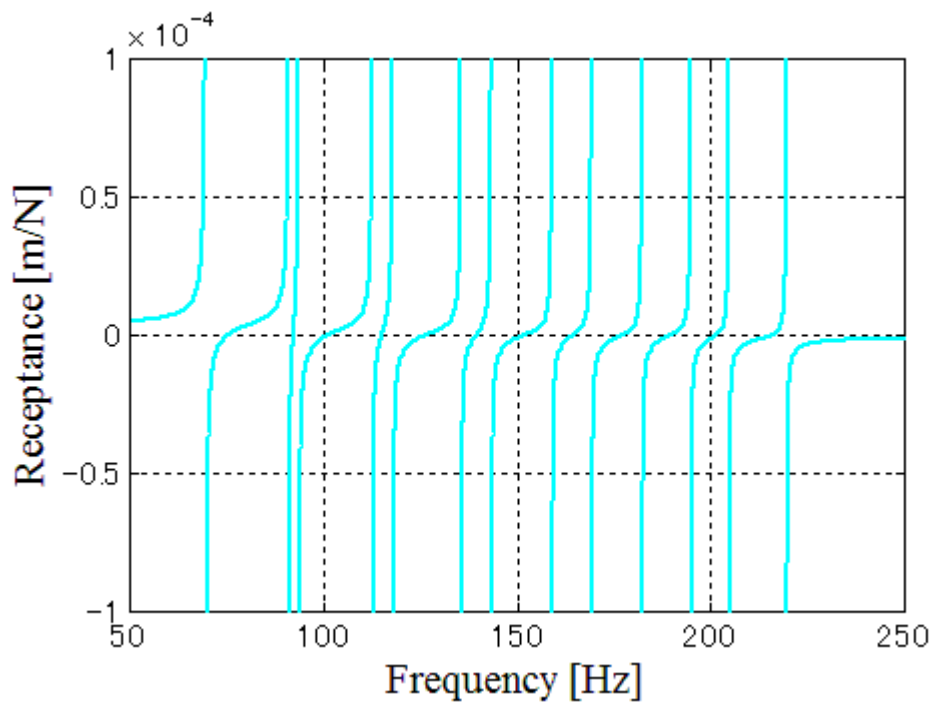


Fig.6.9 Graphic method for natural frequency on the contact and rolling condition at 50km/h

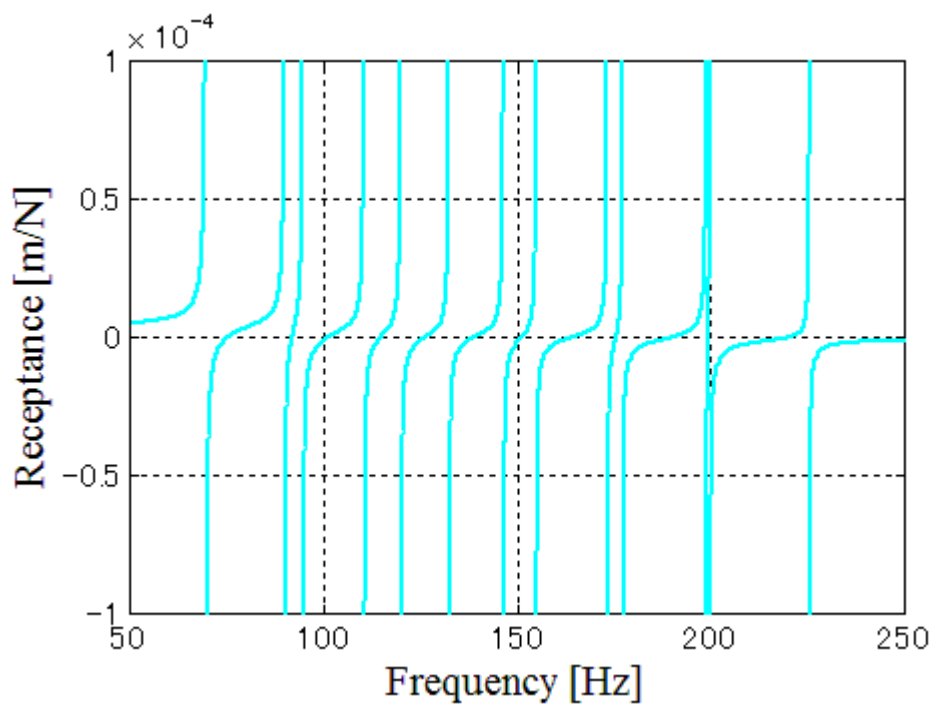


Fig.6.10 Graphic method for natural frequency on the contact and rolling condition at 70km/h

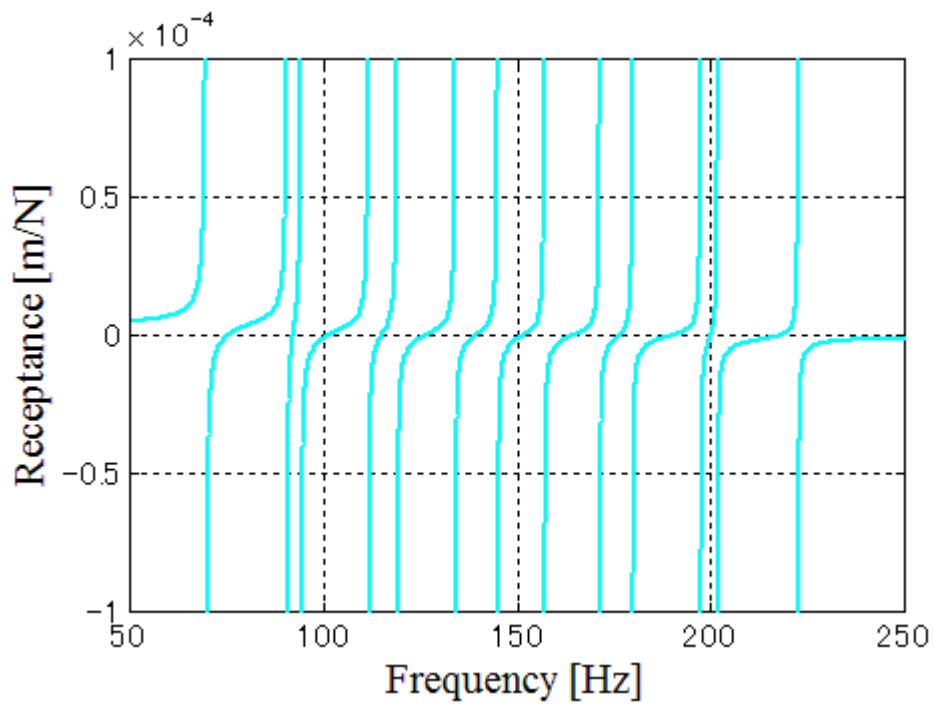


Fig.6.11 Graphic method for natural frequency on the contact and rolling condition at 90km/h

