

ベクトルと行列の基礎

— 計量分析の方法（1） —

小林 久高

KOBAYASHI Hisataka

1 はじめに

社会学において計量分析を行おうとすると、2つの壁にぶつかる。1つは理論的な基礎についての壁であり、もう1つは具体的な技法についての壁である。理論的な基礎については各人がそれぞれ勉強すればいいのだが、テキストを読んでも肝心のところが飲み込めないことが多い。具体的な技法については「徒弟修業」をしなければ細かいノウハウまで身につくものではない。

そこで今回から数回のシリーズで、このような壁を取り除く作業を行いたい。シリーズの内容は計量分析全般に渡り、理論的な基礎と実的な技術双方を含む。

今回は計量分析の基礎となる線形代数の基本的な部分をまとめておく。かなりややこしいところもあるが、こういった理屈が計量分析の背後にあることを理解しておくことは重要だ。今回述べるベクトル、図形、行列の知識があると、多変量解析で行われていることが具体的にイメージできるようになる。それゆえ、SPSSなどの統計パッケージに振り回されることも少なくなる。

2 ベクトル

2.1 ベクトルとその大きさ

（1）ベクトルとは

大きさと向きをもつ量をベクトルという。通常の数量はベクトルに対してスカラーという。ベク

トルは通常太字の小文字で記述し、次のように成分表示できる。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

成分は縦に並べても横に並べてもいいが、上のように、縦に並べたほうが便利ことが多い。本稿では、通常、縦に並べたベクトルを \mathbf{a} などと表記する。

（2）ベクトルの大きさ

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{のとき、}\mathbf{a} \text{の大きさ（長さ・ノルム）}\|\mathbf{a}\|$$

については、 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$ が成り立つ。

2成分からなるとき、これはピタゴラスの定理を表している。3成分でも、ピタゴラスの定理から証明できる。

2.2 ベクトルの和・差・スカラー倍

ベクトルの和・差・スカラー倍は次のように行う。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.3 ベクトルの内積

(1) ベクトルの内積とは

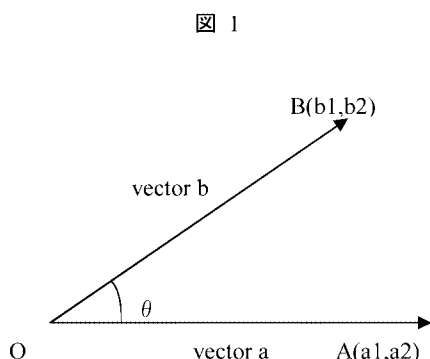
次のものをベクトルの内積という。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

両者が等しいことは余弦定理を用いて証明できる。2次元のかんたんな場合の解説は次のとおり。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とする。



図より

$$OA^2 = a_1^2 + a_2^2, OB^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$AB^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$$

$$2OA \cdot OB \cos \theta = OA^2 + OB^2 - AB^2$$

$$2OA \cdot OB \cos \theta = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$OA \cdot OB \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(2) 内積に成り立つルール

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2$$

$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), (k \in \mathbf{R})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0, \text{特に、} \mathbf{a} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$$

(3) 内積と相関係数

統計学に登場する相関係数と内積には密接な関係がある。x と y がともに（平均が 0 に調整された）平均偏差得点からなる変数のベクトルだとして（n 人の場合は n 成分のベクトルとなる）。そのとき、相関係数をベクトルの内積と距離で表現すると次のようになる。

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

したがって、内積と相関係数の間には次の関係がある。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = r_{xy} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

ところで、ベクトル間の角度 θ を使った内積の定義を利用すると次の式が導ける。

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

したがって、2つの変数ベクトルが作る角度の余弦は相関係数に等しい。

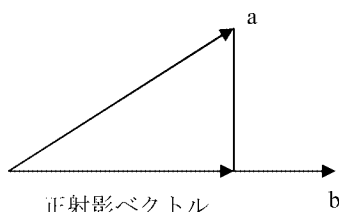
2.4 正射影ベクトル

(1) 正射影と正射影ベクトル

\mathbf{b} に垂直の方向から光がさしているときに \mathbf{a} に

できる影を **a** の **b** 上への正射影という。

図 2



a の **b** 上への正射影について次のことが言える。

$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ と置いたとき、

正射影の長さは $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b$

正射影ベクトルは $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b$

(2) 証明

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

正射影の長さは、

$$\|\mathbf{a}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b$$

したがって、正射影ベクトルは、

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

3 楕円・直線・平面

3.1 楕円の公式

楕円とは、2つの焦点からの距離の和が一定である点の集合である。式は次のようになる。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

楕円の式がこういったものであることを理解しておく、2変量正規分布、ひいては多変量正規分布を考える際に役立つ。

表 1

	$a > b$	$b > a$
中心	0	0
焦点	$F1(c, 0),$ $F2(-c, 0)$ $c^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$	$F1(0, c),$ $F2(0, -c)$ $c^2 = \sqrt{b^2 - a^2}$
曲線上の点と焦点の距離の和 PF1+PF2	2a	2b
長軸の長さ	2a	2b
短軸の長さ	2b	2a

ついでに、空間における直線、空間における平面の方程式についても述べておこう。

3.2 空間における直線の方程式

(1) 記号

動点 P (直線上の点) : (x, y, z)

定点 O (原点) : $(0, 0, 0)$

定点 A (通過点) : (x_0, y_0, z_0)

方向ベクトル : $\vec{d} = (l, m, n)$

媒介変数 : t

(2) 直線のベクトル方程式

直線 L : $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d}$

(3) 直線の方程式 (媒介変数表示)

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

(4) 直線の方程式 (標準形)

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} (=t)$$

3.3 空間における平面の方程式

(1) 記号

動点 P (平面上の点) : (x, y, z) 定点 O (原点) : $(0, 0, 0)$ 定点 A (通過点) : (x_0, y_0, z_0) 媒介変数 : s, t 方向ベクトル : $\begin{cases} \vec{d}_1 = (l_1, m_1, n_1) \\ \vec{d}_2 = (l_2, m_2, n_2) \end{cases}$

$$(\vec{d}_1 \neq \vec{0}, \vec{d}_2 \neq \vec{0})$$

(2つの方向ベクトルは平行でない)

法線ベクトル : $\vec{h} = (a, b, c)$

(2) 平面のベクトル方程式

$$\text{平面 } \alpha : \vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{d}_1 + t\vec{d}_2$$

