

The Shortest Path Problem and The Longest Path Problem

Sennosuke WATANABE* and Yoshihide WATANABE**

(Received 19 April, 2013)

Many of combinatorial optimization problems can be formulated as the linear programming (LP) problem. So they can be solved not only by their proper combinatorial algorithms but also by the algorithm in the LP problem. In the present paper, we focus on the shortest path problem and the longest path problem which are typical examples of the combinatorial optimization problem on the flow-networks. The shortest path problem is the problem for finding the path whose weight is minimal. Conversely, the longest path problem is the problem for finding the path whose weight is maximal. The purpose of our study is to formulate the shortest path problem and the longest path problem as the LP problem, and to find an algorithm for solving the longest path problem. In the present paper, we give the formulation of the shortest path problem as the LP problem. However, the longest path problem is not easy to formulate as the LP problem. So we give one formulation of the longest path problem by using rank condition, and give a combinatorial algorithm for the longest path problem.

Key words : Shortest path problem, Longest path problem, Linear programming problem

キーワード : 最短路問題, 最長路問題, 線形計画問題

最短路問題と最長路問題

渡辺扇之介・渡邊芳英

1. はじめに

組み合わせ最適化問題の多くは線形計画問題 (以後 LP 問題) や整数計画問題 (以後 IP 問題) として定式化され, 個々の組み合わせ論的なアルゴリズムだけではなく, LP 問題や IP 問題におけるアルゴリズムも適用できることが知られている^{2, 4)}. このような方向の研究は計算時間の改善を与えるものではないが, 個々の組み合わせ最適化問題の特徴的な代数構造を与えるという点で重要な意味を持っている.

本研究で対象とする最適化問題は, グラフ・ネットワーク上の最適化問題の代表例である最短路問題とその逆,

最長路問題である. 最短路問題とは, 現在地から目的地までの道の中で, 最も距離の短い道を求める問題で, カーナビゲーションシステム等に応用されている. ネットワーク最適化問題には他に最大流問題, 最小費用流問題などがあり, 最短路問題はこれらの中で最も単純な例である. そのため, 最短路問題の組み合わせ論的アルゴリズムについては, 古くから研究が進んでおり, 現在多くの計算機に実装されているアルゴリズムは, 改善の余地がないほど早い^{1, 3)}. さらに, 数学的構造については, 最短路問題, 最大流問題, 最小費用流問題の3つネットワーク最適化問題の中で, 最も複雑に見える最小費用流問題が, 数学的にシンプルで構造がきれいに見える問題であるた

* Graduate School of Science and Engineering, Doshisha University, Kyoto

Telephone: 0774-65-6302, E-mail: etk1903@mail4.doshisha.ac.jp

** Department of Mathematical Science, Doshisha University

め、最短路問題について議論されることは少ない。本論文では、既に知られている最大流問題における事実⁵⁾を応用し、最短路問題のLP問題としての定式化を行う。また、最短路問題とは目的が逆で、現在地から目的地までの道の中で、最も距離の長い道を求める問題である最長路問題についても定式化を考えるが、この最長路問題は解くこと自体が非常に難しい問題として知られており、LP問題として定式化することも容易ではない。そこで本論文では、最短路問題のLP問題としての定式化の手法を応用させ、標準的なLP問題の形を成してはいないが、最長路問題の1つの定式化を与える。また、最長路問題については、組み合わせ論的アルゴリズムについて知られているものはない。本論文では、この組み合わせ論的アルゴリズムも与える。