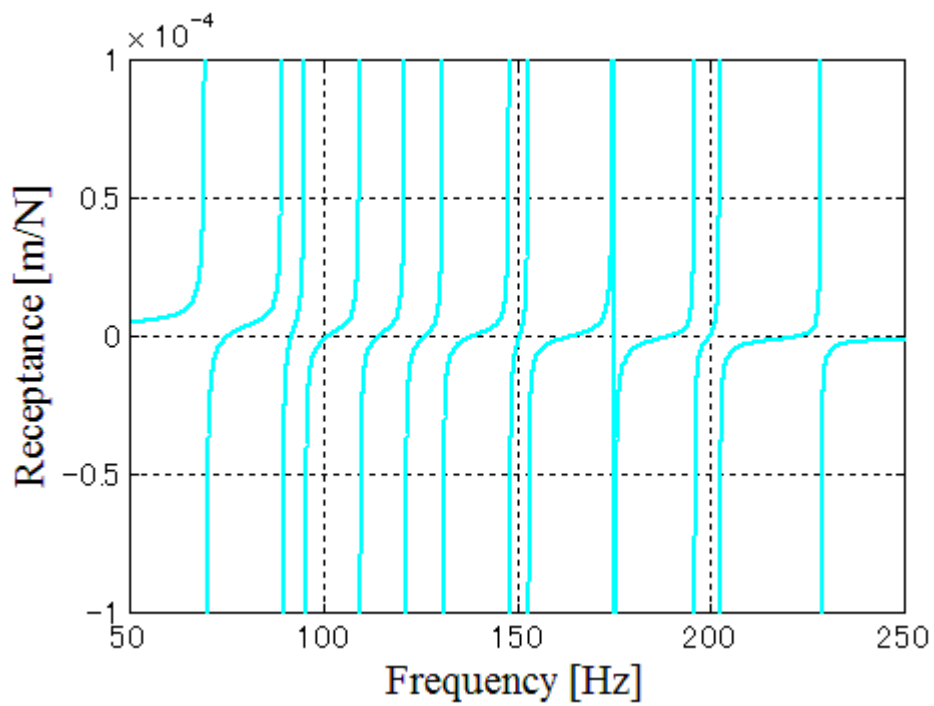
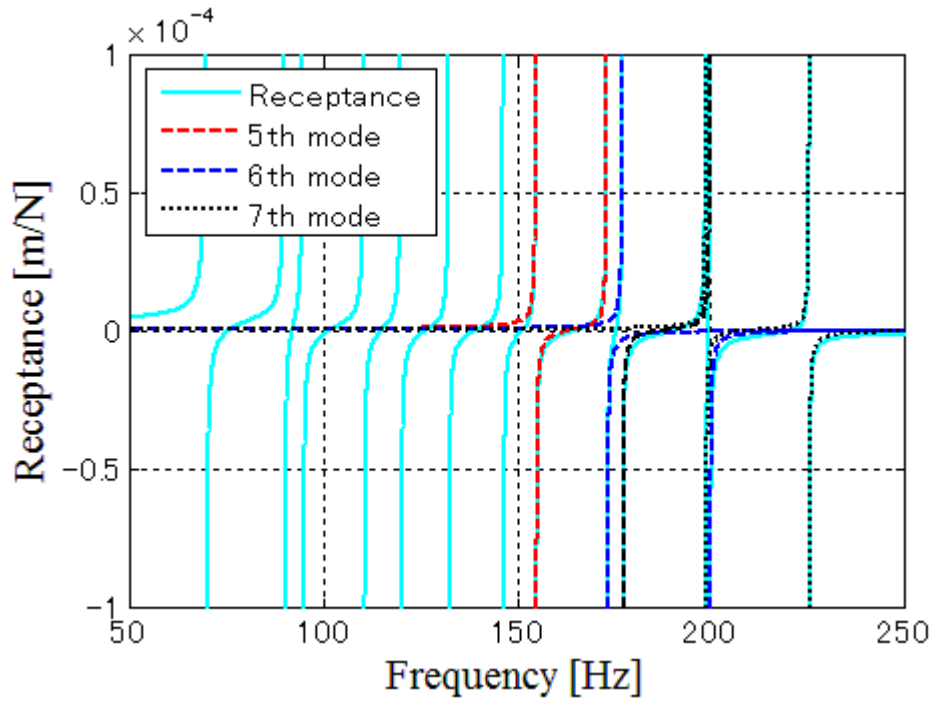


Fig.6.12 Graphic method for natural frequency on the contact and rolling condition at 110km/h



(a) 50 km/h

Fig.6.13 Receptance of mode superposition ($n=1\sim7$) and natural mode of 5th, 6th and 7th at 50km/h

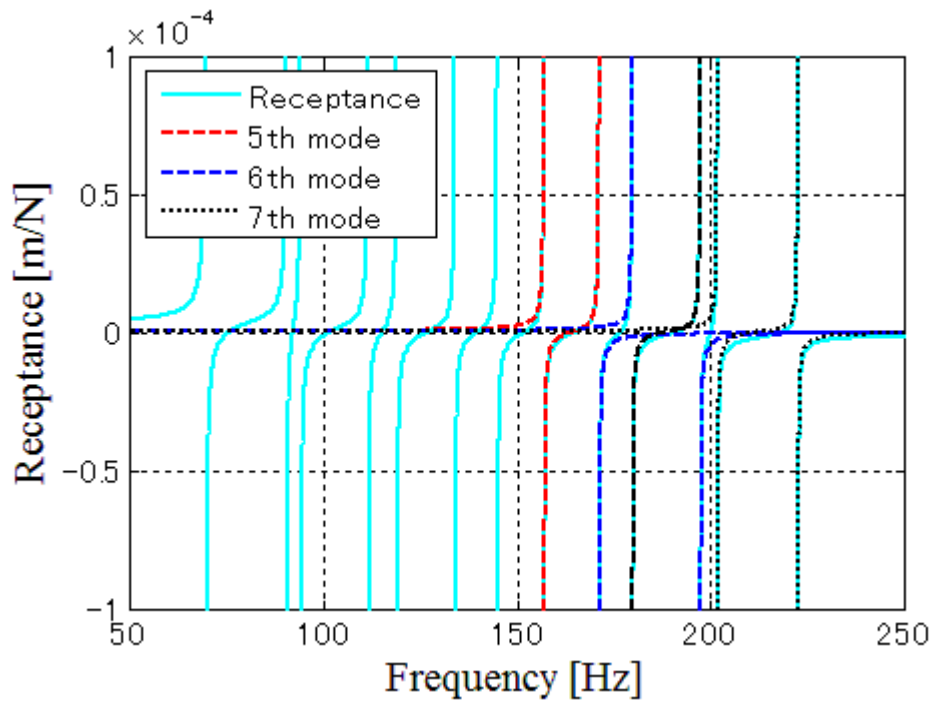


Fig.6.14 Receptance of mode superposition ($n=1\sim7$) and natural mode of 5th, 6th and 7th at 70km/h