(3) 平面の方程式 (媒介変数表示)

$$\begin{cases} x = x_0 + sl_1 + tl_2 \\ y = y_0 + sm_1 + tm_2 \\ z = z_0 + sn_1 + tn_2 \end{cases}$$

(4) 平面の方程式 (標準形)

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

ここで、定数をまとめて d とおけば、

$$ax + by + cz + d = 0$$

(5) 3点 P($p, 0, 0$), Q($0, q, 0$), R($0, 0, r$) を通る平面の方程式

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \quad (pqr \neq 0)$$

4 行列

4.1 行列・零行列

(1) 行列

行列とは数字が縦横に並んだもので、太字の大文字で示されることが多い。横の並びを行、縦の並びを列という。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} は 2×3 行列 (2行3列の行列) であり、 \mathbf{B} は 3×2 行列 (3行2列の行列) である。行と列を間違えないように。

(2) 零行列

すべての成分が 0 の行列を零行列という。

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 正方行列・単位行列・対称行列

(1) 正方行列

行数と列数の等しい行列を正方行列という。これは $n \times n$ 行列 (n 次正方行列) となる。

(2) 単位行列 ($n \times n$)

左上から右下への対角線の成分が 1 でそれ以外が 0 の行列を単位行列という。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 対称行列 ($n \times n$)

左上から右下への対角線に関して対称となっている正方行列を対称行列という。下のように対角線の値はそろっていなくても対称行列である。

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

相関行列は対称行列であることをここで思い出しておこう。

4.3 行列の和とスカラー倍

(1) 行列の和

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}$$

(2) 行列の差

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-j & b-k & c-l \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{bmatrix}$$

(3) 行列のスカラーλ倍

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h & \lambda i \end{bmatrix}$$

(4) 行列の和とスカラー倍の性質

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (\text{結合法則})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交換法則})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{O}$$

$$1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$$

$$(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$$

4.4 行列の積

(1) 行列の積

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aj+bm+cp & ak+bn+cq & al+bo+cr \\ dj+em+fp & dk+en+fq & dl+eo+fr \\ gj+hm+ip & gk+hn+iq & gl+ho+ir \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ag+bi+ck & ah+bj+cl \\ dg+ei+fk & dh+ej+fl \end{bmatrix}$$

(2) 行列の積の可能性とベクトルの内積

$m \times n$ 行列と $s \times t$ 行列がある場合、積が可能なのは $n=s$ のときだけだ。積の結果出来上がるのは $m \times t$ 行列である。

ベクトルの内積とは、2つのベクトルを1行 n 列の行列と n 行1列の行列にして、行列の積を出したものと考えられる。結果としてスカラー量が算出される。

(3) 行列の積の性質

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{結合法則})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{分配法則})$$

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (分配法則)

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (一般に=が成り立つわけではない)

$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$ (交換法則成立の特殊ケース)

$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$ (交換法則成立の特殊ケース)

$\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ かつ $\mathbf{Y} \neq \mathbf{O}$ でも $\mathbf{XY} = \mathbf{O}$ となることがある。 \mathbf{X} と \mathbf{Y} は零因子と呼ばれる。

(4) スカラー行列

$$\lambda \mathbf{E} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

とするとき、 $\lambda \mathbf{E}$ をスカラー行列という。スカラー行列については、 $\lambda \mathbf{EA} = \mathbf{A} \lambda \mathbf{E} = \lambda \mathbf{A}$ が成り立つ。

(5) 転置行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ のとき、}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ を } \mathbf{A} \text{ の転置行列という。転置}$$

行列については、

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

が成り立つ。これはさまざまなところで用いるとても重要な性質である。

(6) ベクトルの内積

転置行列の表現を用いると、ベクトルの内積は次のように書ける。

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

また、ベクトルのノルムについては次のようになる。

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$$

4.5 行列の列ベクトルへの分割表記

行列を列ベクトルや行ベクトルで表記することがある。列ベクトルで表記すると、たとえば次のようになる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]$$

5 逆行列・正則行列・行列式

5.1 逆行列

(1) 逆行列と正則行列

正方行列 \mathbf{A} について、

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

となるとき、 \mathbf{A}^{-1} は \mathbf{A} の逆行列という。

逆行列のある行列を正則行列という。

(2) 2次正方行列の逆行列と行列式

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

このとき、 $|\mathbf{A}| = ad - bc$ を \mathbf{A} の行列式という (絶対値ではなく行列式)。

行列式は、その行列を構成する列ベクトルの作り出す平行四辺形の (符号付) 面積である。それはまた、線形変換 (後述) 前後の面積の (符号付) 拡大率とも考えられる。このことを頭に入れておくと、以下で登場する同値関係が理解しやすい。

5.2 余因子と逆行列

(1) 余因子

2×2 の行列よりも大きな行列の逆行列を求めるためには余因子について知っておく必要がある。紹介だけしておこう。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{があると}$$

き、 i 行と j 列を取り除いた行列 ($n-1$ 次の正方行列) を考え、その行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものが、行列 \mathbf{A} の「 (i,j) 余因子」といわれ、 \mathbf{A}_{ij} で表される。

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余因子は「符号付の行列式」で、値はスカラーとなることに注意しよう。

(2) 余因子の例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ について、 } \mathbf{A}_{12} \text{ は次による}$$

なる。

$$\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = -(di - fg)$$

(3) 余因子行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ の余因子行列は、}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

余因子行列の要素が転置されていることに注意

すること。

(4) 逆行列・行列式・余因子行列

逆行列は余因子行列を用いると次のようになる。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

5.3 逆行列と行列式の性質

逆行列と行列式については次の性質が重要である。

逆行列が存在しない \Leftrightarrow 行列式 $= 0$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$$

(\mathbf{A}, \mathbf{B} はサイズが等しい 2 つの正方行列)

6 線形独立と線形従属

6.1 線形独立と線形従属

(1) 線形独立

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対する関係式、

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{O}$$

$$(c_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

に対して、

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \text{ のときしか}$$

$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{O}$ が成り立たないとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立という。

(2) 線形従属

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対する関係式、

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{O}$$

$$(c_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

に対して、

c_1, c_2, \dots, c_n のうち少なくとも 1 つが 0 でないとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形従属という。

6.2 行列のランクと直交行列

(1) 行列のランク

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] \text{ としたとき、線形独立となるベクトルの最大個数を行列のランクという。}$$

