

A High-Speed Method for the Added Mass in Viscous Fluid and Its Validity

Katsuya HIRATA*, Hideki SHIMOHARA** and Shingo KIKUKAWA*

(Received January 19, 2008)

In many fluid-structure interaction problems, the virtual mass, namely, the added mass, is one of important concepts. In the present study, we consider a simple method to specify the added-mass coefficients of arbitrary two-dimensional bodies with non-simple cross sections, efficiently and conveniently. Specifically, we consider a two-dimensional incompressible and viscous fluid under the assumption of infinitesimal oscillation amplitude of the body, and properly modify the full Navier-Stokes equations into linear equations, that is, the Brinkman equations. The solving method is based on a discrete singularity method (referred to as DSM), in which we employ a fundamental solution of the Brinkman equations as a singularity. In order to show the method's effectivity and validity, we compute a square cylinder in infinite flow field. Concretely speaking, we solve the full Navier-Stokes equations by a finite difference method (FDM), and compare such solutions with the DSMs. As a result, we reveal the non-linear amplitude effect and specify the valid range of the DSM.

Key words: Virtual mass, Fluid force, Flow-induced oscillation, Discrete singularity method, Finite differential method

キーワード: 付加質量, 流体力, 振動流, 離散特異点法, 有限差分法

粘性流中の付加質量に関する高速計算法と有効性

平田 勝哉, 下原 秀基, 菊川 真吾

1. はじめに

流体中に物体があり, かつ流体または物体の一方あるいは両方が加速度運動を行うときを考える. 加速度が大きいとき, または, 物体密度が流体密度に比べて同等もしくは小さいとき, 物体が受ける流体力は無視できない. この流体力は, 非粘性の仮定の下で付加質量力(added-mass force)あるいは仮想質量力(virtual-mass force)として, よく知られている. 付

加質量力は, 海洋構造物や原子炉を設計する際に非常に重要である. このような流体力が問題となる最も簡単な場合は, 静止流体中における振動物体(例えば, ボイラ内の熱交換器)と振動流中における静止物体(例えば, 海洋構造物)である. なお, 本研究では, 静止流体中で正弦振動する2次元物体を考える.

応用面での付加質量力評価の重要性のため, 現在

*Department of Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyoto
Telephone & FAX: +81-774-65-6461, E-mail: khirata@mail.doshisha.ac.jp

**Doshisha International High School, Kyoto
Telephone: +81-774-65-8911

まで多くの研究が試みられた。理想流体に関しては、Patton (1965)⁽¹⁾が、種々の幾何学物体における解析を、多くの実験結果と比較している。また、Dalton & Helfinstine (1971)⁽²⁾や Yano & Ooe(1992)⁽³⁾により、完全流体中での近似計算法が提案されている。粘性流体に関しては、Chen (1987)⁽⁴⁾が、非圧縮粘性流体中において微小振幅振動する円柱の流体力を解析的に求めている。粘性流中での複雑な柱状物体を考えれば、full Navier-Stokes 方程式を数値解析により解けばよい。例えば、Scolan & Faltinsen (1994)⁽⁵⁾は渦点法(Vortex in Cell Method)を用いて、Zheng & Dalton (1999)⁽⁶⁾は渦度・流れ関数法を用いて振動流中におかれた柱状物体、すなわち、円柱、正方形柱および菱形柱の抗力係数 C_D と慣性係数 C_M (次節で説明) を求めている。しかし、これらの方法では、計算量や計算時間が飛躍的に増加する問題が生じる。

実験的アプローチも試みられたが、計測精度上困難な点が多い。Keulegan & Carpenter (1958)⁽⁷⁾は、海洋構造物を対象とし、振動流中の円柱に作用する波力を求めている。彼らは、物体に作用する振動方向の力を Morison の式に従って抗力と慣性力に分け、 C_D と C_M を KC 数により整理している。Bearman *et al.* (1984)⁽⁸⁾は、U チューブ容器を用いて作り出された振動流中における柱状物体の角の影響について調べている。Zheng & Dalton は、Bearman *et al.* と Scolan & Faltinsen のデータとの比較を行っている。しかし、 C_D も C_M も共に充分な一致を示していない。

本研究では、粘性流体中で振動する 2 次元物体における流体力に関する新しい解析手法を考え、その有効性を検証する。すなわち、Chen と同様な条件である微小振幅振動の仮定のもとで full Navier-Stokes 方程式の線形近似を行い、支配方程式が Brinkman 方程式になることを利用する(Shimohara & Hirata, 2000)⁽⁹⁾。Yano & Kieda (1991)⁽¹⁰⁾により提案された

Brinkman 方程式の基本解を特異点とし、離散特異点法により数値解析を行う。具体的には、粘性流体中における円、楕円、角形または菱形柱の流体力を示す。そして、振動流中の正方形柱に対して、MAC 法に基づく有限差分法を用いて full Navier-Stokes 方程式を解き、上記線形近似法の有効性を検証する。

2. 解析手法

2.1 解析モデルと支配パラメータ

解析モデルを Fig.1 に示す。非圧縮粘性流体中で 2 次元物体が変位 $x = A \sin(\omega t)$ で振動している。ここで、振動方向を x 軸、それに直角方向を y 軸とする。

無次元支配パラメータは、運動 Reynolds 数

$$S \equiv \frac{\omega L^2}{\nu}$$

と、Keulegan-Carpenter 数

$$KC \equiv 2\pi \frac{A}{L}$$

である。ここで、 ν は動粘度、 A は変位振動振幅、 L は代表長さである。本研究における代表長さは、 y 軸へ投影した物体の長さ L_y とする。また、上記 2 つの支配パラメータのどちらか 1 つの代用として、レイノルズ数 Re を用いることもできる。 Re の定義は、以下の通りである。

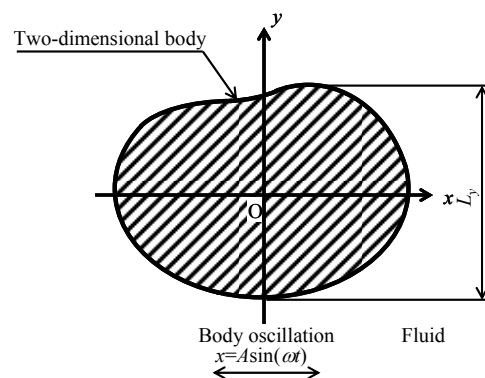


Fig.1 Model: an oscillating body in stationary fluid.

$$Re \equiv \frac{\omega AL}{\nu} = \frac{S KC}{2\pi}.$$

また, S の代わりに, Stokes 数(あるいは, 振動パラメータ⁽¹¹⁾)

$$\beta \equiv \frac{S}{2\pi}$$

を用いることもある. β は, 振動流問題において, 慣例として, よく用いられる.