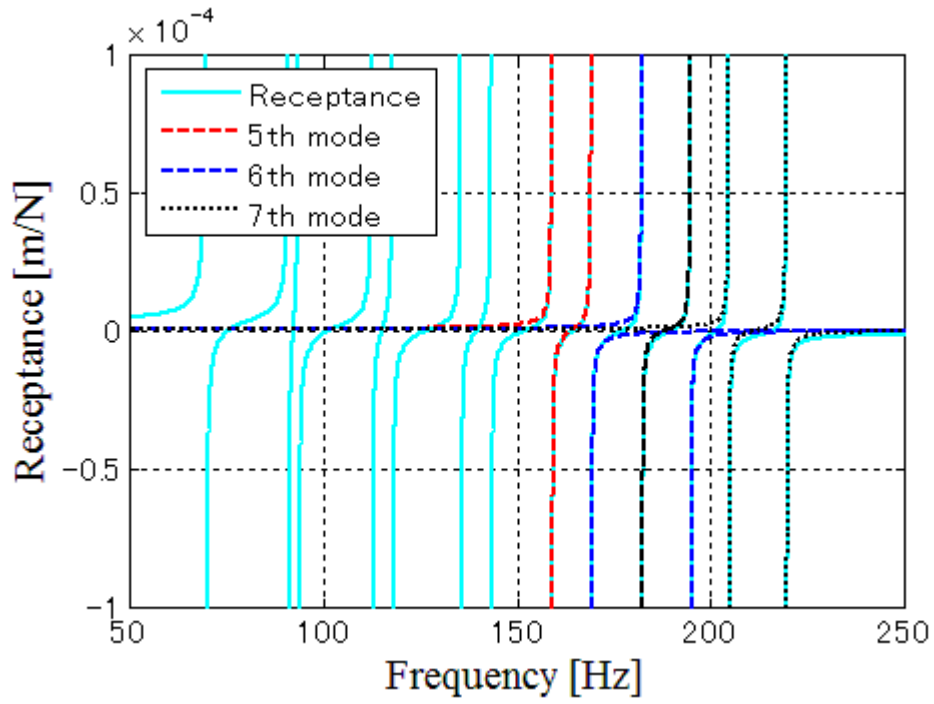


Fig.6.15 Receptance of mode superposition ($n=1\sim7$) and natural mode of 5th, 6th and 7th at 90km/h

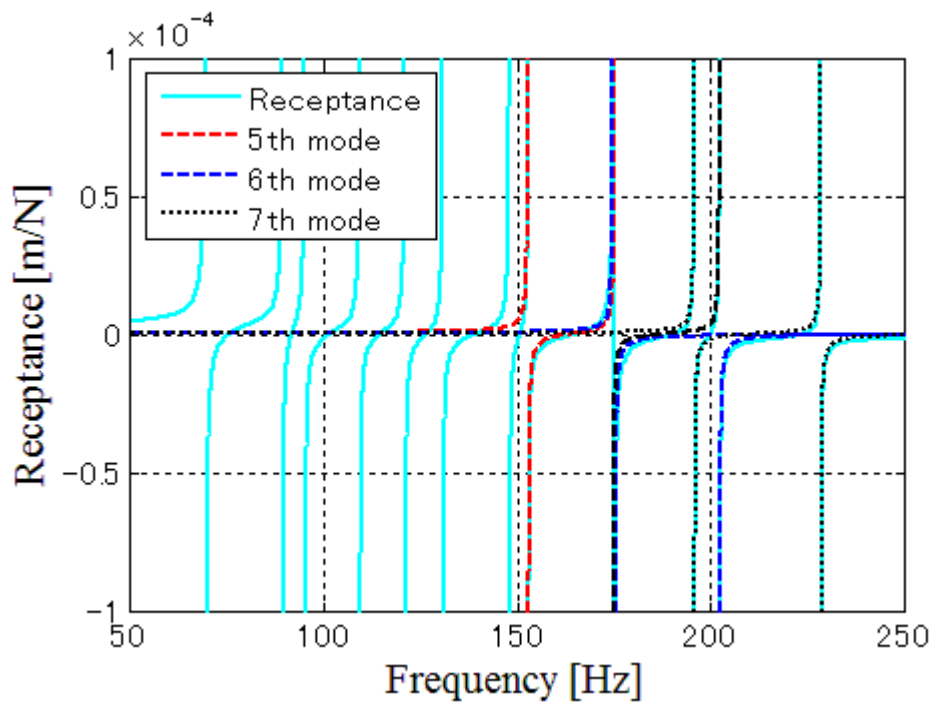


Fig.6.16 Receptance of mode superposition ($n=1\sim7$) and natural mode of 5th, 6th and 7th at 110km/h

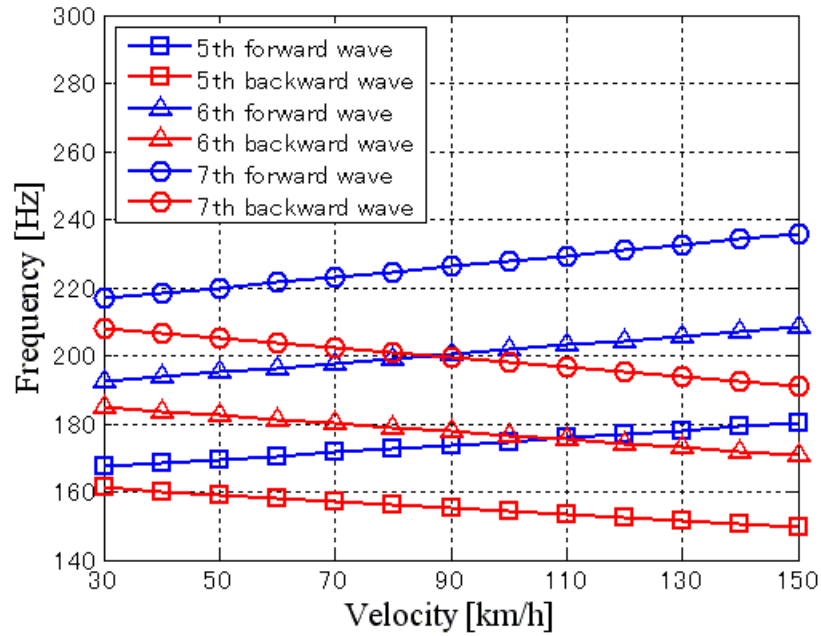
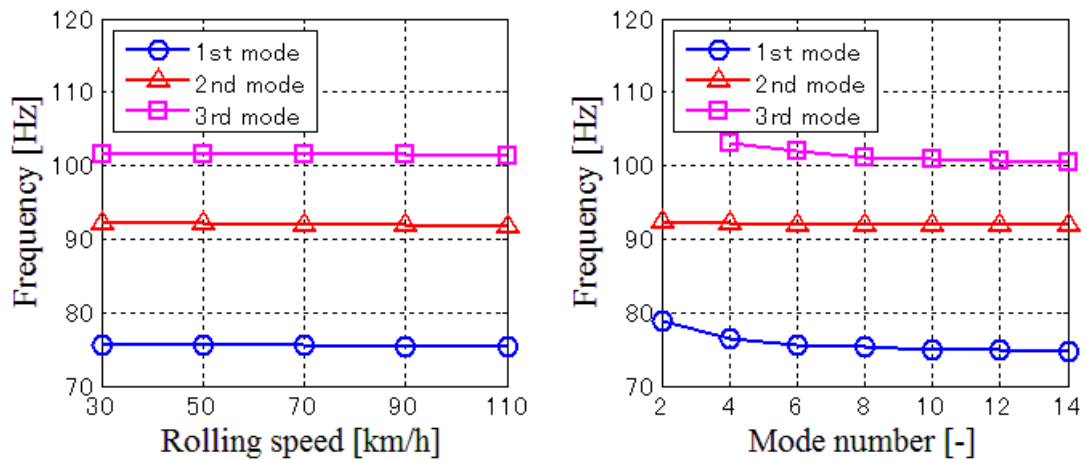


Fig.6.17 Natural frequency on the non-contact and rolling condition including the effects of Coriolis force and Doppler effect



(a) Difference of rolling speed

(b) Difference of adoption mode number

Fig.6.18 Natural frequency as against difference of rolling speed and summation mode number