(2) ランクと逆行列と行列式の関係

次の同値関係について把握しておく必要がある。

行列の列数 = 行列のランク

\Leftrightarrow 行列を構成するベクトルが線形独立

\Leftrightarrow 逆行列が存在

\Leftrightarrow 行列式 $\neq 0$

(3) 直交行列

互いに直交する大きさ 1 のベクトルを列にもつ行列を直交行列と呼ぶ。直交行列という言葉は直交しているベクトルを列にもつ行列を連想させるが、それだけでなく、それぞれのベクトルが大きさ 1 に正規化されていてはじめて「直交行列」と呼ぶことができる。

ところで、直交行列については、 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ が成り立つ。なぜそうなるかということを説明しよう。まず、行列の第 i 列は転置行列の第 i 行になることはわかるだろう。ここで \mathbf{P}^T の各行と \mathbf{P} の各列の内積はベクトルの内積と考えられる。さて、直交行列の場合、 \mathbf{P}^T の第 i 行と \mathbf{P} の第 i 列をベクトルと見たときの内積は 1 になる、というのは両ベクトルとも長さは 1 で、相関は 0 だからだ。 \mathbf{P}^T の第 i 行と \mathbf{P} の第 j 列 ($i \neq j$) をベクトルと見た場

合の内積は (相関が 0 だから) 0 になる。行列全体でこれを考えると、結局、 $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{E}$ が成り立ち、 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ となるのである。

6.3 行列のトレース

正方行列 \mathbf{A} の対角要素の和をトレースと呼び、 $tr \mathbf{A}$ と表示する。トレースについては、次の性質がある。

$$tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr \mathbf{A} + tr \mathbf{B} \quad (\text{計算可能な場合})$$

$$tr \mathbf{AB} = tr \mathbf{BA} \quad (\text{計算可能な場合})$$

$$tr \mathbf{C} = C$$

7 固有値と固有ベクトル

7.1 固有値と固有ベクトルとは

(1) 定義

ある n 次の正方行列 \mathbf{A} に対して、 $\mathbf{Ae} = \lambda \mathbf{e}$ を満たす n 次元列ベクトル \mathbf{e} ($\mathbf{e} \neq \mathbf{O}$) とスカラー λ が存在するとき、 λ を \mathbf{A} の固有値といい、 \mathbf{e} を λ に対する固有ベクトルという。

固有値は 0 でもいいが、固有ベクトルは \mathbf{O} は除く。

(2) 固有値の計算

$$\mathbf{Ae} = \lambda \mathbf{e}$$

$$\mathbf{Ae} - \lambda \mathbf{e} = \mathbf{O}$$

スカラー行列について $\lambda \mathbf{e} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{e}$ が成り立つから

$$\mathbf{Ae} - \lambda \mathbf{E} \mathbf{e} = \mathbf{O}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{e} = \mathbf{O}$$

定義より、 $\mathbf{e} \neq \mathbf{O}$

ここで、 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| \neq 0$ とおくと、 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^{-1}$ が存在することになる。このとき、 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^{-1}$ を $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{e} = \mathbf{O}$ の両辺に左からかけると、 $\mathbf{e} = \mathbf{O}$ となる。これは定義の $\mathbf{e} \neq \mathbf{O}$ と矛盾する。

したがって、

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$$

これを固有方程式という。固有方程式を解いて、固有値が得られる。

(3) 固有ベクトルの計算

上で算出された固有値を、それぞれ $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{e} = 0$ に代入し固有ベクトルを計算する。

このとき、 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ より、 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{e} = 0$ は自明な解以外の解をもち、その解はパラメータ k などを含む形になる。

固有値と固有ベクトルの実際の計算例は、10 節にある。

7.2 固有値・固有ベクトルの性質

(1) 固有値とトレース

固有値とトレースについては次の性質が成り立つ。

$$\text{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

したがって、ある正方行列について、次の同値関係が成立する。

ゼロの固有値がある

\Leftrightarrow 行列式 = 0

\Leftrightarrow 逆行列が存在しない

(2) 逆行列の固有値

\mathbf{A} に正の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在するとき、 \mathbf{A}^{-1} の固有値は $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ となる。

(3) 固有ベクトルと線形独立

n 次の正方行列には重複も含め n 個の固有値とそれに対応する p 個の固有ベクトルがある。

2 つの固有値 λ_i, λ_j が異なるとき、それぞれ

に対応する固有ベクトル \mathbf{e}_i と \mathbf{e}_j は線形独立となる。

n 次の対称行列にも当然 n 個の固有値と、それに対応する n 個の固有ベクトルがある。2 つの固有値 λ_i, λ_j が異なるとき、それぞれに対応する固有ベクトル \mathbf{e}_i と \mathbf{e}_j は直交する。

正方行列一般では異なる固有値に対応する固有ベクトルは線形独立だ。対称行列ではさらに、固有ベクトルは直交することになる。

固有値がすべて異なる対称行列について、各固有ベクトルのノルムを 1 に調整し、それらを列ベクトルにした行列 \mathbf{U} を作ると、その行列は直交行列になる。

相関行列は対称行列である。したがって、相関行列の固有ベクトル（長さ 1 に調整）からなる行列は直交行列になる。

8 行列の対角化と 2 次形式

8.1 行列の対角化

(1) 正方行列の対角化

n 次の正方行列 \mathbf{A} が、 n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をもち、それぞれの固有値に対応する線形独立な固有ベクトルが $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ のとき、正則行列 $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$ を用いて、行列 \mathbf{A} は次のように対角化できる。

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

正則行列

\Leftrightarrow 行列式が 0 でない行列

\Leftrightarrow 逆行列がある行列

\Leftrightarrow 線形独立のベクトルからなる行列

(2) 対称行列の対角化

n 次の対称行列 \mathbf{A} が、重解も含め n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をもち、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ について、

$\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \dots = \|\mathbf{e}_n\| = 1$ が成り立つとする。

このとき、直交行列 $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$ を用いて、行列 \mathbf{A} は次のように対角化できる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

正方行列は対角化できないこともあるが、対称行列は直交行列を用いて必ず対角化できる（対称行列の固有値が重解のときも、それに対応する直交する2つの固有ベクトルが求まる）。

対称行列を対角化するためには、必ずしも直交行列は必要なく、各ベクトルが互いに直交している行列でいい（直交行列という言葉は各ベクトルのノルムが1のときにのみ使う）。しかし、2次形式の変換では必ず直交行列が必要となる。

8.2 スペクトル分解

$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}^T$ だから、
 $\mathbf{U} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$ とするとき、
 $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$

$$= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T$$

が成り立つ。これを \mathbf{A} のスペクトル分解という。

8.3 2次形式

(1) 2次形式とは

2次形式とは、 n 個の実数変数 x_1, x_2, \dots, x_n の2次の同次多項式 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ (ただし $a_{ij} = a_{ji}$) のことである。2次形式はスカラー量になることに注意が必要である。