2.2 支配方程式と線形近似

Fig.1 に示された 2 次元物体周囲の非圧縮粘性流れの支配方程式は, full Navier-Stokes 方程式と連続の式, すなわち,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

である. ここに, \mathbf{v} は速度ベクトル, p は圧力, ρ は流体密度, μ は粘性係数である. 微小振幅を考慮すると, 式(1)は以下のように線形近似できる.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3)$$

ここで, i を虚数単位とし, $\mathbf{v} = \mathbf{v}' e^{i\omega t} = (u' e^{i\omega t}, v' e^{i\omega t})$, $p = p' e^{i\omega t}$ とすると, 式(3)と式(2)は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p' = \mu \nabla^2 \mathbf{v}' - \mu \frac{i\omega}{\nu} \mathbf{v}', \\ \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

となる. さらに $1/\lambda \equiv \sqrt{i\omega/\nu}$ とすると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p' = \mu \nabla^2 \mathbf{v}' - \frac{\mu}{\lambda} \mathbf{v}', \\ \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

(7)

となり, 式(6)が Brinkman 方程式となる.

2.3 離散特異点法 (Discrete Singularity Method)

2 次元問題においては, 物理面として複素平面を考えると便利である. Yano & Kieda⁽¹⁰⁾によれば, 式(6)と式(7)の基本解(座標原点にある Brinkmanlet)は,

$$\begin{aligned} w_e(z, b) &= u' - iv' \\ &= b K_2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} r \right) e^{-2i\theta} - \bar{b} K_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} r \right) - \frac{2b}{\lambda z^2} \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる. ここに, $z = x + iy = r e^{i\theta}$, K_0 と K_2 は第 2 種変形ベッセル関数, b は複素定数, \bar{b} は共役複素定数である.

ここで, $b = c_1 + ic_2$, $\bar{b} = c_1 - ic_2$, $\lambda' = 1/\sqrt{\lambda}$ とおけば,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G_1(z) & G_2(z) \\ H_1(z) & H_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \\ G_1(z) &= K_2(\lambda' r) \cos 2\theta - K_0(\lambda' r) - \frac{2 \cos 2\theta}{\lambda'^2 r^2}, \\ G_2(z) &= K_2(\lambda' r) \sin 2\theta - \frac{2 \sin 2\theta}{\lambda'^2 r^2}, \\ H_1(z) &= K_2(\lambda' r) \sin 2\theta - \frac{2 \sin 2\theta}{\lambda'^2 r^2}, \\ H_2(z) &= -K_2(\lambda' r) \cos 2\theta - K_0(\lambda' r) - \frac{2 \cos 2\theta}{\lambda'^2 r^2} \end{aligned} \quad (9)$$

となる. また, 圧力振幅は,

$$\begin{aligned} p'(z, b) &= -2\mu \operatorname{Re} \left(\frac{b}{z} \right) \\ &= -2\mu \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 \cos \theta - ic_1 \sin \theta + ic_2 \cos \theta + c_2 \sin \theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

となる. ここに, Re は実数部分を示す.

Fig.2 のように 2 次元物体の内側に式(8)あるいは式(9)の特異点を複数個配置すると, 速度振幅ベクトル

は,

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \{G_1(z - \xi_j^*)c_{1j} + G_2(z - \xi_j^*)c_{2j}\} \\ \sum_{j=1}^N \{H_1(z - \xi_j^*)c_{1j} + H_2(z - \xi_j^*)c_{2j}\} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

ここで, ξ_j^* は j 番目の特異点の位置, N は特異点の総数である.

物体表面にある制御点での non-slip 条件は,

$$u'(\xi_k) = A\omega, \quad v'(\xi_k) = 0 \quad (\text{at } k=1, 2, \dots, M). \quad (12)$$

ここで, ξ_k は制御点の位置, M は制御点の総数である. 物体表面において速度振幅ベクトルは, $\mathbf{v}' = (A\omega, 0)$ である. $2N$ 個の未知数 c_{1j}, c_{2j} ($j=1, 2, \dots, N$) を求めるため, 式(12)の $2M$ 個の代数方程式を解く. もし $M > N$ ならば, 最小二乗法で解く必要があるが, 本研究では $M=N$ としたため式(12)をそのまま解いている.

Fig.3 に, 2 次元物体に作用する流体力を示す. 流体力は,

$$\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (13)$$

ここで, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ は物体表面の外向き法線ベクトル, \mathbf{T} は応力テンソルである. 応力テンソル \mathbf{T} の各要素は,

$$\tau_{lm} = -p' e^{i\omega t} \delta_{lm} + \mu \left(\frac{\partial v'_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v'_m}{\partial x_l} \right) e^{i\omega t} \quad (14)$$

と表される. δ_{lm} ($l, m=1, 2$) は, クロネッカーのデルタである.

我々は, Chen の定義に従い, 流体力 \mathbf{F} を $\pi L^2/4$ で無次元化する. 無次元化した力 \mathbf{H} は次のように表される.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{F}}{\frac{\rho}{4} \pi L^2 i \omega^2 A e^{i\omega t}} \\ &= \frac{\oint_s \left\{ -p' \delta_{lm} + \mu \left(\frac{\partial v'_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v'_m}{\partial x_l} \right) \right\} \mathbf{n} ds}{\frac{\rho}{4} \pi L^2 i \omega^2 A}, \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, \mathbf{H} の実数部分 $\text{Re}(\mathbf{H})$ は付加質量係数, \mathbf{H} の虚数部分 $-\text{Im}(\mathbf{H})$ は減衰係数である. もし, x 軸に関して対称な物体を考えると, 振動は x 軸方向なので, y 軸方向の流体力は 0 となる. そのため, 我々は x 軸方向の流体力 H_x を考えるだけでよく,

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{F_x}{\frac{\rho}{4} \pi L^2 i \omega U' e^{i\omega t}}, \\ &= \frac{\oint_s \left\{ \left(-p' \delta_{lm} + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} \right) n_x ds + \mu \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) n_y ds \right\}}{\frac{\rho}{4} \pi L^2 i \omega U'}. \end{aligned} \quad (16)$$

ここに, $\mathbf{n} ds = (n_x ds, n_y ds) = (\Delta y, \Delta x)$ である. また, 式(10)より, p' は

$$p' = \sum_{j=1}^N \left\{ -2\mu \text{Re} \left(\frac{b}{z - \xi_j^*} \right) \right\}. \quad (17)$$

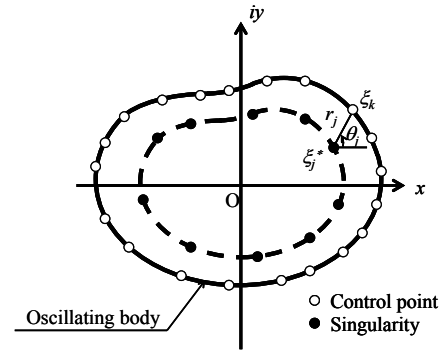


Fig.2 Distributions of the control points and singularities for a discrete singularity method.