6.3.4 転動速度の違いによるモード形状変化

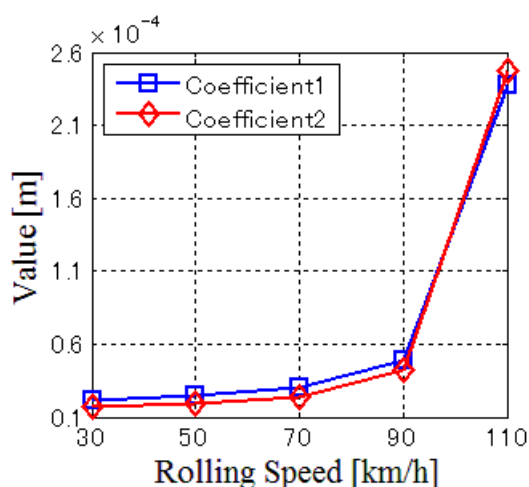
モード形状の変化について検討する．まず，1次モードから3次モードに関しては転動速度に変化が見られたが，転動方向や周方向波数に変化は見られず図 6.6-6.8 と同

一の形状となった。これは接地・転動時の固有振動数に影響を与える非接地・転動時の近傍モードに対してコリオリ力の影響が明確に現れず、変化しなかったためと考えられる。さらに、1次モードに関しては各転動速度において図 6.6 に示すように、移動波ではなく定在波が励起された。つまり、他モードの移動波と比較し、接地・転動時の1次モードは車軸振動を励起しやすいと考えられる。6.3.2 項で述べたように、本研究の解析において接地・非転動時から接地・転動時の変化に対して1次固有振動数の低下は起こらなかった。さらに、表 6.1 より接地・非転動時および接地・転動時の1次モードに対応する波数 1.5 の固有振動数を速度別に比較してみると、ほぼ変化が見られないことがわかる。これは接地・転動時の固有モードが近傍に存在する非接地・転動時の2つのモードに強く影響を受けることから説明できる。すなわち、接地・転動1次モードの近傍に存在するモードは非接地・転動1次と2次後退波であり、非接地・転動1次が定在波として励起されるため、接地・転動1次モードの固有振動数はあまり変化が見られず、且つ励起されるモード形状も定在波となる。しかし、実際には車軸振動の実験同定において、接地・転動時の1次固有振動数は低下することが報告されている⁽⁷⁾。そのため、接地・転動時の固有振動数の低下は回転効果、接地拘束の影響ではないといえる。固有振動数が低下する原因としては、タイヤのゴムが加振振幅依存性を有しており、接地・転動による剛性低下が主因とされている。一方、今回の解析におけるタイヤパラメータは非接地・非転動時の固有振動数から同定した結果を用いており、接地・転動による剛性低下を考慮できていない。以上より、接地・転動時における1次固有振動数低下の主因は回転や接地拘束の影響ではなく、ゴムの特性変化によるものであると考えられる。

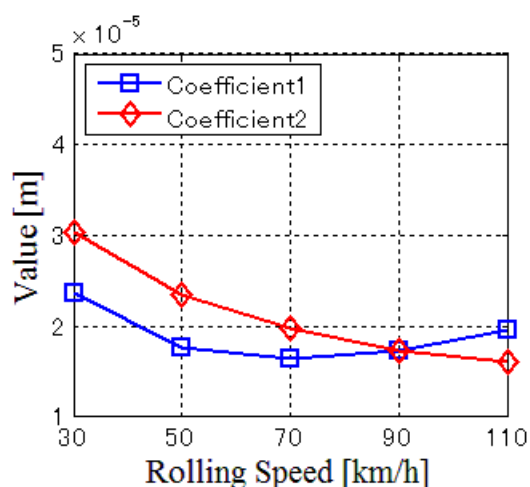
次に、近傍モードに変化が見られた 180Hz-200Hz 付近の固有モードである接地・転動9次、10次、11次モードについて検討する。まず各モードの進行波および後退波成分を式(6.55)、(6.56)を基に速度別に算出したものを図 6.19 に示す。係数値と形状の転動方向に関係性があることから、各モードについて速度別に検討する。まず9次モードについて見てみると、30km/h においては後退波成分 *Coefficient1* が大きく、モード形状はタイヤの転動方向に対して後退方向に発生する。50km/h から 90km/h まで同様に後退波成分が大きく、後退波が励起される。そして 110km/h においては進行波成分 *Coefficient2* が後退波成分を上回り、モード形状は進行波が励起された。同様に 10次モードは 90km/h で進行波から後退波へ、11次モードは後退波から進行波へ形状が変化している。9次モードの 30km/h および 110km/h におけるモード形状を図 6.20 に、

10 次モードの 30km/h および 110km/h におけるモード形状を図 6.21 に示す．黒の矢印および灰色の矢印はそれぞれタイヤの転動方向と波の移動方向を表す．

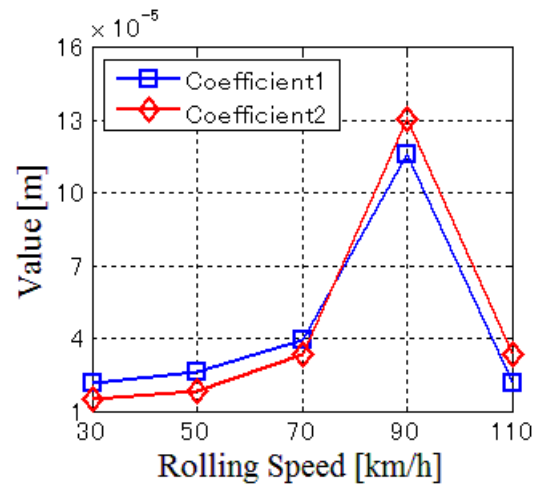
次に，周方向波数について検討する．図 6.20 および図 6.21 に各モードの周方向波数を併記した．6.3.2 項で述べたように，モード形状の周方向波数は近傍に存在する非接地時のモードの影響を強く受ける．9 次モードに関しては 30km/h，110km/h 共に近傍のモードは 5 次進行波および 6 次後退波である．これは図 6.13-6.16 から確認できる．よって，周方向波数は 5.5 となったと考えられる．同様に 10 次モードについては，30km/h における近傍モードは 6 次後退波と 6 次進行波であることから周方向の波数は 6 となる．しかし，転動速度が上がるにつれ 7 次後退波が 6 次進行波より低周波数で励起されるようになると 10 次モードの近傍モードは変化し，6 次進行波と 7 次後退波となる．その結果，励起されたモードの周方向波数は 6.5 となる．以上より，発生する振動波形の移動方向は重ね合わせに寄与する進行波および後退波の成分の大きさから決定されること，また，形状の周方向波数は近傍に存在する非接地時のモードにより決定することが明らかとなった．本研究で用いたレセプタンス法によるタイヤ振動解析は S. C. Huang らにより行われてきた⁽⁸⁾．円筒リングによるモデル化手法は長年に渡り研究されてきたが，接地・転動時の振動特性と非接地・転動時の振動特性の関係性および転動速度による影響について十分解明されているとは言い難い．本研究により，接地・転動時の固有振動数は採用モード数に依存すること，モード形状については進行波および後退波成分による解析や周方向波数の観点から解析したことで振動特性がより明確になった．