(2) 2次形式の行列による表現

2次形式はベクトル \mathbf{x} と行列 \mathbf{A} を用いて、 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ と表現できる

$n = 2$ のときの2次形式の行列による表現は次のようになる。

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$n = 3$ のときの2次形式の行列による表現は次のようになる。

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$

$$+ 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(3) 2次形式とトレース

${}_r c = c$ ならびに $\text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B} = \text{tr} \mathbf{B} \mathbf{A}$ より、次の等式が成り立つ。

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{tr} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

(4) 正定値行列と非負定値行列

$\mathbf{0}$ ベクトルでないすべてのベクトルについて、 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ となる行列 \mathbf{A} を正定値行列という。また、 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ となる行列 \mathbf{A} を非負定値行列とい

う。非負定値行列⇔正定値行列である。

正定値行列の固有値はすべて正である。非負定値行列の固有値はすべて 0 に等しいかそれより大きい。

ここまで、社会学の計量分析に必要な行列・ベクトルの基本事項について述べてきた。しかし、これまでの記述で「計量分析の壁」が取り除かれたとはとうてい言えないだろう。特に、7 節と 8 節で述べてきたことを納得するのは容易ではない。イメージがわからないのである。そのイメージを以下の節でつかんでもらおう。

9 固有値・固有ベクトル・対角化の理解

9.1 線形変換

(1) 線形変換とは

2×2 の対称行列をもとに線形変換について考える。通常の xy 座標における線型変換は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_{from} \\ y_{from} \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} x_{from} \\ y_{from} \end{bmatrix} : \text{変換元のベクトル}$$

$$\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} : \text{変換先のベクトル}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \text{変換装置 (行列)}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_{from} + a_{12}y_{from} \\ a_{21}x_{from} + a_{22}y_{from} \end{bmatrix}$$

これが線型変換である。変換元ベクトルは変換装置によって変換先ベクトルに変換される。

固有ベクトルは線形変換によっても方向が変わ

らないベクトルである。

(2) 線形変換の具体例

具体例を示そう。変換装置である行列が $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるとき、変換元ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ は、変換

先ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ へと変換される。というのは、

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 0 \times 0 \\ 0 \times 2 + 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ だからである。}$$

同様に、変換元ベクトル $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ は、変換先ベクトル

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ へと変換される。}$$

これらが、この行列を用いた線形変換の例である。

さて、変換元の $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ で作る平行四辺形の面積と、変換先の $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ で作る平行四辺形の面積に注目するとき、面積が 2 倍になっていることがわかるだろう。実は、この「2」は $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の

行列式 $ad - bc = 2 \times 1 - 0 \times 0 = 2$ を表している。行列式とはすでに述べたように変換前後の面積拡大率なのである。

ところで、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ に変換されるとき、ベクトルは長さは変わるが方向はかわらない。また、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ への変換では長さも方向もかわって

いない。したがって、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ とはこの行列の

固有ベクトルである。

長さを 1 に調節するならば、これらのベクトルはそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ になるが、これが $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と

いう行列の正規化された2つの固有ベクトルである。

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ というベクトルをこの行列で変換すると、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となってしまう。これではベクトルの方向が

変わってしまう。したがって、 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ はこの行列の固有ベクトルとはいえない。

ところで、 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合は、固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ というように座標軸の方向を示してい

た。しかし、固有ベクトルがxy座標軸方向になることは一般的ではない。たとえば、 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とい

う変換を考えると、 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ に変換されてし

まうので、方向が変わってしまう。また、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ も

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ となり、方向が変わる。したがって両座標軸

方向のベクトルは、ともにこの行列の固有ベクトルではない。固有ベクトルがどうなるかは、変換装置である行列がどのようなものであるかによって決まるのである。

9.2 座標軸を変える

(1) 旧座標軸のベクトル表現

変換元・変換先のベクトルが位置づけられている空間の座標軸であるxy軸について、それぞれの軸の方向を表す長さ1のベクトルを \mathbf{x}, \mathbf{y} とすると、次のようになる。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{x}, \mathbf{y} をこのようにするとき、xy座標にある

$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ というベクトルは下のように表現できる

(ここでベクトルとスカラーを混同するとわけがわからなくなるので、強調のためにベクトルには矢印をつけて $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}$ と表記しておく)。

$$\vec{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\vec{\mathbf{x}} + y\vec{\mathbf{y}} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) 新座標軸のベクトルによる表現

この空間に新たな座標軸 $x'y'$ 軸を引くことにしよう。新たな座標軸方向を向いたその軸の単位となるベクトルは、もとの座標軸方向のベクトルを使うと、次のように表現できる。

$$\mathbf{x}' = p\mathbf{x} + q\mathbf{y} = p\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = r\mathbf{x} + s\mathbf{y} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

この \mathbf{x}', \mathbf{y}' は、新座標軸を用いると、もちろん次のようになる。

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) 旧座標表現と新座標表現の関係

新座標を用いて、旧座標上にあったベクトルを表現するとどうなるか。

このためにはまず、上で見た $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ を列ベ

クトルとする行列 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$ を作る必要がある。

このとき、旧座標をつかったベクトルの表現 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と、新座標を使ったベクトルの表現 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ の間

には、 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ が成り立つ。

なぜそうなるのか説明しよう。あるベクトル \mathbf{z} があると、それを旧座標と新座標で表現するとする（強調のために、ここでもベクトルに矢印をつけておく）。

$$\vec{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

このとき、旧座標では

$$\vec{\mathbf{z}} = x\vec{\mathbf{x}} + y\vec{\mathbf{y}} \dots (1)$$

また、新座標では

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{z}} &= x'\vec{\mathbf{x}}' + y'\vec{\mathbf{y}}' \\ &= x'(p\vec{\mathbf{x}} + q\vec{\mathbf{y}}) + y'(r\vec{\mathbf{x}} + s\vec{\mathbf{y}}) \\ &= (x'p + y'r)\vec{\mathbf{x}} + (x'q + y's)\vec{\mathbf{y}} \dots (2) \end{aligned}$$

(1)(2)より、

$$x = x'p + y'r$$

$$y = x'q + y's$$

これを行列で表現すると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

よって、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

(4) 新座標軸の世界での変換元・変換先ベクトル

変換元ベクトルについては、

$$\begin{bmatrix} x_{from} \\ y_{from} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{from} \\ y'_{from} \end{bmatrix} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{それゆえ、} \begin{bmatrix} x'_{from} \\ y'_{from} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_{from} \\ y_{from} \end{bmatrix}$$