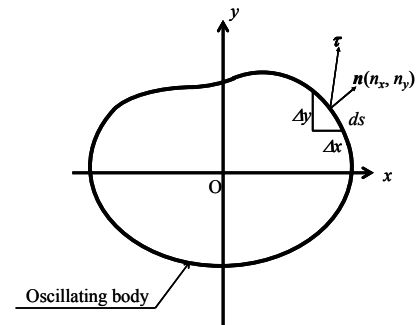


Fig.3 Fluid force on an oscillating body.

付加質量問題において、流体力の無次元化法には、慣例にならうと他の選択肢もある。すなわち、減衰係数 $-\text{Im}(H_x)$ と付加質量係数 $\text{Re}(H_x)$ の代わりに、抗力係数 C_D と慣性係数 C_M を用いることもある。Morison の式(Morison, 1950)⁽¹¹⁾ に従い、 C_D と C_M は、

$$F_x = \frac{1}{2} \rho L_y C_D |u'|u' + M_D C_M \frac{du'}{dt} \quad (18)$$

により定義される。ここで、 $M_D = \rho \pi L_y^2 / 4$ である。 C_D と C_M は、式(18)をフーリエ平均して、

$$C_D = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 L_y} \sin \omega t \, d(\omega t), \quad (19)$$

$$C_M = \frac{KC}{\pi^3} \int_0^{2\pi} \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 L_y} \cos \omega t \, d(\omega t) \quad (20)$$

となる。なお $(-\text{Im}(H_x), \text{Re}(H_x))$ と (C_D, C_M) との関係は、 $-\text{Im}(H_x) = 8KC/3\pi^3 C_D$ と $\text{Re}(H_x) = C_M$ となる。

2.4 有限差分法 (Finite Difference Method)

離散特異点法の有効性を検証し、その有効範囲を明らかにするために、full Navier Stokes 方程式と連続の式を、有限差分法により解く。解析手法は、不等間隔スタガード格子を用いた MAC 法 (Welch *et al.*, 1965)⁽¹²⁾ に基づく。振動物体は正方形柱とする。さらに数値精度を増し計算を高速化するために、静止流体中での振動正方形柱の代わりに、 x 軸方向に流体を正弦振動させ、物体周りの流体を解析する。その際、流体力は、Fluide-Krylov 力(Chakrabarti, 2005)⁽¹³⁾ の分だけ、差し引く必要がある。調べた運動 Reynolds 数 S は 40-100, Keulegan-Carpenter 数 KC は 1-20 である。

格子の例として、Fig.4 には、正方形柱のごく近傍の格子を示す。正方形柱近傍を細かくとり、遠方を大きくとる不等間隔格子を採用している。最小格子

幅は $0.0125L$ 、解析領域は $12.5L$ 、時間間隔 Δt は 3.93×10^{-4} である。ここに、 $L=L_x=L_y$ 。なお、予備計算により、定常流よりも細かい最小格子幅が必要となること、よって、はるかに細かい時間間隔が必要となることが示された。

速度に関する境界条件は、

$$u = v = 0, \quad (\text{on the body}) \quad (21)$$

$$u = U \cos(\omega t) \quad \text{and} \quad v = 0.$$

$$(\text{on the far boundary}) \quad (22)$$

圧力に関する境界条件は、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (\text{on the body}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0,$$

$$(\text{on the far boundary perpendicular to the } x \text{ direction}) \quad (24)$$

$$p = 0$$

$$(\text{on the far boundary parallel to the } y \text{ direction}) \quad (25)$$

である。

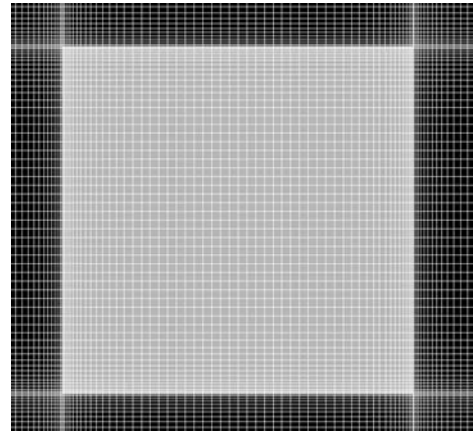


Fig.4 Local Grid Concentration.

3. 結果と考察

3.1 線形近似

3.1.1 無限静止流体中における円柱

まず、離散特異点法の有効性を確認するため、最も単純でかつ比較可能な解析解が存在する場合、すなわち、無限静止流体中の振動円柱を考える。具体的には、代表長さ $L (=L_y)$ に直径 D をとる。また、 $M=48$, $N=48$ として計算する。特異点は、中心から半径 $D/4$ の円周上に等間隔に配置する。制御点は円柱の周上に等間隔に配置する。調べた運動 Reynolds 数 $S=20, 40, 60, 80, 100, 200, 400$ である。なお、境界残差の rms 値 \bar{e} は 10^{-3} - 10^{-2} 程度である。ここで、 \bar{e} の定義は次の通りである。

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{1}{N_j} \sum_{j=1}^N \left\{ (u'_j - 1.0)^2 + (v'_j - 0)^2 \right\}} \quad (26)$$

Fig.5 に、計算結果と解析解との比較を示す。Fig.5(a)は S に対する $\text{Re}(H_x)$ を、Fig.5(b)は S に対する $-\text{Im}(H_x)$ を、示している。特異点数 $N=48$ と少ないにもかかわらず、今回計算した S の範囲では、本計算結果は、解析解とよく一致し、十分な精度をもつことがわかる。ここに、図中の実線は解析解⁽⁴⁾を、 $S=\infty$ はポテンシャル理論の値⁽¹⁾を示す。

