博士学位論文審査要旨

２０１３年9月３日

論文題目： Studies on Mathematical Structures of Network Optimization Problems （ネットワーク最適化問題の数学的構造に関する研究）

学位申請者: 渡辺　扇之介

審査委員：

主　査：　同志社大学大学院理工学研究科　教授　渡邊　芳英

副　査：　龍谷大学理工学部　教授　松木平　淳太

副　査：　同志社大学大学院理工学研究科　教授　齋藤　誠慈

要　　旨：

本論文は，理論上も応用上も極めて重要な問題であるグラフ上のネットワーク最適化問題のいくつかについて，その数学的構造を様々な観点から調べることを目的としている．

本論文ではまず最大流問題を取り上げる．最大流問題においては，最大流最小カットセット定理がよく知られているが，これを線形計画法の双対性の観点から説明することを目指す．しかし，最大流問題の線形計画法による通常の定式化から双対問題を作っても、双対問題の解として最小カットと最小カットセットは現れない．提出者は最大流問題の最小費用循環問題としての定式化を用いることにより，その双対問題の解に最小カットと最小カットセットが現れることを実例により検証した．次に最大流問題は，フロー整数定理により整数計画問題とみなせることに注目すれば，トーリックイデアルのグレブナー基底を用いて解くことができる．トーリックイデアルのグレブナー基底の計算を行うには，整数核の格子基底から出発して Hosten-Sturmfels のアルゴリズムによるが，その計算量はサイズが小さい問題に対しても膨大となる．そこで，計算に必要なグレブナー基底をグラフの組合せ論的な性質で特徴づけることを考え，最終的には，必要なグレブナー基底が，ネットワークの閉路および始点から終点に至る道の接続ベクトルに対応する２項式全体からなることを示した．さらにその帰結として，グラフの接続行列から始点と終点に関する行を除いた行列の整数核に関する興味深い結果を導いた．

最後に，Min-Plus 代数に値をもつ行列は，あるグラフの重み付隣接行列とみなすことができることに注目し，このような行列の固有値は，ある条件のもとでは一つだけであり，行列に付随するネットワークにおける平均閉路重みの最小値として実現され，固有値に属する固有ベクトルは，行列の各成分から固有値を引いた行列に付随するネットワークの最短距離行列の列ベクトルとして現れることを示した．

以上本論文は，幾つかのグラフ上のネットワーク最適化問題の構造について，興味深い数学的構造を明らかにしており，博士（理学）（同志社大学）の学位論文として十分な価値を有すると認められる．

総合試験結果の要旨

２０１３年9月３日

論 文 題 目：Studies on Mathematical Structures of Network Optimization Problems （ネットワーク最適化問題の数学的構造に関する研究）

学位申請者：渡辺　扇之介

審 査 委 員：

主　査：　同志社大学大学院理工学研究科　教授　渡邊　芳英

副　査：　龍谷大学理工学部　教授　松木平　淳太

副　査：　同志社大学大学院理工学研究科　教授　齋藤　誠慈

要　　旨：

本論文提出者は２０１０年３月同志社大学大学院工学研究科電気電子工学専攻博士課程（前期課程）を修了後，本学大学院工学研究科数理環境科学専攻博士課程（後期課程）に在籍している．

本論文の主たる内容はJapan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 同志社大学理工研報告などに掲載され，また国際会議 ICIAM2011，EASIAM2013 などで発表されて，既に十分な評価を得ている．

２０１３年8月２３日１３時３０分よりおよそ１時間３０分にわたり提出論文に関する学術講演会が行われ，論文の内容に関する種々の質疑応答があり，そのなかで，論文提出者の丁寧な説明により，論文に対する十分な理解が得られた．

講演会終了後，審査委員により，論文に関連した諸問題につき，口頭試問を実施した結果，提出者が十分な学力を有していることを確認することができた．提出者は大学院在学中に，本学での語学試験（英語）に合格しており，さらに，主論文を英語で執筆し，国際学会で２件の英語による講演を行っており，英語の学力は十分と認められる．また，スペイン語については，提出者は，本学在学中に単位取得しており、スペイン語の学力も十分と認められる．

よって総合試験の結果は合格であると認める．

博 士 学 位 論 文 要 旨

論 文 題 目： Studies on Mathematical Structures of Network Optimization Problems
(ネットワーク最適化問題の数学的構造に関する研究)