(a) 9th mode

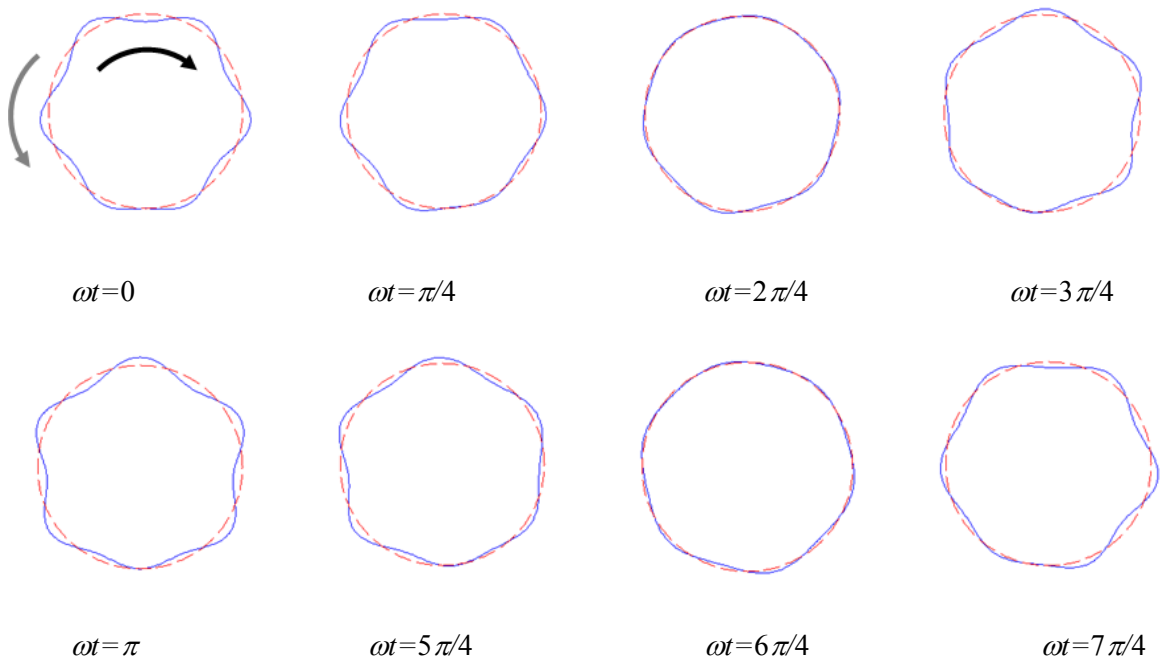


(b) 10th mode



(c) 11th mode

Fig.6.19 Coefficient value of forward wave and backward wave in 9th to 11th mode



(a) 30 km/h 178.7Hz Wave number=5.5

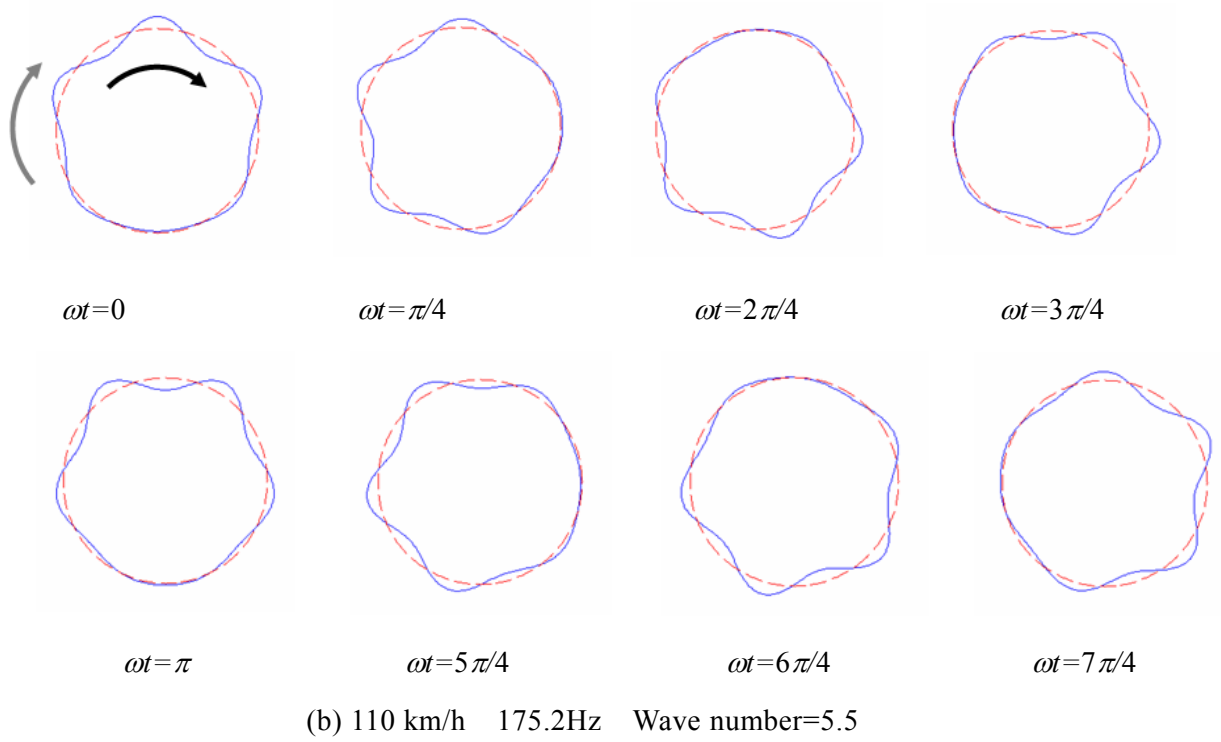
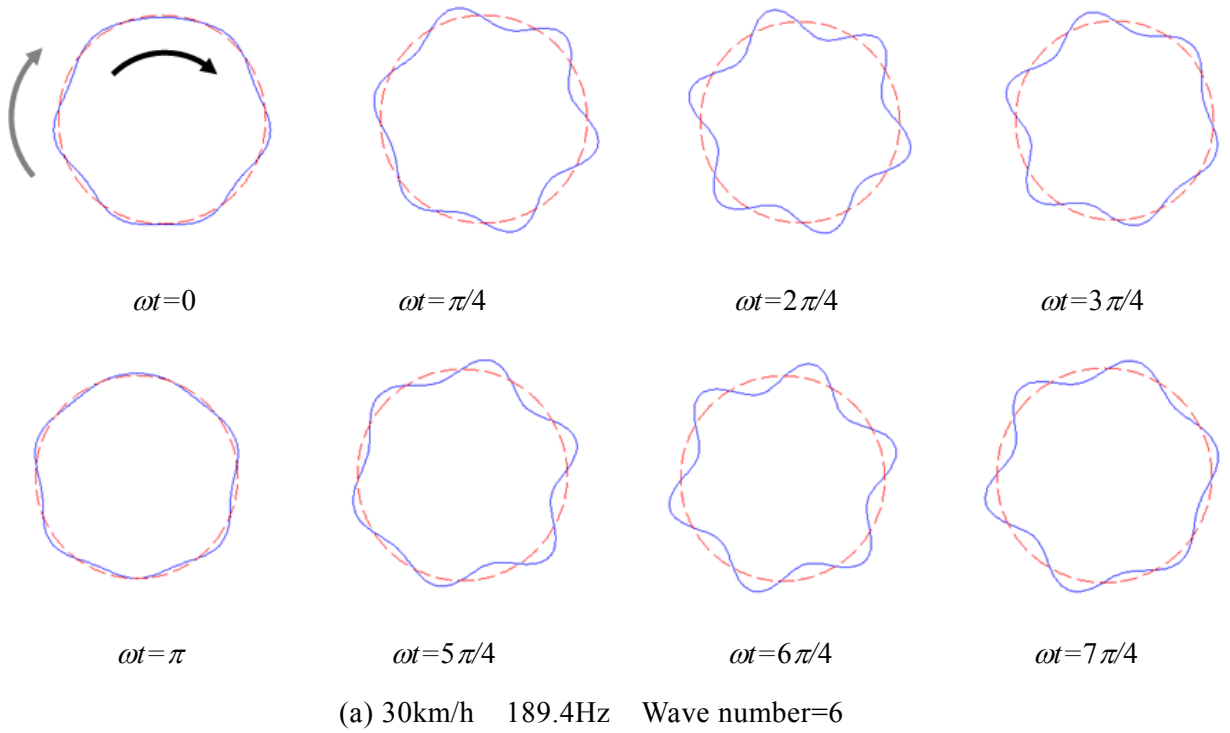