3.1.2 円筒容器内における同心円柱

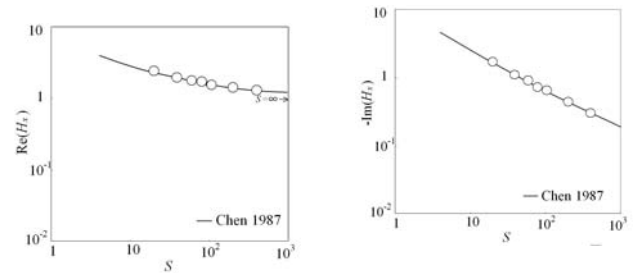
次に、前節よりも若干複雑だが、応用面で価値の高い場合を考える。すなわち、静止円筒容器内の流体中で、振動する円柱に働く流体力である。このような問題は、発電所等の熱交換器にしばしば見られる。また、解析解^(4,14)も知られている。Fig.6 に示すように外側の静止円筒の直径を D_0 、内側の振動円柱の直径を D とする。静止円筒、振動円柱の制御点、特異点は、それぞれ、 $M=32$, $N=32$ とする。特異点は、中心から半径 $D/4$ の円周上、および、半径 $D_0+D/4$ の円周上に配置する。制御点は、静止円筒上と、振

動円柱上に配置する。特異点、制御点ともに、それらの配置は、等間隔ではなく、 x 軸に近い場所では若干密に配置する。計算範囲は、直径比 $D_0/D=4, 6, 8, 10$ であり、 $S=40, 200, 400$ である。なお \bar{e} は、 10^{-3} - 10^{-2} 程度である。

Fig.6 には、計算結果を、解析解と比較して、示している。Fig.6(a)は D_0/D に対する $\text{Re}(H_x)$ を、Fig.6(b)は D_0/D に対する $-\text{Im}(H_x)$ を、それぞれ、示す。各図では、 S をパラメータにとっている。なお、図中、破線は解析解⁽⁴⁾を、実線はポテンシャル理論($S=\infty$)での解析解⁽¹⁴⁾を示す。本計算結果からも、解析解とのよい一致を確認できる。

3.1.3 無限静止流体中の楕円柱

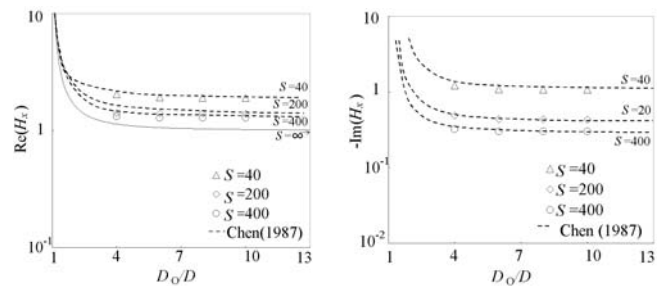
前節同様、応用面で価値の高い場合、すなわち、無限静止流体中で振動する楕円断面柱を考える。こ



(a) Real part of H_x

(b) Imaginary part of H_x

Fig.5 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for a circular cylinder.



(a) Real part of H_x

(b) Imaginary part of H_x

Fig.6 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for an annular cylinder.

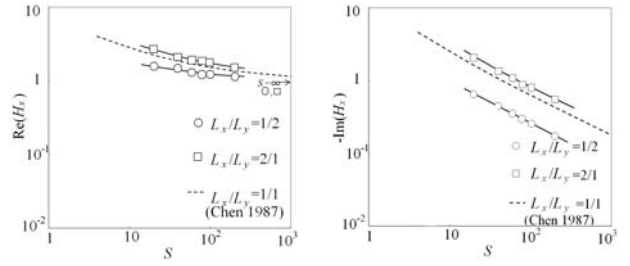
ここでは、 $L_x/L_y=1/2$, $L_x/L_y=2/1$ の2つの楕円柱の結果を示す(Fig.7). 十分な精度を保証するため、制御点と特異点は、それぞれ、円柱よりはるかに多く、 $M=100$ と $N=100$ として計算している. 特異点は、長軸と短軸が楕円柱の長軸と短軸の $3/4$ となる楕円上に等間隔に配置する. また、制御点は楕円柱上に等間隔に配置する. なお、 \bar{e} は、 10^{-3} - 10^{-2} 程度である.

Fig.7 に、その計算結果を、円柱の解析解とともに、示す. Fig.7(a)は S に対する $\text{Re}(H_x)$ を、Fig.7(b)は S に対する $-\text{Im}(H_x)$ を、示している. なお、図中破線は、円柱の解析解⁽⁴⁾を、 $S=\infty$ はポテンシャル理論の値⁽¹⁾を示す. ポテンシャル理論値は、 L_x/L_y によらず、同一の値をとる. しかし、粘性を考慮すると、 S の値にも依存するが、 L_x/L_y が大きいほど流体力が、大きくなる傾向が見られる.

3.1.4 無限静止流体中の矩形柱と菱形柱

離散特異点法は、境界形状に大きな自由度をもち、解析解が難しい鋭い角をもつ柱体の流体力を近似的に容易に求めることも可能である. Fig.8 に、その例、すなわち、いくつかの矩形柱と菱形柱の計算結果を示す. このような基本形状についてさえ、広い運動 Reynolds 数範囲にわたる付加質量は、未だ充分に明らかにされていない. Fig.8(a)は S に対する $\text{Re}(H_x)$ を、Fig.8(b)は S に対する $-\text{Im}(H_x)$ を、示している. 図には、 $L_x/L_y=2/1$ の矩形断面柱 (図中、○印)、 $L_x/L_y=1/1$ の正方形断面柱 (図中、●印)、 $L_x/L_y=1/2$ の矩形断面柱 (図中、△印)、 $L_x/L_y=1/2$ の菱形断面柱 (図中、▲印)、 $L_x/L_y=1/1$ の菱形断面柱 (図中、□印)、 $L_x/L_y=2/1$ の菱形断面柱 (図中、■印) に関する計算結果を示している. なお、図中の破線は円柱の解析解⁽⁴⁾を、 $S=\infty$ はポテンシャル理論の値⁽¹⁾を示す. 特異点数は、 $N=48$ であり、物体表面から $D/20$ だけ内側に等間隔に配置している. なお、 \bar{e} は、 10^{-3} - 10^{-2}

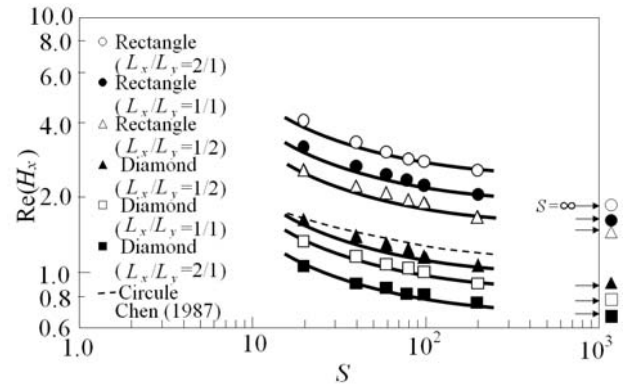
程度である.