氏　　名： 渡辺　扇之介

要　　旨：

組合せ最適化問題の一つであるネットワーク最適化問題は物流や通信網として広く社会に応用されており，様々なネットワーク最適化問題に対して，組合せ論的アルゴリズムの開発や数学的構造の研究がされている．本論文では，ネットワーク最適化問題の数学的構造について議論する．本論文の主な結果は次の二つから成る．

(i) グレブナー基底を通した最大流問題の数学的構造

グレブナー基底は多項式イデアル論における様々な問題を解くための道具として提唱され，近年では様々な計算代数システムに実装されており，計算代数の分野においても有名な道具となっている．我々はグレブナー基底が様々な組合せ問題，特に組合せ最適化問題に応用されることに注目した．研究の対象とした問題はネットワーク最適化問題の一つ，最大流問題である．グレブナー基底を使った組合せ最適化問題への応用を考える際，重要な役割を果たすのが，整数計画問題に対して適用されるコンチ・トラベルソのアルゴリズムである．よって，本論文では，まず最大流問題の整数計画問題としての定式化を与える．さらに，コンチ・トラベルソのアルゴリズムはトーリックイデアルのグレブナー基底を使って，最大流問題を解くのだが，その際には，グレブナー基底そのものの計算をする必要がある．グレブナー基底計算はブフバーガーのアルゴリズムを使うことが標準的であるが，この計算量は非常に大きいものである．実際，最大流問題に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底の計算について，単純な例でも，大変な時間がかかることが計算実験で示されている．そこで，我々は最大流問題に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底を直接計算ではなく，グラフの構造から決めることを考えた．そして，結果として，最大流問題に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底はユニバーサルグレブナー基底となり，それはグラフの全ての閉路と始点と終点を結ぶ道の接続ベクトルに関する二項式から成ることを示す．さらにこの結果に加えて，最大流問題の縮小接続行列に付随するトーリックイデアルについても考える．我々は有向グラフにいくつかの仮定を加えたもとで，縮小接続行列の整数核は始点と終点を結ぶ有向道の接続ベクトルから生成されることを証明した．我々が示した結果が最大流問題に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底計算において効果を示すがどうかを確かめるには，計算代数システムを用いて有向グラフの閉路と道を数え上げなければならない．現在，閉路や道を数え上げる方法については知られておらず，今後の課題となる．

(ii) Min-Plus 代数における行列の固有値問題

Min-Plus 代数とは二つの演算“min”と“+”を持つ実数に無限大を加えた集合で定義される，べき等な準環の例であり，様々な数学の分野で議論される．線形代数において使われる多くの法則や手法は，Min-Plus 代数においても同様に使うことができる．また，その演算の性質上，ネットワーク最適化問題と相性がよい．しかし，このような方向の研究はまだ十分にされてはいない．本論文では，Min-Plus 代数に値を持つ行列の固有値問題を考え，固有値とそれに属する固有ベクトルをグラフ上のネットワークにおける性質で特徴づける．まず，Min-Plus 代数に値を持つ行列に付随するネットワークを定義する．そして，我々はネットワークの閉路の最小平均重みが行列の固有値となることを示す．さらに，固有値に属する固有ベクトルが，もとのネットワークの各辺の重みから固有値の値を引くことでできる新しいネットワークの最小距離行列の

列ベクトルに現れることを示す．また，ネットワークの閉路の最小平均重みが唯一の固有値であることも示す．最後には，右固有値と左固有値が一致することについて議論する．

また，本論文では，上記の二つの主結果に加えて，いくつかのネットワーク最適化問題に新たな数学的構造を与える．
まず，ネットワーク最適化問題の代表例である最短路問題に線形計画問題としての定式化を与える．最短路問題とは，ネットワークの中で最もその重み（または長さ）が小さい道を見つける問題で，おそらくネットワーク最適化問題の中で最も単純な問題であり，多くの組合せ論的アルゴリズムが知られている．この結果は最短路問題を最小費用流問題の特殊ケースと見ることで得られ，大きな結果ではないかもしれないが，非常に解くことが難しい問題とされる，最短路問題と目的が逆である最長路問題へのアプローチとなる．
さらに，本論文では，組合せ最適化問題において有名な定理である最大流・最小カットセット定理を，最大流問題の線形計画問題として定式化と，その双対問題を作ることによって説明している．計算実験の結果，線形計画問題として定式化した最大流問題の双対問題の解は(0,1)ベクトルとなり，最小カットセットを表すものとなっている．しかし，一般に，線形計画問題の双対問題もまた，線形計画問題であるのに対し，なぜ最大流問題の双対問題の解が(0,1)ベクトルとなるかについてはまだわかっておらず，今後の研究課題として残る．