2. ネットワーク

頂点集合 V と辺集合 E からなる有向グラフを $G = (V, E)$ で表わす。有向グラフの辺 $e \in E$ は、2つの頂点 $v_i, v_j \in V$ を結んでおり、その対 (v_i, v_j) で決まる。 v_i を辺 e のテイル、 v_j をヘッドといい、それぞれ $v_i = \partial^-(e)$, $v_j = \partial^+(e)$ と表す。頂点 v_i, v_j を結ぶ辺が複数存在するとき、このような辺を多重辺といい、また、 $v_i = v_j$ となるとき、辺 e を自己ループという。多重辺と自己ループを含まない有向グラフを単純グラフといい、以後、 m 個の頂点と n 個の有向辺からなる単純な有向グラフを考える。有向グラフ G の辺の列 $\mathcal{W} = (e_1, \dots, e_k)$ が歩道であるとは、各 $i = 1, 2, \dots, k-1$ に対して (i) $\partial^+(e_i) = \partial^-(e_{i+1})$ もしくは (ii) $\partial^+(e_i) = \partial^+(e_{i+1})$ を満たすものをいう。特に歩道の全ての辺が (i) を満たすものを有向歩道という。頂点 $\partial^-(e_1)$ を歩道の出発点、頂点 $\partial^+(e_k)$ を歩道の終着点という。出発点 $\partial^-(e_1) = v_s$ 、終着点 $\partial^+(e_k) = v_t$ である歩道を v_s - v_t 歩道という。注意として、歩道は辺列の中に同じ辺があってもよい。歩道であって、1つの辺が高々1度しか含まれないものを小路という。さらに、歩道であって、出発点と終着点以外の頂点が高々1度しか含まれないものを道という。出発点と終着点が一致する路を閉路という。小路、道、閉路についても、有向の

概念を歩道と同様な形で定義できる。次に有向グラフを表現するために重要な概念である接続行列を定義する。

定義 1 (接続行列). $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ である有向グラフ $G = (V, E)$ の接続行列 Q は、 $m \times n$ の行列で表現され、 Q の第 i 行第 j 列の成分 q_{ij} は、以下で定義される。

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i = \partial^+(e_j) \\ -1 & v_i = \partial^-(e_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

道 \mathcal{P} に1つの向きを固定し、 \mathcal{P} に含まれる辺の集合を P とすると、辺集合 P は固定された向きと順向きの辺集合 P^+ と、逆向きの辺集合 P^- の共通部分のない集合に $P = P^+ \sqcup P^-$ と分けることができる。この向きを含めた道を表現する、接続ベクトルを次のように定義する。

定義 2 (接続ベクトル). $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ である有向グラフ $G = (V, E)$ の道 \mathcal{P} に対して、その辺集合を $P = P^+ \sqcup P^-$ とし、道の接続ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ の各成分 p_i を次のように定義する。

$$p_i = \begin{cases} 1 & e_i \in P^+ \\ -1 & e_i \in P^- \\ 0 & e_i \notin P \end{cases}$$

特に、接続ベクトルの全ての成分が非負である道が有向道である。

閉路 \mathcal{X} の接続ベクトル \mathbf{x} についても、道と同様な形で定義することができる。閉路の接続ベクトルとグラフの接続行列について、次の定理が知られている。

定理 3. ²⁾ 有向グラフ $G = (V, E)$ の接続行列を Q とする。 Q の整数核 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}}(Q)$ の元は G の全ての閉路の接続ベクトル全体の一次結合で生成される。

3. 線形計画問題 (LP 問題)

LP問題とは、いくつかの1次不等式や等式で表わされる制約条件のもとで、1次関数を最大あるいは最小に

する問題である。LP 問題は様々な形で定式化できるが、本論文では、以下の形を LP 問題の標準的な形とする。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad {}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は $m \times n$ 行列で、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ縦ベクトルである。LP 問題とは、制約条件 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ (実行可能解) の中で目的関数 ${}^t\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ の値を最小にするような解 (最適解) を求める問題である。

4. 最小費用流問題の LP 定式化

本論文の主題の1つである最短路問題の LP 問題としての定式化は、すでに知られている最小費用流問題の定式化の手法を応用させて行うため、まず最小費用流問題について説明する。 m 個の頂点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ と n 個の辺集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ からなる有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。有向グラフの各辺 $e_j \in E$ に正の整数 c_j を与え、これらを各成分に持つ n 次元ベクトル $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ を容量という。 $v_1 = s, v_m = t \in V$ は特別な頂点であり、 s から t には有向道が存在するものと仮定する。そのとき、 $\mathcal{N} = (G, \mathbf{c}, s, t)$ をネットワークと呼ぶ。このネットワーク \mathcal{N} の各辺に容量 \mathbf{c} に加えて、コスト $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ を与える。さらに、各頂点に全ての成分を足すと 0 になるような需要関数と呼ばれる m 次元ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ を与える。最小費用流問題において、ネットワーク上のフロー \mathbf{u} とは、 n 次元の非負ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ であって各成分は以下の条件 (i) と (ii) を満たすものをいう：

$$(i) \quad 0 \leq u_j \leq c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(ii) \quad \sum_{\partial^+(e_j)=v_i} u_j - \sum_{\partial^-(e_j)=v_i} u_j = b_i \quad (v_i \in V).$$