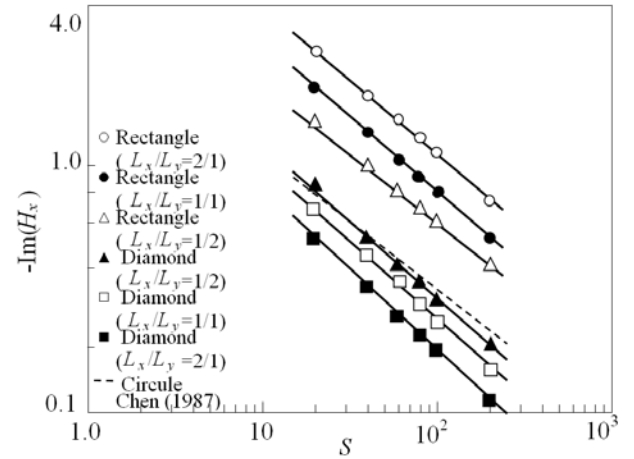
(a) Real part of H_x

(b) Imaginary part of H_x

Fig.7 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for an elliptical cylinder.



(a) Real part of H_x



(b) Imaginary part of H_x

Fig.8 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for cylinders with sharp edges.

どの柱体に関しても、円柱と同様、 S の増加につれて $\text{Re}(H_x)$, $-\text{Im}(H_x)$ とともに単調減少する。 $S=\infty$ の極限では、 $\text{Re}(H_x)$ はそれぞれポテンシャル近似解 ($L_x/L_y=2/1$ 矩形柱で 1.70, $L_x/L_y=1/1$ 正方形柱で 1.51, $L_x/L_y=1/2$ 矩形柱で 1.36, $L_x/L_y=1/2$ 菱形柱で 0.85, $L_x/L_y=1/1$ 菱形柱で 0.76, $L_x/L_y=2/1$ 菱形柱で 0.67)⁽¹⁾ に漸近し、 $-\text{Im}(H_x)$ はすべて 0 に収束する傾向を示しているようにみえる。さらに、調べた S の範囲内での柱体間の $\text{Re}(H_x)$ の値の大きさの順序は、ポテンシャル理論の順序と整合している。

3.2 非線形効果（振動流中における角柱）

3.2.1 線形近似の有効性

線形近似解法を利用する際は、その有効範囲を知る必要がある。そこで、以下に正方形柱を対象として、有限差分法により、手法の有効範囲を調べる。

一様流中の静止正方形柱に比べて、振動流中の静止正方形柱では、同じ精度で流体力を求めるために、より厳しい数値計算条件が要求されると思われる。我々は、予備実験により、より厳しいクーラン条件と、より細かい最小空間格子幅が要求されることを確かめた。なお、解析領域の広さについては、一様流とほぼ同程度で充分であった。

過去の研究者と比較するため、 $S=1340$, $KC=1.00(Re=213)$ での結果を示す。解析領域は $10L$ 以上で充分なことを確認した。クーラン数 C は 2.5×10^{-4} 以下で充分な精度が得られることを確認した（なお、一様流中の静止正方形柱では、 $C < 2.5 \times 10^{-2}$ であった。）。

Fig.9 に、最小空間格子幅 Δy_{\min} の C_D と C_M のへの影響を示す。 C_M については、 Δy_{\min} に関係なく一定の値を取っており、過去の実験とも解析結果とも全て一致している。よって、 C_M を求めるためだけならば、 $\Delta y_{\min} < 0.05$ で充分な精度が得られる。一方、

C_D は、 $\Delta y_{\min} > 0.01$ で Δy_{\min} の値の影響を強く受ける。 Δy_{\min} が小さくなるにつれて一定値（約 4.0）に漸近する傾向を示す。過去の研究では C_D の値に大きなばらつきが見られるが（Fig.9 参照）、本解析結果からは $C_D \approx 4.0$ が妥当と考えられる。

Δy_{\min} 効果の原因を詳細に検討する。Fig.10 に、抗力係数 C_D のうち圧力抗力成分 C_{Dp} が最大となるときの角柱側面での圧力差の分布を示す。 Δy_{\min} を細かくすると、圧力差の分布が同一曲線に収束していくことがわかる。ここで、正確な圧力分布を求めるためには、 $\Delta y_{\min} < 0.00625$ が必要であることがわかる。

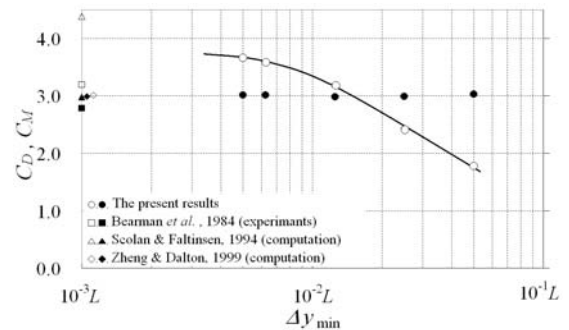


Fig.9 Drag and inertia coefficients C_D and C_M against the minimum grid size Δy_{\min} , for oscillating flow at $S=1340$ and $KC=1.00$. $\circ, \square, \triangle, \diamond, C_D$; $\bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \blacklozenge, C_M$.

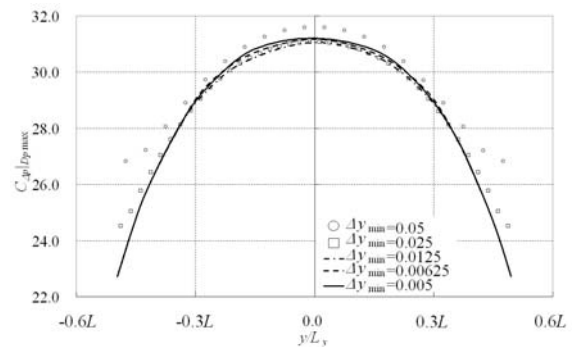


Fig.10 Instantaneous profile of the pressure difference D_p between two side faces for oscillating flow at $S=1340$ and $KC=1.00$. The instant is when the pressure drag D_p attains the maximum.