Fig.6.20 Analytical result of mode shapes in contact and rolling condition at 9th mode



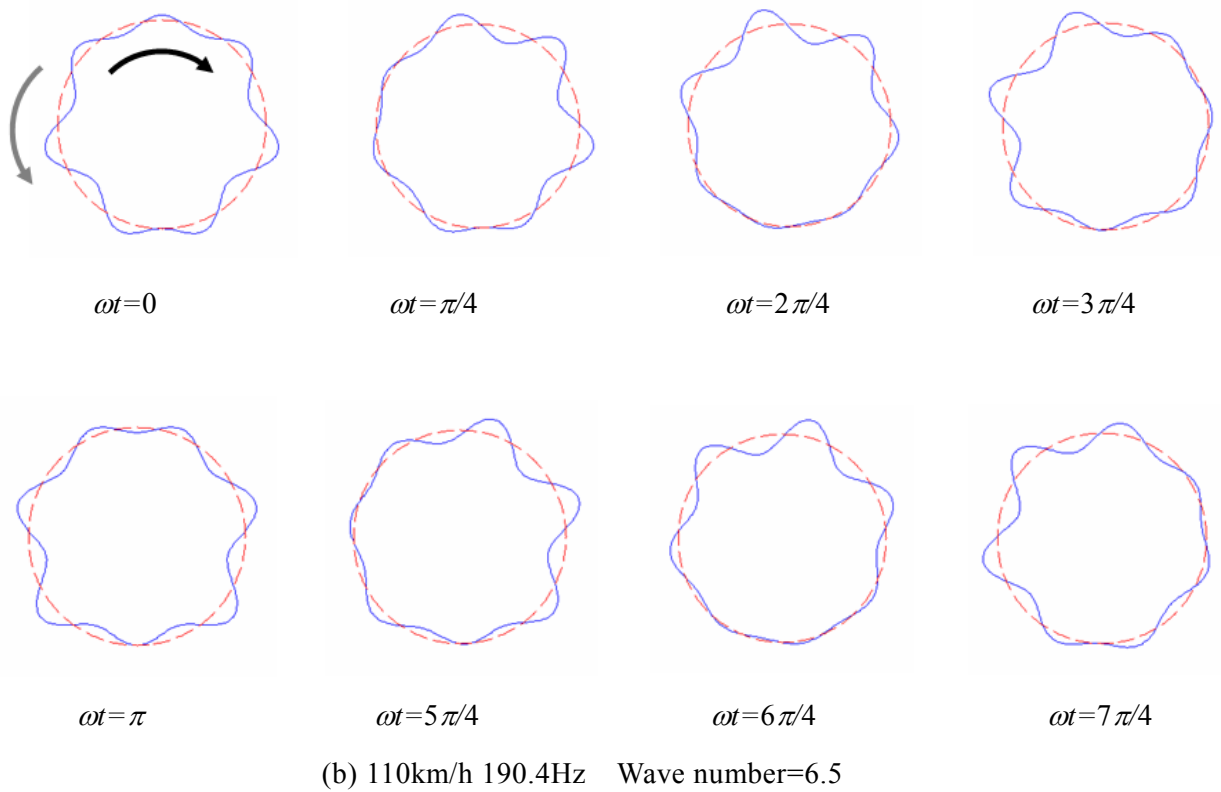


Fig.6.21 Analytical result of mode shapes in contact and rolling condition at 10th mode

6.4 結言

接地・転動時における振動挙動解析を実施し、以下の知見を得た。

1. 接地・転動時の振動特性はレセプタンス法を用い、非接地・転動時の固有モードの重ね合わせで評価できる。
2. 接地・転動時のモード形状における周方向波数は近傍に存在する非接地時の固有モードの影響を強く受ける。
3. 接地・転動時の振動波形の移動方向は重ね合わせに寄与する進行波および後退波の成分の大きさから決定される。
4. 接地時固有モードの近傍に存在する非接地モードはタイヤが転動することで発生するコリオリ力の影響を受け変化する。
5. 固有振動数を解析する際、解析精度に影響を及ぼすのは採用モード数であり、採用モード数が同一であれば解析精度に対する影響は小さい。また、転動速度の違い

いによる固有振動数変化は微小である．

6. 接地・転動時における 1 次モードは近傍の非接地・転動時 1 次モードの影響を強く受けるため，定在波が励起される．さらに，接地・転動による 1 次固有振動数低下の主因はゴムの剛性変化によるものであることが明らかとなった．

参考文献

- (1) 上玉利 恒夫, “ラジアルタイヤの振動特性 (第 1 報)”, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.851, Paper-No.851031, pp.155-160, (1985)
- (2) J. T. Tielking, “Plane vibration Characteristics of a Pneumatic Tire Mode”, *SAE paper*, Paper-No.650492, (1965)
- (3) Y.T. Wei, L. Nasdala, H. Rothert, “Analysis of forced transient response for rotating tire using REF models”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.320, pp.145-162, (2009)
- (4) 本田 善久, 松久 寛, 佐藤 進, “空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.54, No.507, pp.2610-2617, (1988)
- (5) 小泉 孝之, 辻内 伸好, 松原 真己, 松山幸司, 相川将隆, 大島裕子, “回転効果に着目したタイヤ回転時における振動挙動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.77, No.777, pp.2018-2029, (2011)
- (6) M. Matsubara, T. Koizumi, N. Tsujiuchi, Y. Hirano, F. Nakamura, “The Effect of Contact Patch Restriction for Tire Vibration Characteristics”, ISMA 2012 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD 2012, pp.1595-1602, (2012)
- (7) 佐口隆成, “タイヤ固有振動数に与える回転の影響について”, 自動車技術会シンポジウムテキスト, Paper-No.9840829, (1998)
- (8) S. C. Huang, W. Soedel, “Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem, *Journal of Sound and Vibration*”, Vol.118, No.2, pp.253-270, (1987)

第7章 結論

7.1 研究成果

本論文ではロードノイズに関するタイヤ振動特性を予測する上で重要となる、タイヤモデルの構築及び接地・転動時のタイヤ振動特性の変化要因について解明した。以下、その要点をまとめる。