同様に変換先ベクトルについては、

$$\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{それゆえ、} \begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix}$$

(5) 新座標軸の世界での変換装置（行列）

変換装置の行列もまた新座標用のものに変える必要がある。元の変換装置 \mathbf{A} に代えて、 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を新たな変換装置とすればいい。

新しい座標軸の世界での線型変換は、結局、次のようなものになる。

$$\begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{from} \\ y'_{from} \end{bmatrix}$$

この変換と元々の変換は、異なった座標軸の世界で同じ変換を表現したものだ。座標軸は異なるが、両座標軸での変換元のベクトルは同じベクトルであり、変換先のベクトルも同じである。

変換装置が $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ となるのは次の理由からである。

$$\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_{from} \\ y_{from} \end{bmatrix}$$

これに、先に述べた $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を代入する。

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{from} \\ y'_{from} \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_{from} \\ y'_{from} \end{bmatrix}$$

9.3 固有ベクトルと対角化

(1) 線型変換と固有ベクトル

準備が整ったので、次に固有ベクトルについて述べることにしよう。すでに、固有ベクトルは線型変換において方向が変わらないということを述べた。「それがどうした」という声が聞こえそうだが、この特徴はとても大事なのである。以下、固有ベクトルが長さ1に調整されていると考え、この特徴のもたらす帰結を明らかにしよう。

(2) 固有ベクトル方向を座標軸にとると

今、この固有ベクトル方向を新座標軸とすることを考える。このとき、対称行列の固有ベクトルは直交するので、新座標軸も直交することになる。

この固有ベクトルを、 $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$ と

するとき、 $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix}$ とおくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ が成り立つ。}$$

この関係を用いて、変換元や変換先の諸ベクトルについて新座標軸での表現ができる。

(3) 新座標軸の世界での変換装置と対角化

旧座標軸の世界での変換装置が \mathbf{A} であるとき、新座標軸方向のベクトルからなる行列を \mathbf{P} とすると、新座標軸の世界での変換装置は $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ になることはすでに述べた。上での新座標軸方向のベクトルからなる行列は \mathbf{U} であるから、変換装置は $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ となる。

この $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ はどこかで見たことがないだろうか。これは行列の対角化の時に見たものなのである。すなわち、

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ここから、新座標での変換装置は固有値を対角成分にもつ行列であることがわかる。

(4) 変換装置がシンプルになった

固有ベクトル方向に座標軸をとることによって、変換装置がシンプルになり、その変換が何をしているかよくわかるようになる。

たとえば、 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ という行列を用いた

変換では、 $\begin{bmatrix} x_{to} \\ y_{to} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_{from} + a_{12}y_{from} \\ a_{21}x_{from} + a_{22}y_{from} \end{bmatrix}$ となり、

変換の内容はなかなか複雑に見える。しかし、新座標軸の世界で見えてみると、その変換は、

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ という行列を用いた変換であり、}$$

$$\begin{bmatrix} x'_{to} \\ y'_{to} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x'_{from} \\ \lambda_2 y'_{from} \end{bmatrix} \text{ であることから、元のベクトル}$$

を \mathbf{x}' 方向に λ_1 倍し、 \mathbf{y}' 方向に λ_2 倍しているだけのことだということがわかるのである。

9.4 エクセルを用いた確認

(1) 行列計算用エクセル・アドインソフト

線形変換や対角化の意味を理解するためには、エクセルなどを用いて実際にどうなるかを確認するのがいい。エクセルにはもともと固有値・固有ベクトルを算出する機能はない。それらを計算するためにはアドインソフトが必要である。フリーのアドインソフトの入手先・名称・解説を記載しておこう。

<http://digilander.libero.it/foxes/index.htm>

MATRIX 2.2 - Matrix and Linear Algebra functions for EXCEL

Since birth, Excel appeared as a fantastic tool for studying and developing numeric calculus. Its worksheets, divided into rows and columns, resulted particularly adapted for matrix and linear calculus. From then on, lots and lots of new objects are included into Excel (not all of them very useful, indeed!) but, surprisingly, the matrix functions are substantially the same of many years ago. This little smart addin intends to cover this gap, improving the standard set of the functions for matrix calculus.

(2) 線形変換と対角化の確認

図3～図4は、エクセルで線形変換を確認しているものであり、図5～図6は対角化について確認しているものである。

行列演算の式を入力するには、①結果の表示されるセル範囲を選択し、②式を書き入れ（この式は1つのセルに書かれる）、③「ctrl+shift+enter」を入力するといふ。なお、ここで使われている関

数の意味は以下の通り。

■組み込み関数

- MMULT：行列の積を求める
- MINVERSE：逆行列を求める

■アドインの関数

- MatEigenvalue_pow：固有値を求める
- MatEigenvector_pow：固有ベクトルを求める

図 3

	A	B	C	D
1	変換元ベクトル	x1	1.0	
2		y1	1.0	
3	変換装置A	A	2.0	0.0
4			0.0	-1.0
5	変換先ベクトル	x2	2.0	
6		y2	-1.0	
7	新座標軸を表す行列	P	1.0	-1.0
8			1.0	1.0
9	Pの逆行列	P ⁻¹	0.5	0.5
10			-0.5	0.5
11	新座標変換元	x' 1	1.0	
12		y' 1		
13	新座標変換装置	P ⁻¹ AP	0.5	-1.5
14			-1.5	0.5
15	新座標変換先	x' 2	0.5	
16		y' 2	-1.5	
17	新座標変換先を旧座標に変換	x1	2.0	
18		x2	-1.0	

図 4

	B	C	D
1	x1	1	
2	y1	1	
3	A	2	0
4		0	-1
5	x2	=MMULT(C3:D4,C1:C2)	
6	y2	=MMULT(C3:D4,C1:C2)	
7	P	1	-1
8		1	1
9	P ⁻¹	=MINVERSE(C7:D8)	=MINVERSE(C7:D8)
10		=MINVERSE(C7:D8)	=MINVERSE(C7:D8)
11	x' 1	=MMULT(C9:D10,C1:C2)	
12	y' 1	=MMULT(C9:D10,C1:C2)	
13	P ⁻¹ AP	=MMULT(MMULT(C9:D10,C3:D4),C7:D8)	=MMULT(MMULT(C9:D10,C3:D4),C7:D8)
14		=MMULT(MMULT(C9:D10,C3:D4),C7:D8)	=MMULT(MMULT(C9:D10,C3:D4),C7:D8)
15	x' 2	=MMULT(C13:D14,C11:C12)	
16	y' 2	=MMULT(C13:D14,C11:C12)	
17	x1	=MMULT(C7:D8,C15:C16)	
18	x2	=MMULT(C7:D8,C15:C16)	