条件 (i) は容量制約条件と呼ばれ、フローは非負で各辺に与えられた容量を超えないことを意味する。条件 (ii) は需要条件と呼ばれ、任意の頂点において、流入するフローの和と流出するフローの差が需要関数の値となるこ

とを意味する。最小費用流問題とは、条件 (i) と (ii) を満たすフローの中で、フローのコスト ${}^t\gamma \cdot \mathbf{u}$ が最小となるフローを求める問題である。この最小費用流問題は LP 問題として以下のように定式化されることが知られている⁶⁾。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad {}^t\gamma \cdot \mathbf{u} \\ & \text{subject to} \quad Q\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad : \text{需要条件} \\ & \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{c} \quad : \text{容量制約条件} \end{aligned} \quad (2)$$

5. 最短路問題の LP 定式化

よく知られている最短路問題の定義とは、有向グラフ G の各辺に容量 c の代わりに重み ω を与えたネットワーク $\mathcal{N} = (G, \omega, s, t)$ において、全ての有向 s - t 道の中で、道に含まれる辺の重みの総和が最小である道を求める問題というものである。(ただし、辺の重みの総和が負になるような閉路は存在しないとする。) しかし、LP 定式化を行うにあたって、最短路問題を最小費用流問題の特別な場合として、次のような問題と再定義する：頂点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ と辺集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ からなる有向グラフ $G = (V, E)$ 上のネットワーク $\mathcal{N} = (G, \mathbf{c}, s, t)$ を考える。さらに、グラフ G の各辺に容量 \mathbf{c} に加えて、重み $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ を与える。また、各頂点に需要関数 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ を与える。最短路問題では容量 \mathbf{c} を $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1) = \mathbf{1}$ と、需要関数 \mathbf{b} を $\mathbf{b} = (-1, 0, \dots, 0, 1) = (-1, \mathbf{0}, 1)$ と固定する。ここで、需要関数は頂点 s での値を -1 、頂点 t での値を 1 、その他の頂点での値を 0 とした。これらの準備のもと、最短路問題は最小費用流問題の定式化 (2) にならって、以下のように LP 問題として定式化することができる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad {}^t\omega \cdot \mathbf{u} \\ & \text{subject to} \quad Q\mathbf{u} = {}^t(-1, \mathbf{0}, 1) \quad : \text{需要条件} \\ & \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1} \quad : \text{容量制約条件} \end{aligned} \quad (3)$$

6. 最長路問題の定式化

次に、最長路問題について議論する。最長路問題とは、最短路問題が定義されるネットワークにおいて、全ての有向 s - t 道の中で、道に含まれる辺の重みの総和が最大である道を求める問題である。この問題を最短路問題同様、LP 問題として定式化することを考えたが、現時点では成功していない。その理由は、前述の定理 3 と、最大流問題において知られている次の定理から考えることができる。

定理 4. ⁵⁾ 有向グラフ G の接続行列 Q とし、 Q から頂点 s と頂点 t に対する行を取り除いた行列を \tilde{Q} とする。行列 \tilde{Q} の整数核 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}}(\tilde{Q})$ の元は G の全ての閉路の接続ベクトルと全ての s - t 道の接続ベクトルの一次結合全体で生成される。