第1章では、研究の背景について述べるとともに、タイヤ振動に関する解析技術の現状と課題、論文の構成を述べた。それらは次のようにまとめられる。

- (1) タイヤ業界において、製品の環境負荷低減を目指した取り組みの活動の結果として、タイヤの軽量化が進み、車両 NVH 性能へのタイヤ振動の影響が大きくなっている。
- (2) タイヤに起因する振動騒音問題の対策のため、車体メーカーとしては車両 NVH 性能予測を行い、サスペンションとタイヤの連成振動を回避できるようなタイヤ振動特性への要求品質の抽出が重要となる。タイヤメーカーとしては車体メーカーの要求品質に適合するタイヤ振動特性を迅速かつ効率的に設計する必要がある。両者においてタイヤモデルを用いた解析技術の開発は重要といえる。
- (3) タイヤ振動挙動の解明に特化した場合には、従来広く用いられている有限要素法による数値シミュレーションより力学モデルによる解析の方が優位である。タイヤの力学モデルの開発は多くの研究が行われているが、タイヤ振動特性を包括して解析できるモデルは存在しない。
- (4) 車両 NVH 性能予測においては、実稼動状態におけるタイヤ振動特性及び路面入力を如何に表現するかが鍵となる。しかしながら、タイヤ振動特性に着目すると非接地・非転動時と接地・転動時ではその特性が変化する。このときに発生する回転効果、接地拘束、また両者が複合する場合において、これらの境界条件の動力学的な変化がタイヤ振動特性に与える影響について研究した事例はほとんどない。以上のようにタイヤ振動特性の研究に関する課題を挙げ、第2章以降ではそれら課題を解決するための研究を行った。

第2章では、非接地・非転動時におけるタイヤ振動特性を実験モード解析から明らかにした。

- (1) 径方向モード、横曲げモードのモード形状を実験モード解析より明らかにした。

- (2) 半径方向と周方向振動に対する特徴分析から、横曲げモードが不伸張変形仮定の条件を満たしていることを確認した。

第3章では非接地・非転動時のタイヤ振動特性について Rayleigh の方法による理論解析により解明した。それらは次のようにまとめられる。

- (1) 円筒シェル理論に基づき、横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードを評価できるタイヤの力学モデルを構築した。構築した力学モデルを基に運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを導出し、Rayleigh の方法から各振動モードの固有振動数の式を導出した。固有振動数の実験値と解析値を比較し、導出した理論の妥当性を確認した。
- (2) 構築した力学モデルを用いれば、タイヤ構造部材の剛性について、各振動モードに対する寄与度を算出できることを確認した。
- (3) 径方向モード、横曲げモードは曲げ、振りに関する振動を無視できることを明らかにした。また横並進モード、面内振りモードおよび径方向モード、横曲げモードの各1次モードはトレッド部が剛体運動する振動モードであり、タイヤ振動は膜振動の挙動であることを明らかにした。

以上のように横並進モード、面内振りモード、径方向モード、横曲げモードを解析的に同時に考慮可能な力学モデルを開発し、その妥当性を確認した。

第4章では、非接地・転動時における径方向モードの振動に関するタイヤ振動特性を振動試験より把握し、Hamilton の原理より運動方程式を導出することで回転効果の影響を理論解析により解明した。それらは次のようにまとめられる。

- (1) 転動時のタイヤにおいて、異なる周波数に対して2次以降の同一モードの移動波が発生することを実測により明らかにした。
- (2) Hamilton の原理より、非接地・転動時における固有振動数の式を導出した。タイヤ固有振動数の実験値と解析値が定性的に同様の傾向を示すことを確認した。
- (3) 慣性座標系から見たモードにおいてコリオリ力とドップラー効果は移動波の励起と固有振動数の分離に影響を与え、遠心力は固有振動数の増加に影響を与えることを解明した。
- (4) 慣性座標系から見た1次モードは遠心力の影響を受けず、コリオリ力とドップラー効果の影響がキャンセレーションすることで見かけ上、回転効果の影響が現れないことが明らかとなった。

以上のように径方向モードについて非接地・転動時のタイヤ振動特性の理論を導出し、

その妥当性を確認した。

第5章では、接地・非転動時における径方向モードの振動に関するタイヤ振動特性を実験モード解析より把握し、レセプタンス法を用いて接地拘束の境界条件を含む振動解析を行った。それらの結果は次のようにまとめられる。

- (1) 接地・非転動時の振動特性変化は接地面拘束によるモード形状変化によるものである。非接地時の固有振動数 $1, 2, 3 \dots$ 次に対して周方向波数が $1, 2, 3 \dots$ となるのに対して、接地時においては、周方向波数が $1.5, 2.5, 3.5 \dots$ となる。
- (2) 接地・非転動時の固有振動数は非接地・非転動時の固有振動数に周方向波数（固有関数）を定義することで簡易的に評価できる。
- (3) レセプタンス法より、接地・非転動時のモード形状および固有振動数は非接地・非転動時の自由振動解の重ね合わせで評価できる。
- (4) 固有振動数の解析による予測法を4つ提案し、その予測精度について比較した。

その結果、レセプタンス法の非接地・非転動時の周波数応答関数における卓越ピークに基づき採用モード数を決定する方法が優位であった。また、固有関数定義による方法はレセプタンス法における近傍2つのモードを採用する方法と同程度の予測精度であることがわかり、簡易的な評価として十分であるとわかった。

以上のように径方向モードについて接地・非転動時のタイヤ振動特性について理論式を導出し、その妥当性を確認した。

第6章では、接地・転動時における径方向モードの振動に関するタイヤ振動特性を第4章、第5章で用いた理論を基に解析を行った。そして回転効果および接地拘束の影響が複合する境界条件がタイヤ振動特性に与える動力学的な影響について解明した。それらは次のようにまとめられる。

- (1) 接地・転動時の振動特性はレセプタンス法を用い、非接地・転動時の固有モードの重ね合わせで評価できる。
- (2) 接地・転動時のモード形状における周方向波数は近傍に存在する非接地時の固有モードの影響を強く受ける。
- (3) 接地・転動時の振動波形の移動方向は重ね合わせに寄与する進行波および後退波の成分の大きさから決定される。
- (4) 接地・転動時の振動モードの励起周波数近傍に存在する非接地・転動時の振動モードはタイヤが転動することで発生するコリオリ力の影響を受け変化するため、接地・転動時の振動モードも同様に影響を受け変化する。

- (5) 固有振動数を解析する際、解析精度に影響を及ぼすのは採用モード数であり、採用モード数が同一であれば転動速度の解析精度に対する影響は小さい。
- (6) 接地・転動時における1次モードは近傍の非接地・転動時1次モードの影響を強く受けるため、定在波が励起される。さらに、接地・転動による1次固有振動数低下の主因はゴムの剛性変化によるものであることが明らかとなった。

以上のように径方向モードについて接地・転動時のタイヤ振動特性について理論式を導出し、実稼動時のタイヤ振動特性を解明した。

本論文では約200Hz以下の非接地・非転動時のタイヤ振動特性を評価できる力学モデルの開発について述べた。また、径方向モードに着目し、非接地・転動時、接地・非転動時、接地・転動時におけるタイヤ振動特性の理論解析について述べた。これら研究はタイヤの振動解析に大きく寄与し、タイヤ設計の効率化およびタイヤモデルを用いた振動予測技術の精度向上が期待できる。

7.2 今後の展望

これまでの研究においては、非接地・非転動時における基本的なタイヤ振動特性に関するモデリング技術の開発、接地・転動時におけるタイヤ振動特性の解明について取り組んだ。今後は解明した力学特性を基に、任意路面走行時の車軸振動予測法の開発、車両NVH性能予測技術への本タイヤモデルの適用、振動騒音の具体的対策立案の指針を与える振動解析技術の開発が進むものと考えられる。主な課題について以下に述べる。