図 5

	A	B	C	D
1 変換Aの元ベクトル		x1	1	
2		y1	2	
3 変換行列A		A	3	-1
4			-1	3
5 Aの変換先ベクトルy		x2	1	
6		y2	5	
7 Aの固有値		$\lambda 1, \lambda 2$	4.00	2.00
8 Aの固有値の行列 Λ		Λ	4.00	0.00
9 (対角化された行列)			0.00	2.00
10 Aの固有ベクトルからなる行列P		P	1.00	1.00
11 (対角化につかう変換P行列、固有ベクトル座標軸を表現)			-1.00	1.00
12 Aの正規化された固有ベクトルからなる行列U		U	0.71	0.71
13 (直交行列)			-0.71	0.71
14 変換行列Pの逆行列		P^{-1}	0.50	-0.50
15			0.50	0.50
16 変換行列PでのAが対角化できる		$P^{-1} \cdot A \cdot P$	4.00	0.00
17 (Λ に等しいことが確認できる)			0.00	2.00
18 変換行列Uの逆行列		U^{-1}	0.71	-0.71
19			0.71	0.71
20 変換行列UでのAが対角化できる		$U^{-1} \cdot A \cdot U$	4.00	0.00
21 (Λ に等しいことが確認できる)			0.00	2.00
22 変換Aの元ベクトル(U利用固有ベクトル座標)		$x''1$	-0.71	
23 (U^{-1} を用いて当初座標から変換したもの)		$y''1$	2.12	
24 変換Aの先ベクトル(U利用固有ベクトル座標)		$x''2$	-2.83	
25 (U^{-1} を用いて当初座標から変換したもの)		$y''2$	4.24	
26 変換Aの先ベクトル(U利用固有ベクトル座標)		$x''2$	-2.83	
27 ($U^{-1} \cdot A \cdot U$ を用いた新座標上での線型変換)		$y''2$	4.24	
28 変換Aの先ベクトル(当初の座標)		x2	1.00	
29 (U用いて当初座標に変換したもの)		y2	5.00	

図 6

	B	C	D
1 x1	1		
2 y1	2		
3 A	3		-1
4	-1		3
5 x2	=MMULT(C3:D4,C1:C2)		
6 y2	=MMULT(C3:D4,C1:C2)		
7 $\lambda 1, \lambda 2$	=MatEigenvalue_pow(C3:D4)		=MatEigenvalue_pow(C3:D4)
8 Λ	=C7		0
9	0		=D7
10 P	=MatEigenve ctor_pow(C3:D4)		=MatEigenve ctor_pow(C3:D4)
11	=MatEigenve ctor_pow(C3:D4)		=MatEigenve ctor_pow(C3:D4)
12 U	=C10/SQRT(C\$10^2+C\$11^2)		=D10/SQRT(D\$10^2+D\$11^2)
13	=C11/SQRT(C\$10^2+C\$11^2)		=D11/SQRT(D\$10^2+D\$11^2)
14 P^{-1}	=MINVERSE(C10:D11)		=MINVERSE(C10:D11)
15	=MINVERSE(C10:D11)		=MINVERSE(C10:D11)
16 $P^{-1} \cdot A \cdot P$	=MMULT(C14:D15,MMULT(C3:D4,C10:D11))		=MMULT(C14:D15,MMULT(C3:D4,C10:D11))
17	=MMULT(C14:D15,MMULT(C3:D4,C10:D11))		=MMULT(C14:D15,MMULT(C3:D4,C10:D11))
18 U^{-1}	=MINVERSE(C12:D13)		=MINVERSE(C12:D13)
19	=MINVERSE(C12:D13)		=MINVERSE(C12:D13)
20 $U^{-1} \cdot A \cdot U$	=MMULT(C18:D19,MMULT(C3:D4,C12:D13))		=MMULT(C18:D19,MMULT(C3:D4,C12:D13))
21	=MMULT(C18:D19,MMULT(C3:D4,C12:D13))		=MMULT(C18:D19,MMULT(C3:D4,C12:D13))
22 $x''1$	=MMULT(C18:D19,C1:C2)		
23 $y''1$	=MMULT(C18:D19,C1:C2)		
24 $x''2$	=MMULT(C18:D19,C5:C6)		
25 $y''2$	=MMULT(C18:D19,C5:C6)		
26 $x''2$	=MMULT(C16:D17,C22:C23)		
27 $y''2$	=MMULT(C16:D17,C22:C23)		
28 x2	=MMULT(C12:D13,C26:C27)		
29 y2	=MMULT(C12:D13,C26:C27)		

10 2次形式の理解

10.1 2次形式と対角化

(1) 2次形式

固有値・固有ベクトルと対角化の重要性は理解できたと思うが、2次形式というのは何の役に立つのだろう。ここでも 2×2 の対称行列をもとに、2次形式の具体的な意味を探ろう。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{とし、}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c^2 \text{ という 2 次形式を考える。}$$

\mathbf{A} を下のように相関行列と考えると、計量分析への道筋が見えてくる。

相関係数	変数 1	変数 2
変数 1	1.00	0.50
変数 2	0.50	1.00

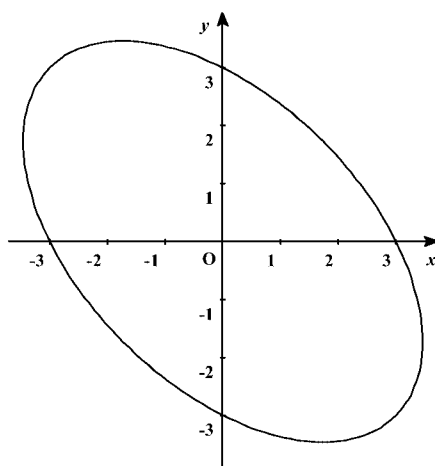
この2次形式は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x + y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy + y^2 \\ &= x^2 + xy + y^2 = c^2 \end{aligned}$$

(2) ソフトによるグラフの表示

コンピュータソフトを用いると、 $c^2 = 9$ のとき、上の $x^2 + xy + y^2 = c^2$ のグラフは図7のようになることがわかる。これは楕円である。しかし式を見ているだけではこれが楕円を意味していることはわからない。