定理 3 と定理 4 から、最短路問題の LP 問題としての定式化 (3) における、制約条件を満たす実行可能解は、全ての s - t 道と閉路の接続ベクトルの一次結合全体が現れている。その中で、目的関数を満たすものは、重み ω が非負ベクトルであることから、閉路が除かれ、全ての s - t 道の中で最も重みの和が小さい道が最適解として現れた。しかし、最長路問題では最も重みの総和が大きいことを目的関数としているため、最短路と同様な定式化を行うと、閉路を除くことができず、最適解として s - t 道が現れない。そこで、我々は最長路問題を標準的な LP 問題ではないが、次のような形で定式化した。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && {}^t\omega \cdot u \\ & \text{subject to} && Q\mathbf{u} = {}^t(-1, \mathbf{0}, 1) && : \text{需要条件} \\ & && \text{rank}(Q(\mathbf{u})) = \text{full} && : \text{rank 条件} \\ & && \mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1} && : \text{容量制約条件} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、rank 条件とは、 $Q(\mathbf{u})$ を \mathbf{u} の非零成分に対応する Q の列ベクトルを並べた行列として、この行列 $Q(\mathbf{u})$ の階数 (rank) がフルランクであることを制約とした条件である。行列 Q は有向グラフの接続行列であるため、行列 $Q(\mathbf{u})$ はフローが流れる辺と頂点でできた G の部分グラフの接続行列になる。よって、定理 3 より、行列 $Q(\mathbf{u})$

を接続行列とするグラフが閉路を含んでいると、 $Q(\mathbf{u})$ の階数は下がる。つまり、この rank 条件を制約条件に加えることで、実行可能解から閉路を除くことができている。

7. 最長路問題の組み合わせ論的アルゴリズム

最後に、最長路問題に対して、始点 s から任意の頂点 v_j への最長路とその長さ $y_j = y(v_s, v_j)$ ($j = 1 (= s), 2, \dots, m (= t)$) を求める、組み合わせ論的なアルゴリズムを示す。準備として、 m 個の頂点と n 個の辺からなる有向グラフ $G = (V, E)$ 上のネットワーク $\mathcal{N} = (G, \omega, s, t)$ における、 $m \times m$ の行列 $W = (w_{ij})$ を次のように定義する：

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \omega((v_i, v_j)) & \text{if } (v_i, v_j) \in E \\ -\infty & \text{if } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

アルゴリズム 5.

Step1: 初期値として $y_1 := 0$, $j = 2, 3, \dots, m$ に対して $y_j := -\infty$ とする。また、頂点のリスト A_j ($j = 1, 2, \dots, m$) を準備し、初期値として $A_j := (\text{空リスト})$ とする。さらにステップ数を表すパラメータを r として、初期値 $r := 1$ とする。

Step2: $r = m$ となるか、全ての $j = 1, 2, \dots, m$ について $y_j = y'_j$ となるまで以下を繰り返す。

(i) 全ての $j = 1, 2, \dots, m$ について、 $y_j := y'_j$, $A_j := A'_j$ とおく。

(ii) 頂点のリスト A_j に含まれない頂点 v_k に対して、以下の更新を行う。

$$y'_j := \max\{y_k + w_{kj}\}, \quad A'_j := \text{append}(A_k, \text{list}(v_k)) .$$

(iii) $r := r + 1$ として、(i) に戻る。

8. まとめ

本論文では、最短路問題を最小費用流問題の特殊ケースとして見ることで、最短路問題の LP 問題としての定式化を行った。また、最長路問題については、標準的な LP 問題としてではないが、計算機に実装できる形の定式化を行った。最長路問題の LP 問題、もしくはその類

似物としての定式化は今後の課題である。さらに、本論文では、最長路問題を解く組み合わせ論的アルゴリズムを与えている。このようなアルゴリズムについては、知られていない。このアルゴリズムの計算時間については、とても効率の良いものとは言えないため、さらに改善の余地があると考えている。

参 考 文 献

- 1) K. Ahuja, L. Magnanti and B. Orlin, *NETWORK FLOWS*, (PrenticeHall, New Jersey, 1993).
- 2) A. Bachem and W. Kern, *Linear Programming Duality*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992).
- 3) D. Jungnickel, *Graphs, Networks and Algorithm: Second Edition*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005).
- 4) B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Second Edition*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2001).
- 5) S. Watanabe, Y. Watanabe and D. Ikegami, “Universal Gröbner basis associated with the maximum flow problem”, Japan J. Indust. Appl. Math., **30**, 39-50 (2013).
- 6) 石関 隆幸, 中山 裕貴, 今井 浩, “計算代数的手法を用いた最小費用流問題”, 数理解析研究所講究録, **1289**, 122-140 (2002).