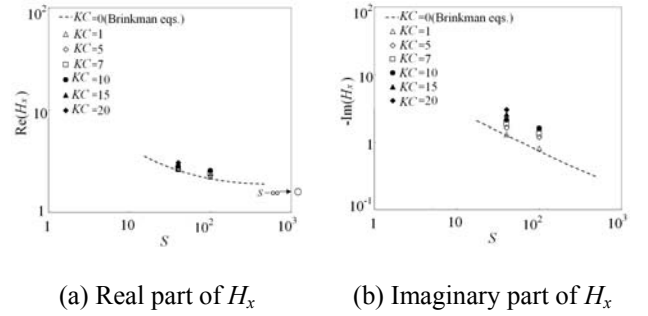
Fig.11 に、有限差分法を用いる full Navier-Stokes 方程式の解、すなわち、流体力係数を示す。ここで、流体力の値は、静止流体中で正弦振動する正方形柱のものに変換している。Fig.11(a)は S に対する $\text{Re}(H_x)$ を、Fig.11(b)は S に対する $-\text{Im}(H_x)$ を、示している。なお、図中の破線は、線形近似解（離散特異点法による Brinkman 方程式の解）を示す。計算は、 $S=40, 100$, $KC=1, 5, 7, 10, 15, 20$ で実施している。解析領域、最小格子幅 Δy_{\min} 、時間刻み幅 Δt の影響は、5[%]以下になるように設定している。

Fig.11 より、 KC が増加するにつれて、 $\text{Re}(H_x)$ 、 $-\text{Im}(H_x)$ はともに増加することが分かる。一方、 KC が減少して 0 に近づくと、線形近似解に漸近することが分かる。

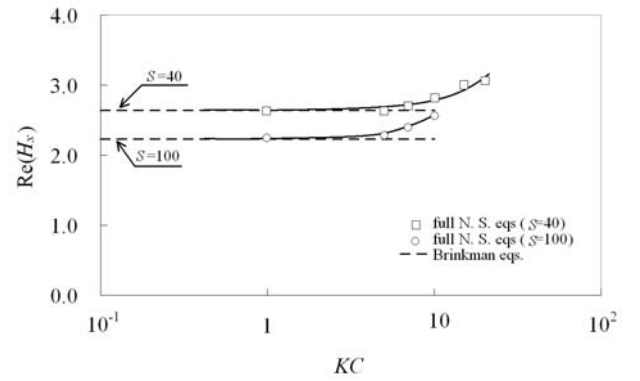
Fig.11 では、線形近似解による誤差の定性的傾向を把握することができる。しかし、線形近似解を実際に使用する際は、近似誤差を定量的に知る必要がある。そこで、Fig.12(a), (b)には、それぞれ、縦軸に対数スケールの $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ の代わりに、リニアスケールの $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ を用いた図を、示す。各図では、横軸に KC 数を取り、 S をパラメータとしている。図からは、 S の値を固定すると、近似誤差、すなわち、Brinkman 方程式の解と full Navier-Stokes 方程式の解との差は、 KC の増加につれて急激に大きくなることが分かる。一方、 KC の値を固定すると、 S の値が大きいほど、近似誤差も、大きくなる傾向がありそうであるが、正確な判断は難しい。なぜならば、 $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ とを含めて評価する必要があるためである。なお、この点は、 KC 効果の評価についても同様である。

近似誤差を議論するには、位相差も含めて複数の誤差についての考察が望まれるが、最初に概略をつかむためには、1 つの値で定量評価する必要がある。我々は、以下の相対誤差 e を定義する。

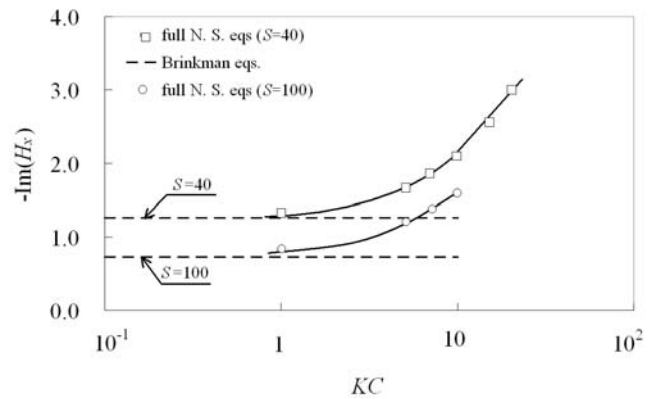
$$e = \frac{|H_x|_{FDM} - |H_x|_{DSM}}{|H_x|_{DSM}} \quad (27)$$



(a) Real part of H_x (b) Imaginary part of H_x
Fig.11 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for a square cylinder.



(a) Real part of H_x



(b) Imaginary part of H_x

Fig.12 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for a square cylinder.

Fig.13に $S=40, 100$ での KC に対する e の値を示す。

相対誤差 e が 5[%] 以下となるのは, $S=40$ で $KC<4.7$, $S=100$ で $KC<3.5$ である. また, e が 20[%] 以下となるのは, $S=40$ で $KC<10$, $S=100$ で $KC<7.6$ である.

3.2.2 フローパターン

線形近似誤差が大きくなる原因を詳細に考えるため, 流れ場を観察する. Fig.14-16 には, それぞれ, $KC=1, 5, 10$ での, 正方形柱に作用する流体力の時系列波形を示す. 3 つの図とも, 3 周期分の $S=100$ の結果である.

Fig.12, 13 に示した線形近似誤差からは, $KC=1$ に比べて, $KC=5$ と $KC=10$ は, 強い非線形性のため, 正弦波から大きく歪んだ時系列は波形が期待できる. しかし, Fig.14-16 をみると, 流体力の値や位相差は異なるが, $KC=5$ (Fig.15) でも, $KC=1$ (Fig.14) と同様に, その波形はほぼ正弦波に近い. 明らかな波形の崩れが観察できるのは, $KC=10$ (Fig.16) のみである. つまり, $KC=10$ では, 周期性こそ保たれているが, 波形は正弦波と大きく異なり, 高調波成分による寄与が大きいことが分かる. $KC=5$ で波形に現れた非線形性が弱い原因については, 流体力が (空間) 積分量であることが関係している. 次のフローパターンで明らかになるが, 適当な観測点での局所的物理量を選択すれば, $KC=1$ ですら, 波形は非線形性を見ることが期待できる.

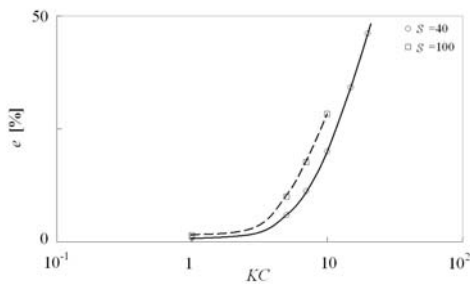


Fig.13 Relative error e against Keulegan-Carpenter number KC for a square cylinder at $S=40, 100$.