図 7



(3) 固有値

ここで \mathbf{A} の固有値を求めてみよう。

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \\ 4\lambda^2 - 8\lambda + 3 &= 0 \\ (2\lambda - 3)(2\lambda - 1) &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4) 固有ベクトル

次に \mathbf{A} の固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ & \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{3}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

長さを 1 にすると、

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同様に、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5) 対角化

固有ベクトルからなる行列 \mathbf{U} とその逆行列

\mathbf{U}^{-1} は次のようになる。

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{1/2 + 1/2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{U} を使って \mathbf{A} を対角化すると

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

しかし、こんなことをしなくても、固有値がわかっているのだから次のようになる。

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(6) 対角化した行列での 2 次形式の表現

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ として、}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = c^2 \text{ となる 2 次形式を考える。}$$

このとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}X & \frac{1}{2}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = c^2 \end{aligned}$$

固有ベクトル方向に座標をとることによって、2 次形式は当初よりもずっと簡単な式になるのである。さらに、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 &= c^2 \\ \frac{3}{2c^2}X^2 + \frac{1}{2c^2}Y^2 &= 1 \\ \frac{X^2}{(2/3)c^2} + \frac{Y^2}{(2/1)c^2} &= 1 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2/3}c} \right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2/1}c} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

これは楕円の式で、長軸の長さが $2\sqrt{2/1}c$ 、短軸の長さが $2\sqrt{2/3}c$ である。

固有値を使って表現すると、長軸の長さが

$2\sqrt{1/\lambda_2}c$ 、短軸の長さが $2\sqrt{1/\lambda_1}c$ となる。

(7) 対角化後の行列を用いた2次形式のグラフ

対角化後の行列を用いた2次形式のグラフの形は下の図のようになる。前のグラフと形は同じだが座標が変わっている。新しいX座標軸は \mathbf{e}_1 方向であり、Y座標軸は \mathbf{e}_2 方向である。

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{だったが、これら}$$

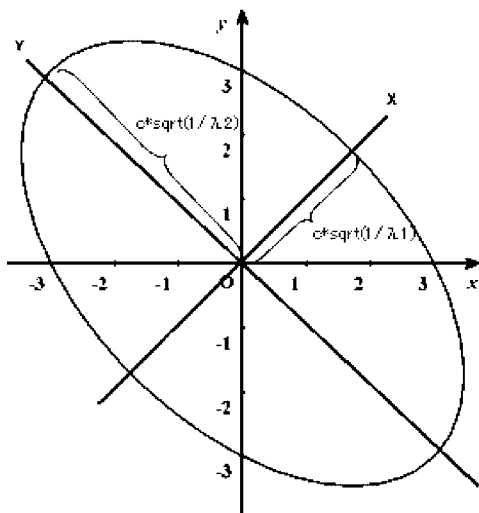
は旧座標で表現されている新座標軸である。

グラフには長軸の半分、短軸の半分の長さが示されているが、 $c=3$ のときにはそれぞれ、

$$3\sqrt{1/\lambda_2} = 3\sqrt{2/1} = 3\sqrt{2},$$

$$3\sqrt{1/\lambda_1} = 3\sqrt{2/3} = 2\sqrt{3} \text{ となる。}$$

図 8



10.2 逆行列と2次形式の対角化

(1) 2次形式

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき、 \mathbf{A} の逆行列について

の2次形式を考えてみよう。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

2次形式は次のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c^2$$

これは次のようにも表現できる。

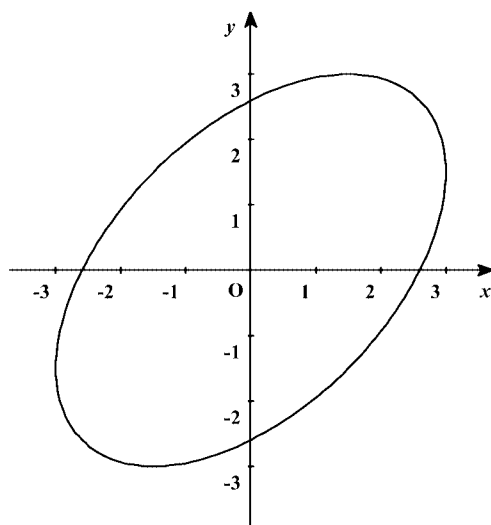
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y & -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}xy + \frac{4}{3}y^2 \\ &= \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{4}{3}y^2 = c^2 \end{aligned}$$

(2) ソフトによるグラフの表示

$c^2 = 9$ のとき、上の $\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{4}{3}y^2 = c^2$ のグ

ラフは図9のようになる。

図 9



(3) 固有値

\mathbf{A}^{-1} の固有値を求めてみる。

$$|\lambda' \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}| = \begin{vmatrix} \lambda' - \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda' - \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda' - \frac{4}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2$$

$$= \lambda'^2 - \frac{8}{3} \lambda' + \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$3\lambda'^2 - 8\lambda' + 4 = 0$$

$$(3\lambda' - 2)(\lambda' - 2) = 0$$

$$\lambda'_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda'_2 = 2$$

(4) 固有ベクトル

\mathbf{A}^{-1} の固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = \frac{2}{3}y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = 2x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 6x \\ -2x + 4y = 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5) 対角化

固有ベクトルからなる行列 \mathbf{U} は次のようになる。

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(6) 対角化した行列での2次形式の表現

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ として、}$$

$$[X \ Y] \mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = c^2 \text{ となる2次形式を考える。}$$

これは次のように表現できる。

$$\begin{aligned} [X \ Y] \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 2Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ = \frac{2}{3}X^2 + 2Y^2 = c^2 \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}X^2 + 2Y^2 &= c^2 \\ \frac{2}{3c^2}X^2 + \frac{2}{1c^2}Y^2 &= 1 \\ \frac{X^2}{(3/2)c^2} + \frac{Y^2}{(1/2)c^2} &= 1 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{3/2}c} \right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{1/2}c} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

これは楕円の式で、長軸の長さが $2\sqrt{3/2}c$ 、短軸の長さが $2\sqrt{1/2}c$ である。固有値を使って表現すると、長軸の長さが $2\sqrt{1/\lambda'_1}c$ 、短軸の長さが