- (1) 車軸振動を予測する場合、車軸振動からの逆問題を解き、入力を同定する方法が一般的である。しかしながら、伝達経路であるタイヤのモデル化が必要であり、モデルに依存し、入力特性が変化することになる。先行研究において微小突起物に小型歪み力センサを仕込み、タイヤ突起乗り越し時の力を計測する方法が提案されており、入力特性を直接計測する方法が試みられている。しかしながら、同定した入力はトレッド部その他を変形させるため、静的な力と振動を励起させる動的な力の重ね合わせで計測されており、現在これらを分離する方法がない。そのため、計測した路面入力から動的入力を抽出する技術の開発が必要である。それにより、突起高さ、転動速度違いによる路面入力を推定する手法が提案され、任意路面の車軸振動を予測する技術が確立されると予想される。

- (2) タイヤ構造体振動の他に空洞共鳴と呼ばれる特殊な振動が存在する。これはタイヤ内部気体の音響共鳴によってタイヤ振動が励起されるものである。空洞共鳴は車軸荷重、転動速度により共振周波数が変化するが、この発生メカニズムは未だ解明されていない。タイヤ空洞の音響モデルを構築し、その振動特性について明らかにすることが必要である。それにより、300Hz以下の卓越した車軸振動を励起するタイヤの振動モードの全てがモデル化されることになり、さらに高周波の振動特性を解析し予測することが可能となる。
- (3) タイヤを含め周期形状構造体の設計においては、三次元上で設計していくよりも二次元の断面形状で設計していくことが効率的である。しかしながら、具体的な振動騒音対策を講ずる場合、構造部材変更に伴う剛性設計自由度は多くない。特にタイヤにおいては断面設計段階において、タイヤ全体の振動挙動がどのように変化するかについては考慮しておらず、抜本的な対策検討を行うことは難しい。そこで、断面形状変更に伴い、タイヤ固有振動数がどのように変化するかを予測する方法が必要である。すなわち、タイヤ構造の詳細な断面設計とタイヤ振動特性を関係づけることが実用的なタイヤ振動特性のコントロール技術の課題といえる。

以上のように、タイヤ開発、車両開発における振動騒音に関する課題は数多くあるが、ここに挙げた課題は一部である。今後も加熱するタイヤ業界、自動車業界内の競合他社との差別化の中で、製品開発におけるシミュレーション技術の役割はますます重要度を増している。限られた開発期間の中では振動騒音問題の本質を理解し易い低次元に落とし込むことで問題点を明確化し、数値シミュレーション等を利用し迅速に製品開発していくことが研究者・開発者に求められる技術である。本研究で得た成果を発展させ、次世代のタイヤ構造の設計法および車両NVH性能予測技術の開発に役立て、本研究に限らず社会に還元できる技術の研究・開発に今後も携われるよう一層奮闘努力していく所存である。

謝辞

本論文を書き終えるにあたり、本研究の遂行およびまとめに至るまで懇切丁寧なご指導、ご鞭撻を賜りました、本学理工学部 小泉孝之教授に謹んで深甚の感謝をささげます。退官年度のぎりぎりまでお世話になりました。また、本研究を遂行するに当たって細部にわたりご指導頂きました、本学理工学部の辻内伸好教授に重ねて御礼申し上げます。小泉・辻内研究室には学部および大学院の計6年間在籍致しました。浅学非才である著者がこのように博士論文をまとめることが出来たのは、研究に対する姿勢、考え方のみならず、技術者、研究者、教育者としてのあり方について小泉孝之教授、辻内伸好教授より学べたからに他なりません。心より感謝致します。また、本論文を執筆するにあたり、有益なご指導頂きました本学理工学部の青山栄一教授に心より御礼申し上げます。

本研究は、学部生のときに担当致しましたタイヤ振動に関する研究において、知り得ました疑問や課題、すなわち、動的条件下におけるタイヤ振動特性の変化はなぜ起こるのか、また如何にして静的条件下の振動特性から動的条件下の振動特性を推定することが出来るか、に端を発しております。企業との共同研究と自主研究を通し、上述の疑問を僅かながら解明するに至りました。今回、その成果を博士論文としてまとめることができたのは、多くの方々の支えと御協力があつてのものと深く感謝しております。

本研究において必要不可欠なタイヤを快く提供して頂いたばかりでなく、研究所の設備を快く使用させて頂き、また、多大なるご協力、ご指導を頂きました東洋ゴム工業株式会社先行技術開発部の山下修様、森川幸則様、森口金也様、大石克敏様、岩瀬雅則様、岩ヶ瀬泰文様に厚く御礼申し上げます。また、実験の方法から実験結果に対する考察の仕方に至るまでご指導頂きました松山幸司様、尾藤健介様、私の些細な疑問や質問にいつも快く答えてくださった榊原一泰様、細見和正様、高橋尚史様はじめ同社の皆様方に厚く御礼申し上げます。

本研究は、著者が東洋ゴム工業株式会社エンジニアリングセンターにて就業しているときに自己啓発の一つとして始めたものでもあります。仕事をする中で身に付けた技術者としての観察力、分析力、実践力は研究を遂行する上で非常に有益なものでした。多田羅哲夫執行役員エンジニアリングセンター長、エンジニアリングセンター生

産技術開発部の田中利幸部長，中谷勝博課長，佐藤麻里枝課長には本研究を行う機会と多方面にわたるご支援を頂きました。また，私のような若輩者を技術者として教育・訓練頂きましたエンジニアリングセンターの皆様方に，謹んで深い感謝の意を表わします。

本研究の実験及び解析するにあたり，元本大学院博士課程前期の中川博貴様には基本的な振動理論からタイヤ振動に至るまでご指導賜りました。また，第4章においては元本学学部生の相川将隆様，第5，6章においては本年度本大学院博士課程前期の平野裕也様とは互いに意見を主張し，深く議論し合い，実験や解析をはじめ多大なる協力をして頂き研究を進めることができました。本学嘱託講師の大島裕子博士には第2章における実験データの平滑化及び分析についてご指導頂きました。京都大学 土屋和雄名誉教授，同志社大学 高岡正憲教授，電気通信大学 船戸徹郎助教からは円環リングによる簡易力学モデルを用いた解析に関するヒントと多くの有益な知識を得ることができました。小泉・辻内研究室出身であるキャタピラジャパン株式会社の安藤博昭博士，ヤンマー株式会社の上原洋志博士，山梨大学 伊藤彰人助教，首都大学東京 林祐一郎助教，元本大学院博士課程前期の中村文哉様，元本学学部生の清水俊雅様，藤牧陽一様，本年度本大学院博士課程後期の足立渡様，吉田達哉様，明井政博様および小泉・辻内研究室の皆様におきましては日々の学生生活の中から有意義な知識や知恵を頂きました。心より御礼申し上げます。

最後に，不肖者の私をいつも見守り，何不自由ない学生生活を送らせてくれた両親といつも応援してくれた兄，姉と親族，また友人に，ここに私の学生生活の集大成である博士論文が完成したことを報告すると共に，心から深く御礼申し上げます。

2013 年 11 月 22 日
同志社大学京田辺キャンパス
有徳館東館 418 号室にて

松原 真己