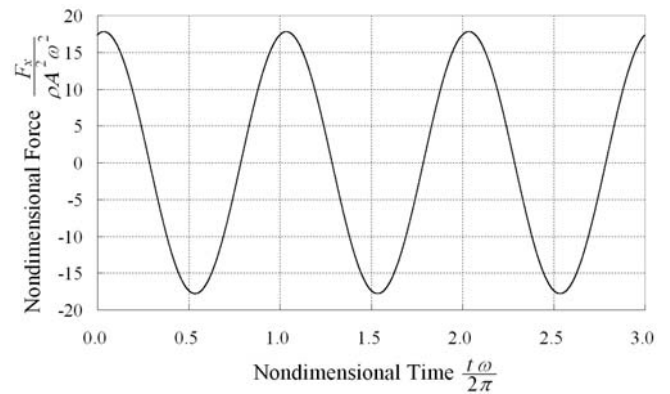


Fig.14 Time history of fluid force acting on a square cylinder ($S=100$, $KC=1$).

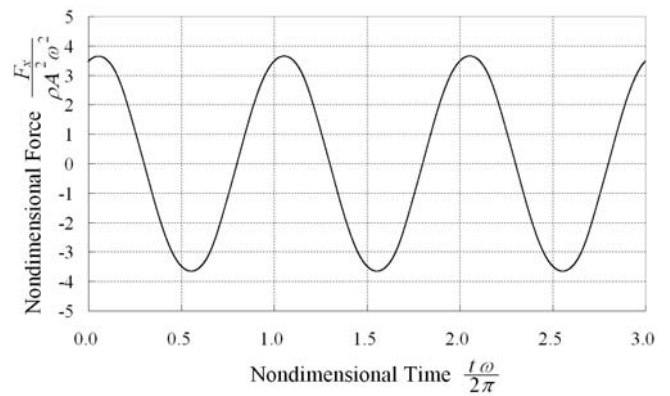


Fig.15 Time history of fluid force acting on a square cylinder ($S=100$, $KC=5$).

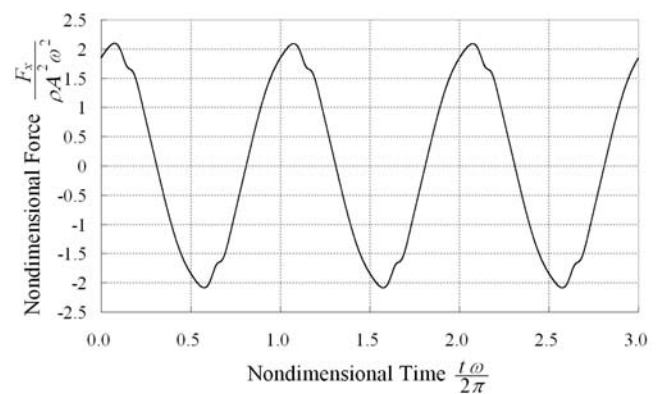


Fig.16 Time history of fluid force acting on a square cylinder ($S=100$, $KC=10$).

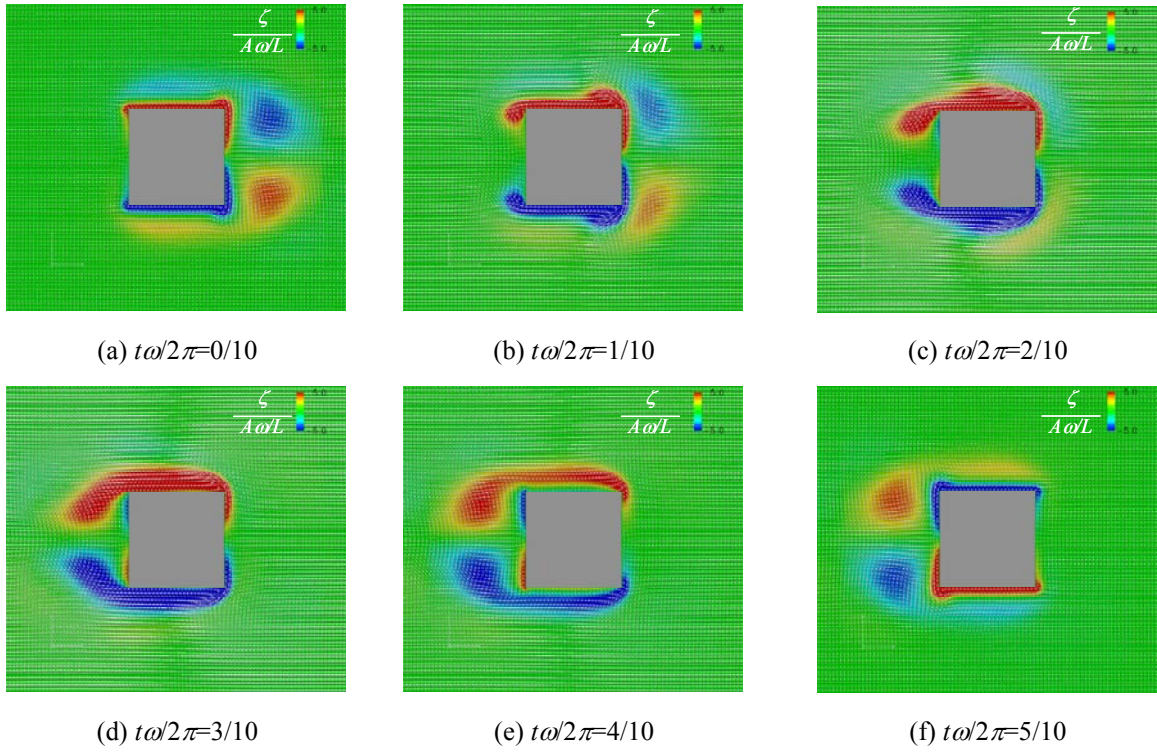


Fig. 18 Flow patterns (Velocity vectors and vorticity denseness) during a half period ($S=100$, $KC=5$).