$2\sqrt{1/\lambda_2'}c$ となる。

(7) 対角化後の行列を用いた2次形式のグラフ

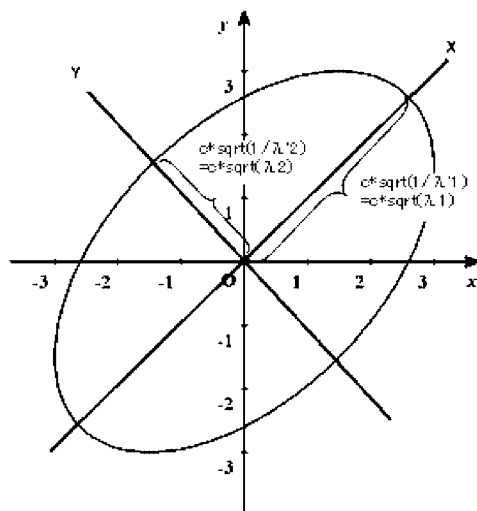
対角化後の行列を用いた2次形式のグラフの形は下の図のようになる。形は同じだが座標が変わっている。新しいX座標は \mathbf{u}_1 方向であり、Y座標は \mathbf{u}_2 方向である。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ だったが、これらは旧座標で表現されている。}$$

グラフには長軸の半分、短軸の半分の長さが示されているが、 $c=3$ のときにはそれぞれ、

$$3\sqrt{\frac{1}{\lambda_1'}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}, \quad 3\sqrt{\frac{1}{\lambda_2'}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ となる。}$$

図 10



ところで、前項の対称行列 \mathbf{A} の固有値・固有ベクトルと本項の逆行列 \mathbf{A}^{-1} の固有値・固有ベクトルについては興味深い関係が見られる。すなわち、前項の \mathbf{A} の固有ベクトルと、本項の逆行列 \mathbf{A}^{-1} の固有ベクトルは等しくなっており、双方の固有値

について、 $\frac{1}{\lambda_1'} = \frac{3}{2} = \lambda_1$ 、 $\frac{1}{\lambda_2'} = \frac{1}{2} = \lambda_2$ の関係が見られるのである。

これらのことは偶然ではない。 \mathbf{A} が正定値（2次形式で値がつねに正）で、逆行列 \mathbf{A}^{-1} が存在するなら、 $\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ は $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{e}$ を意味するから

である。したがって、 \mathbf{A} と \mathbf{A}^{-1} の固有ベクトルは等しくなり、それぞれの固有ベクトルに対応する固有値を \mathbf{A} と \mathbf{A}^{-1} で見てみると、一方は他方の逆数ということになるのである。

ここから、 \mathbf{A}^{-1} の2次形式を考えるためには、わざわざ \mathbf{A}^{-1} を出してその固有値や固有ベクトルを計算しなくてもいいことがわかる。すなわち、 \mathbf{A}^{-1} の固有ベクトルを求めたければ、 \mathbf{A} の固有ベクトルを出せばいい。また、 \mathbf{A}^{-1} の固有値を求めたければ、 \mathbf{A} の固有値の逆数を出せばいいのである。

(8) 最後に

さて、図 10 の楕円はどこかで見たことがないだろうか。実はこれはよく見る楕円なのである。

何人ものケースについて、 x と y という2変数のデータが得られるとき、それぞれを標準得点に直し、各ケースをプロットすることを考えよう。各ケースは中心付近に多くプロットされ、中心から離れるにしたがってケースは少なくなる。

ケースの密度（散らばりの様子）が同じぐらいのところに線を引くことを考えよう（図 11）。その線は、 x と y に相関がないと円になるだろう。そして、相関があると楕円になり、相関が大きいと細い（平べったい）楕円になる。図 10 の楕円は実は図 11 で示されるような楕円なのである。

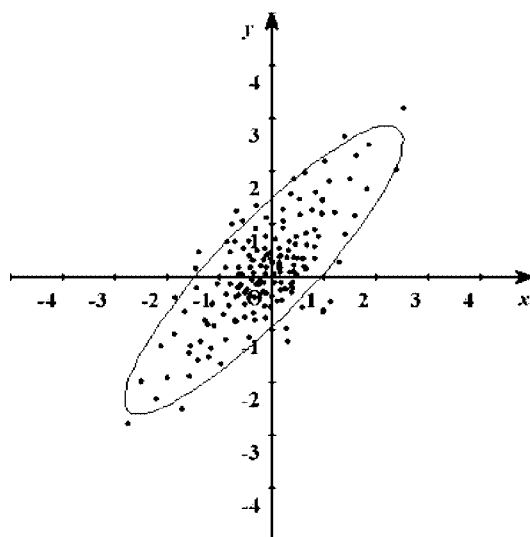
このことをもう少しきちんと言うとうこうなる。 x と y という2変数の相関係数が ρ で、それをもとにした相関行列が \mathbf{A} であるとき、相関行列の逆

行列についての2次形式 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c^2$ は

楕円になる。この楕円は x, y が相関 ρ の2変量正規分布に従うときの同一確率密度を示す等高線を意味している。

この楕円は、相関行列の逆行列 \mathbf{A}^{-1} の固有値・固有ベクトルを求め、それらを使って軸を設定することによって描けた。しかし、すでに述べたように、わざわざ逆行列 \mathbf{A}^{-1} の固有値・固有ベクトルを求める必要はない。相関行列 \mathbf{A} そのものの固有値・固有ベクトルが算出できれば、それらを利用して同じ軸を設定することができるからである。それゆえ、相関行列の固有値、固有ベクトルを求めることは、計量分析においてとても重要となる。主成分分析などを勉強するとき、以上のことを思い出すといいだろう。

図 11



文献

本稿で扱った内容をもっときちんと知るためには、次の文献にあたるのがいいと思う。

■高校数学の復習として

馬場敬之ほか, 2003-2004『合格! 数学 IA~IIC』(全3冊) マセマ

チャート研究所, 2003-2005『チャート式基礎からの数学 IA~IIC』(全6冊) 数研出版

藤田宏ほか, 2003-2005『大学への数学 IA~IIC』(全4冊) 研文書院

長岡亮介, 2004-2005『本質の研究数学 IA~IIC』(全3冊) 旺文社

矢野健太郎(監修)・春日正文(編) 1996『公式集』科学新興新社

■線形代数のテキストとして

馬場敬之・高杉豊, 2003『線形代数キャンパスゼミ』マセマ

平岡和幸・堀玄, 『プログラミングのための線形代数』オーム社

笠原皓司, 1982『線形代数学』サイエンス社

小島寛之, 2004『ゼロから学ぶ線型代数』講談社

瀬山士郎, 2002『ゼロから学ぶ数学の4, 5, 6』講談社

■統計学の観点から

Johnson, R. A., & D. W. Wichern, 2002, *Applied Multivariate Statistical Analysis* (5th ed.), Prentice Hall.

永田靖・棟近雅彦, 2001『多変量解析法入門』サイエンス社