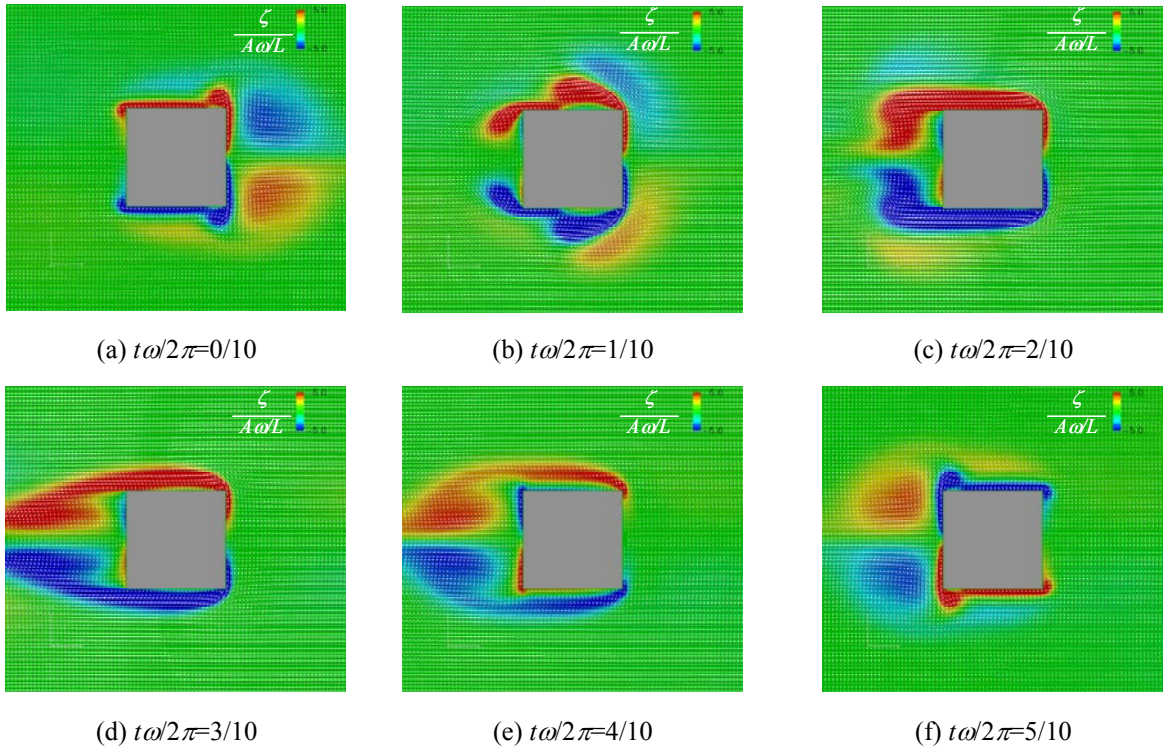


Fig. 19 Flow patterns (Velocity vectors and vorticity denseness) during a half period ($S=100$, $KC=10$).

(1) y 軸に関する非対称性が増している.

(2) 逆流の生じる時間が増している.

すなわち, $t\omega/2\pi=4/10$ (図(e))の他に, $t\omega/2\pi=2/10$ (図(c))と $t\omega/2\pi=3/10$ (図(d))でも逆流が観察される.

最後に, Fig.19 を見る. x 軸に関する対称性は Fig.17,18 と同様, 全ての瞬間で保たれている. しかし, y 軸に関する非対称性は, Fig.17,18 より明らかに強い. その差異が最も顕著に見られるのは, $t\omega/2\pi=1/10$ (図(b))である. すなわち, 上流方向 (図中右側) の角で流れの剥離が起こり, 下流方向側面での逆流域に加えて新たな孤立した逆流域が現れている.

4. おわりに

本研究では, 粘性流体中で振動する 2 次元物体における付加質量に関する新しい解析手法を考え, その有効範囲を明らかにした. すなわち, 微小振幅の仮定の下で full Navier-Stokes 方程式の線形近似を行うと, 支配方程式が Brinkman 方程式になる. Brinkman 方程式の基本解を特異点とし, 粘性流中における円, 楕円, 角形または菱形柱の付加質量を離散特異点法による結果を示した. そして, 振動流中の正方形柱に対して, 有限差分法(MAC 法に基づく)を用いて full Navier-Stokes 方程式を解き, 線形近似の有効性を検証した. さらに, 線形近似の有効範囲を明らかにし, 対応する流れ場の詳細を示した.

本研究は, 一部文部科学省学術フロンティア推進事業「次世代ゼロエミッションエネルギー変換システム」の支援を受けた. ここに記して謝意を表する.

参考文献

- 1) K. T. Patton, Tables of hydrodynamic mass factors for translational motion, *ASME paper*, No. 65-WA/UNT-2, 1-7, 1965
- 2) C. Dalton & R. A. Helfinstine, Potential flow past a group of circular cylinders", *Trans. ASME Ser. D*, 934, 636-642, 1971
- 3) H. Yano & M. Ooe, An approximate method for computation of added-mass coefficients of two-dimensional bodies (two-dimensional potential theory), *Trans. JSME Ser. B*, 58(554), 3094-3099, 1992
- 4) S. S. Chen, *Flow-induced vibration of circular cylindrical structures*, 30-35, Hemisphere, New York, 1987
- 5) Y. M. Scolan & O. M. Faltinsen, Numerical studies of separated flow from bodies with sharp corners by the vortex in cell method, *J. of Fluids and Structures*, 8, 201-230, 1994
- 6) W. Zheng & C. Dalton, Numerical prediction of force on rectangular cylinders in oscillating viscous flow, *J. of Fluids and Structures*, 13, 225-249, 1999
- 7) G. H. Keulegan & L. H. Carpenter, Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid, *J. of the Research of the National Bureau of Standards*, 60(5), 423-440, 1958
- 8) P. W. Bearman, J.M. R. Graham, E. D. Obasaju & G. M. Drossopoulos, The influence of corner radius on the forces experienced by cylindrical bluff bodies in oscillatory flow, *Applied Ocean Research*, 6, 83-89, 1984
- 9) H. Shomohara & K. Hirata, A method for computation of added-mass coefficients of two-dimensional bodies by a discrete singularity method, *Trans. JSME Ser. B*, 66(644), 1061-1066, 2000
- 10) H. Yano & A. Kieda, The fundamental solution of

brinkman's equation in two dimensions, *Fluid Dyn. Res.*, **7**, 109-118, 1991

- 11) T. Sarpkaya, On the parameter $\beta = \text{Re}/\text{KC} = D^2/\nu T$, *J. of Fluid and Structures*, **21**, 435-440, 2005
- 12) J. R. Morison, M. O. O'Brien, J. W. Johnson & S. A. Schaaf, The force exerted by surface waves on piles, *Petroleum Trans. AIME*, **189**, 149-157, 1950
- 13) J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon & B. J. Daly, The MAC method, a computing technique for solving viscous, incompressible transient fluid-flow problems involving free surface, *Nuclear science abstracts*, 1-146, 1965
- 14) S. Chakrabarti, Handbook of offshore engineering, 158-160, 2005
- 15) G. G. Stokes, On some cases of fluid motions, *Proc. Cambridge Philosophical Soc.*, **8**, 105-137, 1843